FACULDADE ENGENHARIA

Análise de Sinais – Homework 09 (Transformadas de Fourier)

1) – Mostre que os sinais $x(t)$ abaixo têm as suas **transformadas de Fourier** $X(j\omega)$ correspondentes, também dada abaixo.

a) $x(t) = 1, \forall t$ $\qquad X(j\omega) = 2\pi\, u_o(\omega)$

b) $x(t) = e^{j\omega_o t}$ $\qquad X(j\omega) = 2\pi\, u_o(\omega - \omega_o)$

c) $x(t) = \text{sen}\,(\omega_o t)$ $\qquad X(j\omega) = \dfrac{\pi}{j}\left[u_o(\omega-\omega_o) - u_o(\omega+\omega_o)\right]$

(**sugestão**: usar os coeficientes c_k's da **série de Fourier** do seno para achar $X(j\omega)$, ou use a equação de Euler para expressar o seno e transforme).

d) $x(t) = \cos\,(\omega_o t)$ $\qquad X(j\omega) = \pi\left[u_o(\omega-\omega_o) + u_o(\omega+\omega_o)\right]$

(**sugestão**: usar a propriedade da derivada para **transformada de Fourier**, uma vez que a derivada do seno é o co-seno $\times$ frequência do mesmo).

e) $x(t) = \dfrac{\text{sen}\,(\omega_o t)}{\pi t}$ $\qquad X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| < \omega_o \\ 0, & \text{se } |\omega| > \omega_o \end{cases}$

(**sugestão**: usar a propriedade da dualidade para **transformadas de Fourier**).

f) $x(t) = u_o(t)$ $\qquad X(j\omega) = 1$

g) $x(t) = u_1(t)$ $\qquad X(j\omega) = \dfrac{1}{(j\cdot\omega)} + \pi u_o(\omega)$

(**sugestão**: usar a propriedade da integral para **transformadas de Fourier**, uma vez que a integral do sinal impulso é o sinal degrau).

h) $x(t) = u_o(t - t_o)$ $\qquad X(j\omega) = e^{j\omega t_o}$

(**sugestão**: usar a propriedade da dualidade para **transformadas de Fourier**).

2) – Usando a propriedade da conjugação da **transformadas de Fourier**:

$$\mathscr{F}\left\{x^*(t)\right\} = X^*(-j\omega),$$

mostre que: Se $x(t) \in \mathbb{R}, \forall t$ é ímpar, então:

$$X(j\omega) \in \text{eixo imaginário} \quad \text{e} \quad X(j\omega) = -X(-j\omega)$$

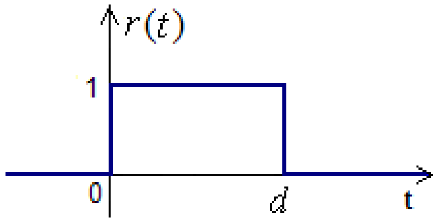
(ou seja, $X(j\omega)$, a **transformadas de Fourier** de $x(t)$, é imaginário puro e ímpar).

Análise de Sinais – Homework 09
(Transformadas de Fourier)

3) – O sinal $x(t)$ e a sua **transformadas de Fourier** $X(j\omega)$ são dados abaixo, onde o símbolo α^* significa o conjugado de α. Achar os valores das constantes *a*, *b*, *c* e *d*.

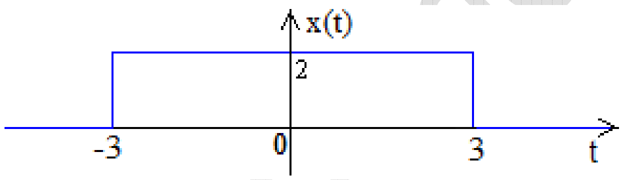
$$x(t) = a \text{ sen } (ct) + b \cos (ct) + r(t)$$

$$\alpha = 3 + 4j$$

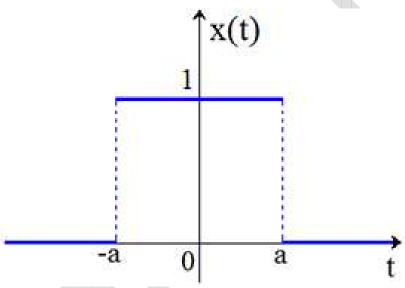


$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{e^{\omega j}}{j\omega} + \alpha \cdot \pi \cdot u_o(\omega - 5) + \alpha^* \cdot \pi \cdot u_o(\omega + 5)$$

