



CNPq

CONSELHO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO

2º PERÍODO LETIVO

DESCRIÇÃO

Teoria de Controle

Bibliografia

KHALIL, H. *Linear optimal control systems*. New York, N.Y., Wiley Interscience, 1972.

SCHULTZ, D.G.; WELSH, J.L. *Control systems and linear control systems*. New York, Wiley, 1967.

J. A. M. FELIPPE DE SOUZA



INPE - INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS

SEDE - SÃO JOSÉ DOS CAMPOS - SP - AV. DOS ASTRONAUTAS Nº 1758 - CX. POSTAL 515 - FONE (0123) 299977 - TELEX (011) 33530 - CEP 12.200
CACHOEIRA PAULISTA - SP - ROD. PRES. DUTRA, Km 40,0 - CX. POSTAL 01 - FONE (0125) 611377 - TELEX (0122) 160 - CEP 12.630
CUIABÁ - MT - MORRO DA CONCEIÇÃO S/N - CX. POSTAL 714 - FONE (065) 321-9514 - TELEX (0652) 114 - CEP 78.000
NATAL - RN - AV. SALGADO FILHO Nº 3000 - CX. POSTAL 130 - FONE (084) 231-4733 - TELEX (0842) 185 - CEP 59.000
FORTALEZA - CE - DISTRITO DE EUZÉBIO - CX. POSTAL 1281 - FONE (085) 224-4966 - CEP 60.000
SÃO PAULO - SP - RUA TRAIPIU - Nº 423 - FONE (011) 87-2747 - TELEX (011) 34061 - CEP 01235

TEORIA DE CONTROLE

1. INTRODUÇÃO

A ideia de sistemas é quase que intuitiva. Exemplos de sistemas físicos são: o corpo humano, um carro se locomovendo, um elevador, um relógio em funcionamento, um foguete em direção a lua, um processo químico, etc.

Portanto, uma primeira classificação de sistema pode ser quanto a sua natureza: mecânica, elétrica, eletro-mecânica, biológica, econômica, sociológica, etc.

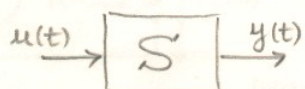
Modelo é uma idealização de um sistema físico obtido através de um estudo analítico deste. Um aparelho de rádio pode ser visto como sendo um sistema físico e o diagrama de circuitos no seu manual como sendo o seu modelo. Modelagem é um problema importante porque o sucesso de um projeto depende de uma boa modelagem do sistema físico.

Sem sombra de dúvida a maior classe de modelos matemáticos são aqueles descritos por equações diferenciais (ordinárias ou parciais). Existem no entanto outros tipos de modelos descritos por equações de diferenças, equações com retardo, etc.

É comum na prática identificar os termos "sistema" = "modelo do sistema". Portanto, fala-se comumente: "este sistema", quando na realidade estamos nos referindo às equações que descrevem o sistema.

O problema de controle surge quando se deseja atingir uma meta com determinado sistema (modelo).

Geralmente um sistema apresenta "entrada" e "saída".



A entrada, também chamada de "controle" (pois é a variável que dispomos para controlar o sistema) é normalmente representada por $u(t)$. Ela é uma função do tempo, não necessariamente unidimensional. Isto é, podem haver mais de uma entrada e isto é representado por um vetor

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m \quad \text{p/ cada } t$$
onde m é o número de entradas.

A saída, também chamada de resposta ou observação do sistema é normalmente representado por $y(t)$. Ela é uma função do tempo, não necessariamente unidimensional. Por exemplo, no

caso de haverem q saídas, $y(t)$ é o vetor

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)) \in \mathbb{R}^q \quad \text{p/cada } t.$$

Nos casos que serão estudados neste curso $u(t)$ e $y(t)$ serão funções contínuas definidas num intervalo $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$ onde

t_0 = instante inicial e
 t_f = instante final.

No entanto existem sistemas onde estas funções $u(t)$ e $y(t)$ não são contínuas, como é o caso de sistemas discretos ilustrado no exemplo 1.6.

