FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de
Engenharia Electromecânica

Homework 05
(Função de matriz)

Felippe de Souza

1) Para cada uma das matrizes A abaixo, utilizadas no homework 4 (sobre Diagonalização),

a) calcular $p(\lambda)$ = o polinómio característico de A e $\psi(\lambda)$ = o polinómio mínimo de A,

b) verificar quais são os casos em que $\psi(\lambda)$ não coincide com $p(\lambda)$ e

c) confirmar que a função de matriz $\psi(A) = 0$ em cada um destes casos.

i)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -0,5 & -3 \end{bmatrix}$$

ii)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -0,5 & -3 \end{bmatrix}$$

iii)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 & -3,5 & 0 \\ 0 & -2,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & -1,5 & 0 \\ 0 & -2,5 & -3,5 & -3 \end{bmatrix}$$

iv)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -8 \\ 1 & -8 & 8 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

v)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3{,}75 & -2{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -2{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}75 & 1{,}75 & -3 \end{bmatrix}$$

vi)

$$A = \begin{bmatrix} -2{,}5 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & -3 & -0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 & -3{,}25 & 0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 0{,}75 & -3{,}25 \end{bmatrix}$$

vii)

$$A = \begin{bmatrix} -65 & -53 & -190 & -93 \\ 66 & 53 & 190 & 94 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

viii)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ix)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

x)

$$A = \begin{bmatrix} -2{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & -1 & 1{,}5 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -3 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & -3{,}5 \end{bmatrix}$$

2) Considere a matriz A abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Usando os valores no espectro de A,

i) calcule o polinómio de matriz $\Delta(A) = A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$.
(o resultado que irá obter se justifica pelo Teorema de Cayley-Hamilton)

ii) calcule o polinómio de matriz $p(A) = A^{10} - 3A^9 + 5A^8 - 6A^7$.

iii) calcule o polinómio de matriz $p(A) = A^{10} - 3A^9 + 5A^8 - 51A^4$.

iv) calcule a função de matriz $f(At) = sen(At)$.
Verifique que para $t = 0$, $f(A \cdot 0) = sen(A \cdot 0) = 0$ (matriz zero).

v) calcule a função de matriz $f(At) = e^{At}$.
Verifique que para $t = 0$, $f(A \cdot 0) = e^{A \cdot 0} = I$ (matriz zero).

Solução:

ii)

$$p(A) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

iii)

$$p(A) = \begin{bmatrix} -48 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & -48 \end{bmatrix}$$

iv)

$$f(A) = sen(A) = \begin{bmatrix} 2\,sen\,t - sen\,2t & 0 & 2\,sen\,2t - 2\,sen\,t \\ 0 & sen\,t & 0 \\ sen\,t - sen\,2t & 0 & 2\,sen\,2t - sen\,t \end{bmatrix}$$

v)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{2t} & 0 & 2e^{2t} - 2e^{t} \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ e^{t} - e^{2t} & 0 & 2e^{2t} - e^{t} \end{bmatrix}$$

Homework 05
(Função de matriz)

Felippe de Souza

3) Considere a matriz A abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Usando os valores no espectro de A,

i) Calcule o polinómio de matriz $p(A) = A^5 - 2A^3 - 6A^2 - 70A + 75 \cdot I$.

ii) Calcule a função de matriz $f(A) = \cos(At)$.
Verifique que para $t = 0$, $f(A \cdot 0) = \cos(A \cdot 0) = I$ (matriz identidade).

iii) Calcule a função de matriz $f(A) = e^{At}$.
Verifique que para $t = 0$, $f(A \cdot 0) = e^{A \cdot 0} = I$ (matriz identidade).

Solução:

i)

$$p(A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ii)

$$f(A) = \cos(A) = \begin{bmatrix} \cos 3t & \dfrac{\cos t - \cos 3t}{2} & \dfrac{\cos 3t - \cos t}{2} \\ 0 & \cos t & \cos 3t - \cos t \\ 0 & 0 & \cos 3t \end{bmatrix}$$

iii)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{3t} & \dfrac{e^{t}-e^{3t}}{2} & \dfrac{e^{3t}-e^{t}}{2} \\ 0 & e^{t} & e^{3t}-e^{t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

4) Considere a matriz A abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule a função de matriz $f(A) = e^{At}$ aplicando o Teorema 1 (capítulo 4). Isto é, em vez de fazer o cálculo da exponencial de A para uma matriz 4x4, fazemos para duas matrizes 2x2.

