FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de
Engenharia Electromecânica

Homework 01
(Equações de estado)

Felippe de Souza

1) Considere o sistema descrito pela sua equação diferencial ordinária abaixo. Ache a FT (*Função de Transferência*). Escreva na forma de Equações de Estado $\dot{x} = A\,x + B\,u,\ y = C\,x + D\,u$. Verifique que a equação característica e os polos do sistema obtidos através da FT são os mesmos encontrados através da matriz A de estados.

$$y''' + 3y'' - 8y' + 10y = \ddot{u} - 4\dot{u} - 5u$$

2) Considere o sistema descrito pela sua equação diferencial ordinária abaixo. Ache a FT (*Função de Transferência*). Escreva na forma de Equações de Estado $\dot{x} = A\,x + B\,u,\ y = C\,x + D\,u$. Verifique que a equação característica e os polos do sistema obtidos através da FT são os mesmos encontrados através da matriz A de estados.

$$y''' + 3y'' - 8y' + 10y = -3\dddot{u} - 5\ddot{u} + 28\dot{u} - 22u$$

3) Para cada um dos sistemas descritos pela FT (*Função de Transferência*) $Y(s)/U(s)$ abaixo, encontre uma representação na forma de equações de estado $\dot{x} = A\,x + B\,u,\ y = C\,x + D\,u$.

a) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{4}{(s^2 + 2s + 2)}$

b) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{(s+1)}{(s^2 + 2s + 2)}$

c) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{2s(s+1)}{(s^2 + 8s + 15)}$

d) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{2s^2 - 3s}{(s^2 - 5s + 4)}$

e) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{(s+3)s}{(s+1)(s+2)}$

f) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{(4s - 5)}{2s^2}$

g) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{-4(s^2 - 3s - 3)}{(s^2 + 15s)}$

h) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^2}$

4) Para cada um dos sistemas descritos na forma de equações de estado abaixo, encontre a FT (*Função de Transferência*) $Y(s)/U(s)$ assim como os polos do sistema.

Homework 01
(Equações de estado)

Felippe de Souza

a) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \end{bmatrix} x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 17 & -21 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} x + u \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ -7 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x + 2u \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -36 & -36 & -11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 12 & 34 & 21 \\ -12 & -33 & -21 \\ 12 & 31 & 20 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$

Solução:

a) $\dfrac{2}{s^2+3s+8}$ b) $\dfrac{2}{s^2+5s+6}$ c) $\dfrac{s^2-9s+6}{s^2-5s-36}$

d) $\dfrac{2s+1}{s+1}$ e) $\dfrac{2}{s^3+11s^2+36s+36}$ f) $\dfrac{2}{s^3+s^2-9s+12}$

5) Para o sistema descrito pela FT (*Função de Transferência*) $Y(s)/U(s)$ abaixo verifique que nem todos os polos são reais.
Represente na forma de equações de estado $\dot{x} = A\,x + B\,u,\ \ y = C\,x + D\,u$ com a matriz A na "*forma companheira*".

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s^2+3s-2)}{(s^3+14s^2+74s+136)}$$

Homework 01
(Equações de estado)

Felippe de Souza

6) Considere o sistema abaixo descrito pelas suas equações de estado $\dot{\overline{x}} = \overline{A}\,\overline{x} + \overline{B}\,u$, e $y = \overline{C}\,\overline{x} + \overline{D}\,u$. Verifique que este sistema é o mesmo sistema do exercício 5 acima. Ou seja, trata-se de uma outra representação do mesmo sistema.

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -136 \\ 1 & 0 & -74 \\ 0 & 1 & -14 \end{bmatrix} \overline{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overline{x} \end{cases}$$

A matriz $\overline{A}$ deste sistema é dita estar na forma "*dual da companheira*". Note que $\overline{A}$ é a transposta da matriz A do sistema na forma "*companheira*" (exercício 5). Isto é, $\overline{A} = A^T$. Observe também que as matrizes $\overline{B}$ e $\overline{C}$ deste sistema são respetivamente as transpostas das matrizes C e B na forma "*companheira*". Ou seja: $\overline{B} = C^T$ e $\overline{C} = B^T$. Além disso, $\overline{D} = D$. Estas duas representações do mesmo sistema são ditas serem '*duais*' uma da outra.

7) Somente é possível representar um sistema na forma de equações de estado com a matriz A diagonal se os polos forem todos reais. Para o sistema descrito pela FT (*Função de Transferência*) $Y(s)/U(s)$ abaixo verifique que tem todos os polos reais. Represente na forma de equações de estado

a) $\dot{x} = A\,x + B\,u,\; y = C\,x + D\,u$ com a matriz A na "*forma companheira*";

b) $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\,\hat{x} + \hat{B}\,u,\; y = \hat{C}\,\hat{x} + \hat{D}\,u$ com a matriz $\hat{A}$ na "*forma diagonal*".