Numa formulação mais geral de sistemas nós temos

$$u(t) \in U \quad \text{e} \quad y(t) \in Y$$

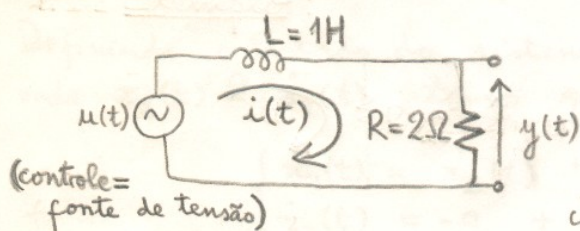
onde U = espaço de entrada e Y = espaço de saída. O caso que trataremos neste curso, como foi mostrado acima, é quando

$$U = \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad Y = \mathbb{R}^q.$$

Entretanto nos exemplos 1.7, 1.8 e 1.9 nós ilustramos o caso onde U e/ou Y serão espaços de funções.

A Teoria de Controle estuda as funções $u(t)$ que levam o sistema de um "estado" inicial no tempo t_0 para um "estado" final desejado no tempo t_f . Com isso surge o conceito de "estado" que será melhor definido mais adiante. No momento apenas ilustraremos este conceito com alguns exemplos:

1.1- Circuito Elétrico:



A equação que descreve este circuito é:

$$\frac{di(t)}{dt} + 2i(t) = u(t)$$

com condição inicial dada por

$$i(t_0) = i_0$$

Defina o estado $x(t)$ do sistema como sendo a corrente $i(t)$,
 $x(t) = i(t)$

e portanto,

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t), \quad x(t_0) = i_0 \quad (1)$$

A saída deste sistema é a diferença de tensão indicada na figura, isto é

$$y(t) = +2x(t)$$

O problema de controle seria determinar que funções $u(t)$ aplicar na fonte de tensão (entrada do sistema) para conduzir este sistema de um estado inicial x_0 no instante t_0 para um estado final $x(t_f)$ desejado para o tempo t_f .

Neste exemplo

$$x(t) \in \mathbb{R}^1 \quad \text{p/ cada } t,$$

e portanto diz-se que o espaço de estado é de dimensão 1.

1.2 - Foguete lançado verticalmente:



Para simplificar vamos supor que o foguete tem massa unitária e a ausência de forças aerodinâmicas.

A equação que descreve este sistema é:

$$\ddot{x}_1(t) = u(t) - g$$

onde:

$x_1(t)$ = altura vertical,

$u(t)$ = empuxo (força/unidade de massa) aplicado no foguete,

g = aceleração gravitacional.

A solução desta equação depende das condições iniciais

$x_1(t_0) = x_{10}$ = altura no instante t_0 e

$\dot{x}_1(t_0) = x_{20}$ = velocidade no instante t_0 .

Por exemplo, se no instante t_0 o foguete estiver ainda parado no solo então

$$x_1(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}_1(t_0) = 0. \quad (2)$$

Definindo o estado do sistema como sendo $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ onde $x_2(t) \triangleq \dot{x}_1(t)$, temos que

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g + u(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{matrix} \quad (3)$$

e a equação diferencial do 2º grau acima foi reduzida a um sistema de 2 equações do 1º grau. Da mesma forma que no exemplo anterior, escreveremos o estado na forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

onde $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$.

Note que o estado do sistema $x(t)$, como foi definido acima, é o par posição-velocidade no instante t . Como $x(t) \in \mathbb{R}^2$, p/ cada t , a dimensão do espaço de estado é 2.

O problema de controle estuda as funções $u(t)$ que devemos aplicar para levar o sistema de um estado (i.e., de uma determinada posição e velocidade) no instante t_0 para outro estado (i.e., outra posição e velocidade) pre-estabelecido, no instante final t_f .

A saída (observação) deste sistema pode ser, por exemplo, a própria altura $x_1(t)$, e portanto

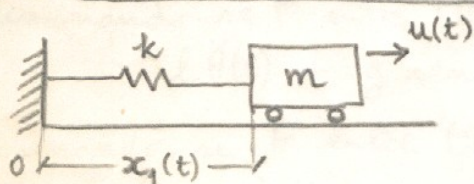
$$y(t) = x_1(t) = \underbrace{[1 \ 0]}_C x(t)$$

que tem a forma

$$y(t) = C x(t).$$

(5)

1.3 - Sistema Massa-Mola:



A equação que descreve o sistema ao lado é:

$$m \ddot{x}_1(t) = -k x_1(t) + u(t)$$

onde

$x_1(t)$ = posição do carro no instante t

k = constante de elasticidade da mola

$u(t)$ = força aplicada

As condições iniciais são $x_1(t_0) = x_{10}$ e $\dot{x}_1(t_0) = x_{20}$ (posição e velocidade do carro no instante t_0).

