FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de Engenharia Electromecânica

Homework 06
(Solução de um sistema linear)

Felippe de Souza

1) Para cada um dos dois sistemas homogéneos abaixo descritos pelas suas equações de estado, encontrar uma matriz fundamental $\psi(t)$ e a matriz de transição $\Phi(t)$ do sistema.

i)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} x$$

ii)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

2) Para cada um dos três sistemas homogéneos abaixo descritos pelas suas equações de estado, encontrar a solução $x(t)$, $t > 0$, considerando as condições iniciais dadas, $x(0)$.

Verificar se a solução $x(t)$ encontrada satisfaz a equação $\dot{x} = Ax$ dada e se $x(0)$ = condições iniciais.

i)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ii)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Prof. Felippe de Souza

FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de Engenharia Electromecânica

Homework 06
(Solução de um sistema linear)

Felippe de Souza

3) Para cada um dos três sistemas abaixo descritos pelas suas equações de estado, encontrar a solução $x(t)$, $t > 0$, considerando as condições iniciais dadas, $x(0)$ e a entrada $u(t)$ = degrau unitário.

Verificar se a solução $x(t)$ encontrada satisfaz a equação $\dot{x} = Ax + Bu$ dada e se $x(0)$ = condições iniciais.

i)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ii)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

iii)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

4) Considere o sistema dado abaixo pelas suas equações de estado, cujo estado inicial $x_o = x(0)$ também é dado abaixo e entrada $u(t)$ = degrau unitário,

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Prof. Felippe de Souza

Achar o estado do sistema no instante $t = 3$, $x(3)$. Encontre a expressão da saída $y(t)$ do sistema. Ou seja,

$$x(3) = \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \; ? \qquad\qquad y(t) = \; ?$$

Fazer um esboço da trajetória percorrida pelo estado $x(t)$ do sistema no espaço de estados $\mathbb{R}^2$ para $t > 0$. Fazer um esboço também da saída $y(t)$ para $t > 0$.

5) Considere o sistema dado abaixo pelas suas equações de estado, cujo estado inicial $x_o = x(0)$ também é dado abaixo e entrada $u(t)$ = degrau unitário.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Achar o estado do sistema no instante $t = 2$, $x(2)$. Encontre a expressão da saída $y(t)$ do sistema. Ou seja,

$$x(3) = \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \; ? \qquad\qquad y(t) = \; ?$$

Fazer um esboço da trajetória percorrida pelo estado $x(t)$ do sistema no espaço de estados $\mathbb{R}^2$ para $t > 0$. Fazer um esboço também da saída $y(t)$ para $t > 0$.

Prof. Felippe de Souza