Departamento de
Engenharia Electromecânica

Homework 07
(Controlabilidade e Forma companheira)

Felippe de Souza

1) Para cada um dos sistemas dados abaixo, verifique a controlabilidade.

i)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2t \end{bmatrix} x \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} t & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

iii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

iv)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

v)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

vi)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

vii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

viii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1{,}5 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

ix)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

2) Verifique que os sistemas dados abaixo são todos controláveis.

Para cada um deles encontre o controlo $u(t)$, $0 < t < 3$ que conduz o sistema do estado inicial x_o no instante $t_o = 0$, para o estado final x_f (dados abaixo) no instante $t_f = 3$.

Ache as curvas do estado $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]$ e esboce a trajetória $x_1(t)$ x $x_2(t)$.

i)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x_f = \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x_f = \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

iii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x_f = \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Homework 07
(Controlabilidade e Forma companheira)

Felippe de Souza

iv)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x_f = \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0,5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

v)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1,5 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x_f = \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de
Engenharia Electromecânica

Homework 07
(Controlabilidade e Forma companheira)

Felippe de Souza

3) Verifique que os sistemas dados abaixo **<u>não</u>** são controláveis e encontre o **subespaço controlável** de cada um deles.

i)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

iii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

4) Reescreva cada um dos sistemas (i), (ii), (iii), (iv) e (v) dados no Exercício 1 acima na forma companheira.

Homework 07
(Controlabilidade e Forma companheira)

Felippe de Souza

5) Para o sistema abaixo,

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 5 & 2{,}5 \\ -13 & -2 & 0 & -3 \\ 16 & 4 & 17 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

a) - Calcule $U = [\, B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \,]$ (equação 10.4) e verifique que U é uma matriz 4x4 e o $\text{rank}(U) = 4$, logo o sistema é controlável e U é inversível;

b) - Calcule então U^{-1};

c) - Calcule $\overline{U}$ e $\overline{U}^{-1}$ utilizando os e_k's e α_k's (equações 10.16, 10.17 e 10.18) e verifique que ambas são matrizes triangulares com 1's na diagonal secundária;

d) - Calcule agora $\overline{U}$ usando a equação 10.5 $\overline{U} = [\overline{B} \quad \overline{A}\,\overline{B} \quad \cdots \quad \overline{A}^{n-1}\overline{B}]$, assim como a sua inversa $\overline{U}^{-1}$ e verifique que são os mesmos $\overline{U}$ e $\overline{U}^{-1}$ encontrados na alínea (c) acima;

e) - Calcule $P = \overline{U}U^{-1}$ e $Q = U\overline{U}^{-1}$ (equações 10.6 e 10.7);

f) - Agora calcule Q usando o algoritmo para achar as colunas de Q (equações 10.12) e depois calcule a sua inversa $P = Q^{-1}$. Verifique que são os mesmos P e Q encontrados na alínea (f) acima;

g) - Usando este P, ou Q, calculados aqui, encontre a forma **companheira** ($\overline{A} = PAP^{-1}$, $\overline{B} = PB$ e $\overline{C} = CP^{-1}$ ou $\overline{A} = Q^{-1}AQ$, $\overline{B} = Q^{-1}B$ e $\overline{C} = CQ$).

h) - Encontre a forma **dual da companheira** $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ fazendo $\tilde{A} = \overline{A}^T$, $\tilde{B} = \overline{C}^T$ e $\tilde{C} = \overline{B}^T$.