Definindo-se $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ = velocidade no instante t , temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) & x_1(t_0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m} x_1(t) + \frac{1}{m} u(t) & x_2(t_0) &= x_{20} \end{aligned} \quad (6)$$

que está novamente na forma (4). Como (6) é linear, o que não ocorria com (1.3), podemos reescrevê-las como

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (7)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

Ou seja, se (4) for linear então pode ser reescrito na forma matricial (7).

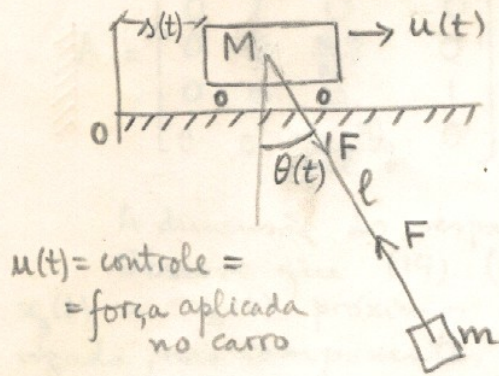
Como $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ a dimensão do espaço de estado é 2.

A saída do sistema pode ser, por exemplo

$$y(t) = x_1(t) = \underbrace{[1 \ 0]}_C x(t). \quad (8)$$

que tem a forma (5).

1.4 - Sistema Carro com Pêndulo:



As equações que descrevem este sistema são:

$$M\ddot{s}(t) = u(t) + F \sin \theta(t) \quad (9)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (s + l \sin \theta(t)) = -F \sin \theta(t) \quad (10)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta(t)) = -F \cos \theta(t) + mg \quad (11)$$

Eliminando-se F entre (10) e (11) temos

$$l\ddot{\theta}(t) + g \sin \theta(t) + \dot{s}(t) \cos \theta(t) = 0 \quad (12)$$

Eliminando-se F entre (9) e (10) temos

$$u(t) = (M+m)\ddot{s}(t) + ml\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - ml\dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t). \quad (13)$$

Portanto temos 2 equações diferenciais ordinárias (não lineares).
As condições iniciais são:

$s(t_0) = s_{10} = \text{deslocamento do carro no instante } t_0,$

$\dot{s}(t_0) = s_{20} = \text{velocidade do carro no instante } t_0,$

$\theta(t_0) = \theta_{10} = \text{ângulo do pêndulo com a vertical no instante } t_0 \text{ e}$

$\dot{\theta}(t_0) = \theta_{20} = \text{velocidade angular do pêndulo no instante } t_0.$

Definindo-se o estado $x(t) = (s(t), \dot{s}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t))$ pode-se facilmente escrever (12) e (13) na forma (4). No entanto nós vamos aproximar (12) e (13) por um sistema linear para podermos escrever o sistema na forma matricial (7).

Assumindo-se $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ pequenos (isto é, pequenos ângulos e pequenas velocidades angulares) podemos desprezar os termos não lineares dessas variáveis obtendo-se

$$\left. \begin{aligned} (M+m)\ddot{s}(t) + ml\ddot{\theta}(t) &= u(t) \\ \dot{s}(t) + l\ddot{\theta}(t) + g\theta(t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ou

$$\left. \begin{aligned} Ml\ddot{\theta}(t) + (m+M)g\theta(t) &= -u(t) = 0 \\ M\ddot{s}(t) - mg\theta(t) &= u(t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Com a definição de estado acima obtém-se

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (15)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{m+M}{Ml} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(m+M)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/Ml \end{bmatrix} \quad e \quad x_0 = \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \theta_{10} \\ \theta_{20} \end{bmatrix}$$

A dimensão do espaço de estado é 4.

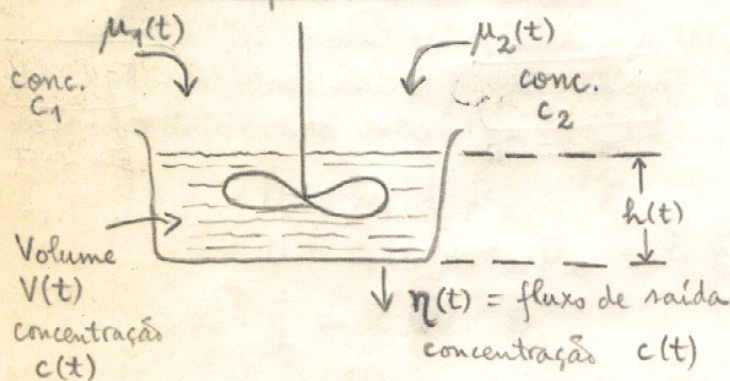
Observe que (14) (ou (15)) só é válido para valores de $x_3(t)$ e $x_4(t)$ próximos de zero. Isto é, este sistema foi linearizado, nas componentes x_3 e x_4 , em torno de zero.

