Departamento de
Engenharia Electromecânica

Homework 08
(Observabilidade e Forma dual da companheira)

Felippe de Souza

1) Para cada um dos sistemas dados abaixo, verifique a observabilidade.

i)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ t^2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & t \end{bmatrix} x \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} t & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

iii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Prof. Felippe de Souza

Homework 08
(Observabilidade e Forma dual da companheira)

Felippe de Souza

iv)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

v)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

vi)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Prof. Felippe de Souza

vii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

2) Para o sistema abaixo, calcule a matriz de observabilidade $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$

e observe que o $\det(V) \neq 0$ para $\forall\, \alpha$, e portanto o $\text{rank}\,(V) = 2$. Logo, o sistema é observável para $\forall\, \alpha$.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

3) Para o sistema do Exercício 2 acima, encontre uma nova a matriz $c = [c_1 \quad c_2]$, tal que o sistema **não** seja mais observável para um dado valor de α.

Solução: $c = [c_1 \quad -\alpha\, c_2/5]$

Prof. Felippe de Souza

FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de Engenharia Electromecânica

Homework 08
(Observabilidade e Forma dual da companheira)

Felippe de Souza

4) Verifique que os sistemas dados abaixo **não** são 'observáveis' e encontre o '**subespaço não observável**' de cada um deles.

i)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

iii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Prof. Felippe de Souza

iv)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

5) Para cada um dos sistemas do Exercício 2 acima, encontre

dois **estados '*indistinguíveis*'**

e

um **estado '*não observável*'.**

6) Para o sistema dado abaixo,

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 5 & 2{,}5 \\ -13 & -2 & 0 & -3 \\ 16 & 4 & 17 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

a) - Calcule V usando a equação 11.4 $\qquad V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

e verifique que V é uma matriz 4x4 e o $\text{rank}(V) = 4$, logo o sistema é observável e V é inversível;

Prof. Felippe de Souza

Homework 08
(Observabilidade e Forma dual da companheira)

Felippe de Souza

b) - Calcule então V^{-1};

c) - Calcule $\tilde{V}$ e $\tilde{V}^{-1}$ utilizando os e_k's e α_k's (de acordo com as equações 11.19, 11.20 e 11.21) e verifique que ambas são matrizes triangulares com 1's na diagonal secundária; observe também que $\tilde{V}$ e $\tilde{V}^{-1}$ são as mesmas matrizes $\overline{U}$ e $\overline{U}^{-1}$ calculadas no exercício 5 do Homework 7 (Controlabilidade e Forma companheira);

d) - Calcule agora $\tilde{V}$ usando a equação 11.5

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix},$$

assim como a sua inversa $\tilde{V}^{-1}$ e verifique que são os mesmos $\tilde{V}$ e $\tilde{V}^{-1}$ encontrados na alínea (c) acima;

e) - Calcule $P = \tilde{V}^{-1}V$ e $Q = V^{-1}\tilde{V}$ (equações 11.6 e 11.7) e verifique que P e Q aqui **não** são os mesmos P e Q ($P = \overline{U}U^{-1}$ e $Q = U\overline{U}^{-1}$) que foram os encontrados no exercício 5 do Homework 7 (Controlabilidade e Forma companheira);

f) - Agora calcule P usando o algoritmo para achar as linhas de P (equações 11.12) e depois calcule a sua inversa $Q = P^{-1}$. Verifique que são os mesmos P e Q encontrados na alínea (e) acima;

g) - Usando este P, ou Q, calculados aqui, encontre a forma **dual da companheira** ($\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$ e $\tilde{C} = CP^{-1}$ ou $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$, $\tilde{B} = Q^{-1}B$ e $\tilde{C} = CQ$).

Nota: As matrizes P e Q que foram encontradas no exercício 5 do Homework 7 (Controlabilidade e Forma companheira) serviram para encontrar a forma **companheira.**

h) - Observe que $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ encontrados aqui satisfazem $\tilde{A} = \overline{A}^T$, $\tilde{B} = \overline{C}^T$ e $\tilde{C} = \overline{B}^T$ para $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$ (forma **companheira**) encontrados no exercício 5 do Homework 7 (Controlabilidade e Forma companheira).

Prof. Felippe de Souza