Solução:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \dfrac{2e^{-2t}+3e^{3t}}{5} & \dfrac{3e^{-2t}-3e^{3t}}{5} & 0 & 0 \\ \dfrac{2e^{-2t}-2e^{3t}}{5} & \dfrac{3e^{-2t}-2e^{3t}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sqrt{2}\cdot t & \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\sqrt{2}\cdot t}{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\sqrt{2}\cdot t & \cos\sqrt{2}\cdot t \end{bmatrix}$$

FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de
Engenharia Electromecânica

Homework 05
(Função de matriz)

Felippe de Souza

5) Considere as matrizes A abaixo.

i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, ii) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

iii) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, iv) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Note que estas matrizes são compostas de **blocos de Jordan** com autovalor $\lambda = -2$.

Para cada uma das matrizes A acima:

a) - Calcular $(A+2I)$, $(A+2I)^2$, $(A+2I)^3$ e $(A+2I)^4$.

b) - Calcular e^{At} usando o Teorema 8 do capítulo 4.

6) Para cada uma das matrizes A abaixo, calcule e^{At}

i) Calcule e^{At}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>Sugestão</u>: Usar a Transformada inversa de Laplace para achar e^{At}.

Solução:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}$$

Homework 05
(Função de matriz)

Felippe de Souza

ii) Calcule e^{At} para $t = 2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 & -3{,}5 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & -3{,}5 & -3 \end{bmatrix}$$

Sugestão: Usar a série de potências (Série de Taylor) para achar e^{At}, sendo $t = 2$.

Solução:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 54{,}59 & 0{,}0332 & -54{,}496 & 0 \\ 0 & 0{,}00357 & 0{,}0996 & 0 \\ 0 & 0{,}0332 & 0{,}1021 & 0 \\ 0 & -0{,}1046 & -0{,}294 & 0{,}0025 \end{bmatrix}$$

iii) Calcule e^{At} para $t = -1$.

$$A = \begin{bmatrix} -65 & -53 & -190 & -93 \\ 66 & 53 & 190 & 94 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sugestão: Usar a série de potências (Série de Taylor) para achar e^{At}, sendo $t = -1$.

Solução:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 4803{,}8 & 4218 & 19934{,}9 & 9845{,}3 \\ -5677{,}5 & -4981{,}2 & -23460 & -1158{,}7 \\ 150{,}6 & 130{,}6 & 592{,}5 & 291{,}2 \\ -174{,}1 & -150{,}6 & -682{,}9 & -334{,}8 \end{bmatrix}$$

Homework 05
(Função de matriz)

Felippe de Souza

iv)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -3 \end{bmatrix}$$

Sugestão: Usar o Teorema 2 (capítulo 4), isto é, $e^{At} = Me^{\hat{A}t}M^{-1}$. Observe que $\hat{A}$ (a forma canónica de Jordan) desta matriz já foi calculada no homework 4.

Solução:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & \dfrac{e^{-3t} - e^{-2t}}{2} & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

v)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 & -3{,}5 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & -3{,}5 & -3 \end{bmatrix}$$

Sugestão: Usar o Teorema 2 (capítulo 4), isto é, $e^{At} = Me^{\hat{A}t}M^{-1}$. Observe que $\hat{A}$ (a forma canónica de Jordan) desta matriz já foi calculada no homework 4.

Solução:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & \dfrac{e^{-t} - e^{-3t}}{4} & \dfrac{3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-3t}}{4} & 0 \\ 0 & \dfrac{e^{-t} + 3e^{-3t}}{4} & \dfrac{3e^{-t} - 3e^{-3t}}{4} & 0 \\ 0 & \dfrac{e^{-t} - e^{-3t}}{4} & \dfrac{3e^{-t} + e^{-3t}}{4} & 0 \\ 0 & \dfrac{3e^{-3t} - 3e^{-t} - 4te^{-3t}}{4} & \dfrac{9e^{-3t} - 9e^{-t} + 4te^{-3t}}{4} & e^{-3t} \end{bmatrix}$$