4) – Ache a **transformada de Fourier** do sinal $x(t)$ dado abaixo. Depois disso, usando as propriedades das **transformadas de Fourier** (linearidade, sinal refletido ou "*time reversal*", etc.), ache as **transformadas de Fourier** dos sinais $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$.

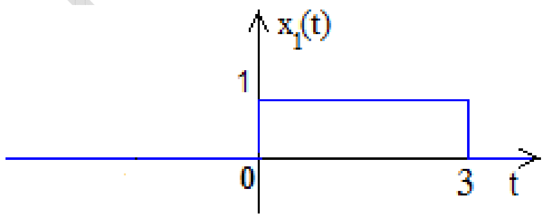


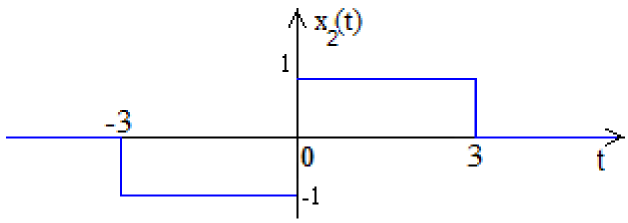
(**sugestão**: usar o resultado do Exemplo 8.3, i.e., a **transformadas de Fourier** de $x(t)$ abaixo é dada por $X(j\omega)$ também dada abaixo).



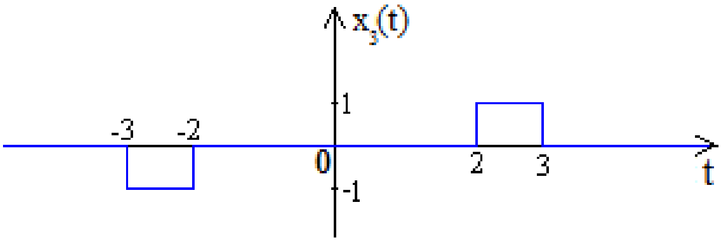
$$X(j\omega) = \frac{2 \text{ sen}(a\omega)}{\omega}$$

5) – Ache as **transformadas de Fourier** dos sinais $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ abaixo.





Análise de Sinais - Homework 09 (Transformadas de Fourier)

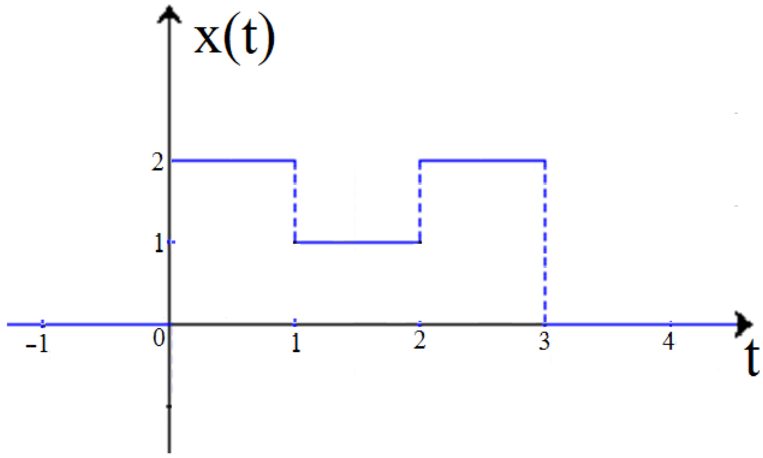


(**sugestão**: novamente aqui, como no exercício anterior, usar o resultado do Exemplo 8.3 e as propriedades da transformada de Fourier da linearidade, translação no tempo ou '*time shifting*', sinal refletido ou '*time reversal*', etc.).

