FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de Engenharia Electromecânica

Homework 04
(Diagonalização)

Felippe de Souza

1) Para cada um dos sistemas abaixo rescreve-lo de forma equivalente

com a matriz $\hat{A}$ na forma diagonal

ou, caso não seja possível,

com $\hat{A}$ na forma canónica de Jordan.

Ou seja, encontre $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\,\hat{x} + \hat{B}\,u \\ y = \hat{C}\,\hat{x} \end{cases}$$

i)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Solução: A é diagonalizável. Caso 2.
Forma canónica de Jordan terá 3 blocos (de dimensão 1 cada).

ii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Solução: A não é diagonalizável. Caso 3.
Forma canónica de Jordan terá 2 blocos (de dimensões 1 e 2).

Prof. Felippe de Souza

Homework 04
(Diagonalização)

Felippe de Souza

iii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 & -3{,}5 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & -3{,}5 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Solução: A não é diagonalizável. Caso 3.
Forma canónica de Jordan terá 3 blocos (de dimensões 1, 1 e 2).

iv)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -8 \\ 1 & -8 & 8 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Solução: A é diagonalizável. Caso 1.
Forma canónica de Jordan terá 3 blocos (de dimensão 1 cada).

v)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3{,}75 & -2{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -2{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}75 & 1{,}75 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Solução: A não é diagonalizável. Caso 3.
Forma canónica de Jordan terá 2 blocos (de dimensões 1 e 3).

Prof. Felippe de Souza

Homework 04
(Diagonalização)

Felippe de Souza

vi)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2{,}5 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & -3 & -0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 & -3{,}25 & 0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 0{,}75 & -3{,}25 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Solução: A não é diagonalizável. Caso 3.
Forma canónica de Jordan terá 2 blocos (de dimensão 2 cada).

vii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -65 & -53 & -190 & -93 \\ 66 & 53 & 190 & 94 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Solução: A não é diagonalizável. Caso 3.
Forma canónica de Jordan terá 1 bloco apenas (de dimensão 5).

viii)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -7 & 2 & -4 & 4 \\ 32 & -8 & 1 & -8 & 8 \\ -48 & 12 & -6 & 9 & -12 \\ -32 & 8 & -4 & 8 & -11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Solução: A é diagonalizável.
Forma canónica de Jordan terá 5 blocos de dimensão 1 cada.

Prof. Felippe de Souza

Homework 04
(Diagonalização)

Felippe de Souza

ix)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Solução: A é diagonalizável. Caso 2.
Forma canónica de Jordan terá 4 blocos (de dimensão 1 cada).

x)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Solução: A não é diagonalizável. Caso 3.
Forma canónica de Jordan terá 4 blocos (de dimensões 1, 1, 1 e 2).

xi)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & -1 & 1{,}5 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -3 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & -3{,}5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Solução: A não é diagonalizável. Caso 3.
Forma canónica de Jordan terá 2 blocos (de dimensões 3 e 2).

Prof. Felippe de Souza

FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de Engenharia Electromecânica

Homework 04
(Diagonalização)

Felippe de Souza

2) Considere a matriz A abaixo. Calcular

$\hat{A}$ = 'A na forma canónica de Jordan',

$\overline{A}$ = 'A na forma companheira' e

$\tilde{A}$ = 'A na forma dual da companheira'.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que, como A possui autovalores complexos, a matriz $\hat{A}$ (forma diagonal) possuirá elementos complexos, mas entretanto, tanto a matriz $\overline{A}$ (forma companheira) como a matriz $\tilde{A}$ (forma dual da companheira) isso não ocorrerá.

3) Considere a matriz A abaixo. Calcular

$\hat{A}$ = 'A na forma canónica de Jordan',

$\overline{A}$ = 'A na forma companheira' e

$\tilde{A}$ = 'A na forma dual da companheira'.

$$A = \begin{bmatrix} -3,75 & 5,5 & -4,25 \\ 4,5 & 2 & -2,5 \\ 2,25 & -0,5 & 1,75 \end{bmatrix}$$

Observe que tanto $\hat{A}$ (forma canónica de Jordan) como $\overline{A}$ (forma companheira) e $\tilde{A}$ (forma dual da companheira) possuem todos o mesmo número de elementos nulos (iguais a '**zero**').

Prof. Felippe de Souza