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+4)}{(s^3 + 3s^2 - s - 3)}$$

8) Considere novamente o sistema dos dois exercícios anteriores (i.e., exercícios 6 e 7 acima) representado nas formas "*companheira*" e "*dual da companheira*". Ache uma outra representação do sistema na forma de equação de estados $\dot{\overline{\overline{x}}} = \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{x}} + \overline{\overline{B}}\,u,\; y = \overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{x}} + \overline{\overline{D}}\,u$ fazendo uma mudança da variável de estado com a nova variável de estado $\overline{\overline{x}} = P\,x$, onde P é a matriz idem potente dada abaixo.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja, calcular as matrizes $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{C}}$ e $\overline{\overline{D}}$ da nova representação do sistema usando respetivamente $\overline{\overline{A}} = PAP^{-1}$, $\overline{\overline{B}} = PB$, $\overline{\overline{C}} = CP^{-1}$ e $\overline{\overline{D}} = D$, onde as matrizes A, B, C e D são as do sistema na "*forma companheira*".

Nota: Observe que a representação aqui obtida neste exercício é justamente a forma canónica do Matlab, ou seja, a forma com que o Matlab normalmente (por '*default*') representa sistemas quando calcula as equações de estado.

9) Represente o sistema descrito pela FT (*Função de Transferência*) abaixo na forma de equações de estado $\dot{x} = A\,x + B\,u,\;\; y = C\,x + D\,u$ com a matriz A na "*forma companheira*".

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s^3 + 2s^2 + 3s + 4)}{(s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 7s + 8)}$$

Mostre que as matrizes B e C são respetivamente:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

10) Considere o sistema representado na forma de equações de estado $\dot{\overline{x}} = \overline{A}\,\overline{x} + \overline{B}\,u$, $y = \overline{C}\,\overline{x} + \overline{D}\,u$ dado abaixo. Mostre que ele é o mesmo sistema do exercício 9 acima com uma representação diferente (a representação na forma "*dual da companheira*" $\overline{A} = A^T$, $\overline{B} = C^T$, $\overline{C} = B^T$ e $\overline{D} = D$).

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \overline{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overline{x} \end{cases}$$

11) As duas representações na forma de equações de estado dadas abaixo são do mesmo sistema. Achar os valores de a, b, α e β. Quais são os polos e zeros do sistema? Fazer uma simulação analógica do sistema.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha & (\alpha+7) \\ -\alpha & (\alpha-6) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} a & 2 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (\beta-14) & (\beta-1) \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & b \end{bmatrix} \bar{x} \end{cases}$$

Solução: $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $a = b = \dfrac{8}{17} = 0{,}47$.

12) Verificar se os 2 sistemas descritos pelas equações de estado dadas abaixo são o mesmo. Ou seja, verificar se as equações de estado dadas abaixo são 2 representações diferentes do mesmo sistema ou se são representações de 2 sistemas diferentes.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} + u \end{cases}$$

13) Considere o sistema cuja função de transferência $Y(s)/U(s)$ é dada abaixo. Achar uma representação qualquer na forma de equações de estado $\dot{x} = A\,x + B\,u$, $y = C\,x + D\,u$. Agora represente este sistema na forma de equações de estado $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\,\bar{x} + \bar{B}\,u$, $y = \bar{C}\,\bar{x} + \bar{D}\,u$ com a matriz $\bar{B}$ (dada abaixo).

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3\,s}{(s^2-1)} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

14) O sistema que possui a FT (*Função de Transferência*) $G(s)$ dada abaixo é o mesmo que o descrito pelas equações de estado $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = C\,x + D\,u$ também dadas abaixo. Achar os valores de α, β e γ.

$$G(s) = \frac{(s-2)}{(s^2 + \beta s + \gamma)}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Solução: $\alpha = -4,\ \beta = 5,\ \gamma = 4.$

15) O sistema que possui a FT (*Função de Transferência*) $G(s)$ dada abaixo é o mesmo que o descrito pelas equações de estado $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx + Du$ também dadas abaixo. Achar os valores de α e β. Encontrar uma outra representação deste sistema com $\overline{C}$ dado por $\overline{C} = [-1 \quad 1]$.

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + \alpha)}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Solução: $\alpha = 2,\ \beta = 1.$

16) O sistema descrito pelas equações de estado na forma companheira dado abaixo possui dois zeros localizados em $s = -2$ e $s = 4$. Além disso, um de seus polos é $s = -1$. Achar os valores de α, β, μ, λ e γ.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & \alpha & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Solução: $\alpha = 1,\ \beta = -8,\ \gamma = -2,\ \mu = 1.$

17) Considere o sistema descrito acima no exercício 16. Escrever uma representação deste sistema em equações de estado $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u,\ y = \hat{C}\hat{x}$ com a matriz $\hat{A}$ na forma diagonal.