6) – Ache a transformada de Fourier do sinal $x(t)$ dado abaixo.
Depois disso, usando as propriedades da transformada de Fourier, ache uma relação entre $x(t)$ e os sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ cujas as transformadas de Fourier $X_1(j\omega)$ e $X_2(j\omega)$ são dadas abaixo. Ou seja, expressar $x(t)$ em termos dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

$$X_1(j\omega) = \frac{e^{-j\frac{3\omega}{2}}}{\omega} \cdot \left(\operatorname{sen}\frac{3\omega}{2}\right)$$

$$X_2(j\omega) = -\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}}{\omega} \cdot \left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)$$



Solução : $x(t) = 2\, x_1(t) - x_2(t-1)$.

7) – Considere o sinal $x(t)$ cuja transformada de Fourier $X(j\omega)$ é dada por:

$$X(j\omega) = \begin{cases} \sqrt{\pi}\,, & \text{se } 1 < |\omega| < \frac{1}{2} \\ \sqrt{\pi}/2\,, & \text{se } |\omega| \le \frac{1}{2} \\ 0\,, & \text{se } \omega \notin \{-1, 1\} \end{cases}$$

Calcular a energia E deste sinal

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt$$

e $y(0)$, onde $y(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.

Análise de Sinais – Homework 09
(Transformadas de Fourier)

8) – Calcular a **transformada de Fourier** $X(j\omega)$ do sinal periódico $x(t)$ dado abaixo Observe que esta **transformada** será uma cadeia de impulsos (ou '*train of impulses*'). Esboce o diagrama de módulo e de fase de $X(j\omega)$.

$$x(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } -1 < t \leq 0 \\ 1, & \text{se } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

9) – A derivada $y(t)$ de um sinal periódico $x(t)$ tem a sua **transformada de Fourier** $Y(j\omega)$ dada pela cadeia de impulsos (ou "*train of impulses*") abaixo. Ache a expressão do sinal $x(t)$.

$$Y(j\omega) = \frac{\pi}{2j} \cdot \left[u_o(\omega - 1) - u_o(\omega + 1) \right]$$

10) – O sinal $x(t)$ é periódico com frequência fundamental $\omega_o = 1$ e tem os coeficientes da série de Fourier complexa dados por c_k abaixo. Além disso, $y(t)$ é o sinal $x(t)$ transladado de a para direita, isto é, $y(t) = x(t–a)$.
Achar a **transformada de Fourier** $Y(j\omega)$ de $y(t)$.

$$c_o = 0{,}5 \quad , \quad c_k = \frac{2}{3 \cdot k}, \quad k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots \quad , \quad c_k = 0, \quad k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots$$

11) – $x(t)$ é um sinal é periódico com frequência fundamental $\omega_o = 1$ e tem os coeficientes da **série de Fourier** complexa dados por c_k abaixo. Por outro lado, $y(t)$ é um sinal dado pela expressão abaixo assim como a sua **transformada de Fourier** $Y(\omega)$.

$$c_{-1} = 2, \qquad c_1 = -2, \qquad c_{-2} = c_2 = 0{,}5 \qquad \text{e} \qquad c_k = 0, \forall\, k \notin \{-2, -1, 1, 2\}$$

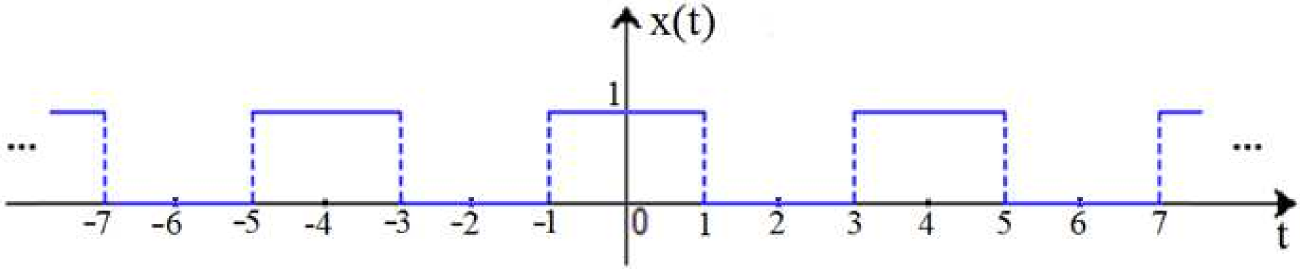
$$y(t) = \frac{x(t - \pi)}{2\pi}$$

$$Y(j\omega) = \alpha u_o(\omega + 2) + \beta u_o(\omega + 1) + \gamma u_o(\omega) + \lambda u_o(\omega - 1) + \rho u_o(\omega - 2)$$

Ache os valores de α, β, γ, λ e ρ.

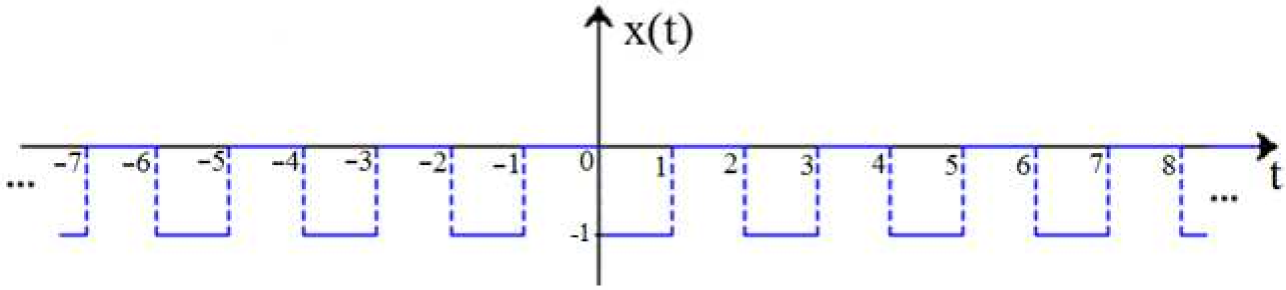
12) – Achar a **transformada de Fourier** $X(j\omega)$ do sinal periódico $x(t)$ dado pelo gráfico abaixo. Observe que $X(j\omega)$ será uma cadeia de impulsos (ou '*train of impulses*'). Esboçar o diagrama de módulo de $X(j\omega)$.
Note que $X(j\omega) \in \mathbb{R}$, logo, não é necessário dois diagramas: um de módulo e outro de fase. Um diagrama será o suficiente.

Análise de Sinais – Homework 09 (Transformadas de Fourier)



Obs.: A série de Fourier deste sinal periódico $x(t)$ foi calculada no exercício 7 (b) do Homework 7 (Séries de Fourier Contínuas).

13) – Achar a transformada de Fourier $X(j\omega)$ do sinal periódico $x(t)$ dado pelo gráfico abaixo (cadeia de impulsos, ou '*train of impulses*').
Esboçar os diagramas de módulo $|X(j\omega)|$ e de fase $\angle X(j\omega)$ de $X(j\omega)$.



Obs.: A série de Fourier deste sinal periódico x(t) foi calculada no exercício 7 (a) do Homework 7 (Séries de Fourier Contínuas).

14) – A derivada $y(t)$ de um sinal periódico $x(t)$ tem a sua transformada de Fourier $Y(j\omega)$ dada abaixo (cadeia de impulsos, ou '*train of impulses*').
Ache a expressão do sinal $x(t)$.

$$Y(j\omega) = \frac{\pi}{2j} \cdot \left[\, u_o(\omega - 1) - u_o(\omega + 1) \,\right]$$

15) – O sinal $x(t)$ é a derivada de $y(t)$ que é um sinal periódico e tem a sua transformada de Fourier $Y(j\omega)$ dada abaixo (cadeia de impulsos, ou '*train of impulses*').
Ache a expressão do sinal $x(t)$.

$$Y(j\omega) = 2\pi(1+2j) \cdot u_o(\omega+3) + 2\pi(1+2j) \cdot u_o(\omega-3)$$