Suponha que pode-se medir s (deslocamento do carro) e θ (ângulo do pêndulo) a cada instante t , mas não $\dot{s}$ ou $\dot{\theta}$. A saída $y(t)$ é portanto,

$$y(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t) \quad (16)$$

ou seja, na forma (5).

1.5. Um Tanque de Mistura:



Este tanque mistura 2 líquidos 1 (de concentração c_1 constante) com o líquido 2 (de concentração c_2 constante).

$\mu_i(t)$ = fluxo (em m^3/s) do líquido i no instante t , $i=1,2$

$c(t)$ = concentração do líquido no tanque = concentração do líquido na saída.

$V(t)$ = volume do líquido no tanque = $S \cdot h(t)$

$h(t)$ = altura do líquido do tanque.

S = área seccional do tanque.

Este sistema é descrito por

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = \mu_1(t) + \mu_2(t) - \eta(t) \\ \frac{d}{dt} [c(t)V(t)] = c_1\mu_1(t) + c_2\mu_2(t) - c(t)\eta(t) \end{cases} \quad (17)$$

O fluxo de saída $\eta(t)$ pode ser expresso como

$$\eta(t) = k \sqrt{h(t)} = k \sqrt{V(t)/S}$$

onde k é uma constante experimental. Portanto, (17) torna-se

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = -k \sqrt{V(t)/S} + \mu_1(t) + \mu_2(t) \\ \frac{d}{dt}[c(t)V(t)] = -c(t)k \sqrt{V(t)/S} + c_1\mu_1(t) + c_2\mu_2(t) \end{cases} \quad (18)$$

Neste ponto nós poderíamos definir o estado $x(t)$ e a entrada $u(t)$ como

$$\begin{aligned} x(t) &= (V(t), c(t)) \in \mathbb{R}^n, \quad n=2 \\ u(t) &= (\mu_1(t), \mu_2(t)) \in \mathbb{R}^m, \quad m=2. \end{aligned}$$

e escrever este sistema na forma (4), isto é, $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$. No entanto, semelhantemente ao exemplo anterior, nós iremos linearizar as equações em (18) acima e escrevermos o sistema na forma matricial (7), isto é, $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$.

No exemplo anterior o sistema foi linearizado com relação a duas componentes do estado, em torno de zero. Aqui nós iremos linearizar (18) com relação a $\mu_1(t), \mu_2(t), \eta(t), V(t)$ e $c(t)$ em torno dos valores nominais: $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\eta}, \bar{V}$ e $\bar{c}$ do sistema em regime estacionário onde estas quantidades são constantes e satisfazem

$$\begin{cases} 0 = \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 - \bar{\eta} \\ 0 = c_1\bar{\mu}_1 + c_2\bar{\mu}_2 - \bar{c}\bar{\eta} \\ \bar{\eta} = k \sqrt{\bar{V}/S} \end{cases} \quad (19)$$

Dado $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ (fluxo estacionário de entrada) estas equações podem ser resolvidas para $\bar{\eta}, \bar{V}$ e $\bar{c}$. Agora vamos assumir que apenas pequenas variações do regime estacionário e definir o estado $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, a entrada $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ e a saída $y(t)$ são exatamente estas variações, do regime estacionário, isto é,

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \bar{\mu}_1 + u_1(t) \\ \mu_2(t) &= \bar{\mu}_2 + u_2(t) \\ V(t) &= \bar{V} + x_1(t) \\ c(t) &= \bar{c} + x_2(t) \\ \eta(t) &= \bar{\eta} + y_1(t) \end{aligned}$$

LINEARIZAÇÃO DAS EQS (17)

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \mu_1(t) + \mu_2(t) - \eta(t) \\ \frac{d}{dt}[c(t)V(t)] = c_1\mu_1(t) + c_2\mu_2(t) - c(t)\eta(t) \end{cases} \quad (17)$$

Usando $\eta(t) = k\sqrt{h(t)} = k\sqrt{\frac{V(t)}{S}}$, temos:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -k\sqrt{\frac{V(t)}{S}} + \mu_1(t) + \mu_2(t) \\ \frac{d}{dt}[c(t)V(t)] = -c(t)k\sqrt{\frac{V(t)}{S}} + c_1\mu_1(t) + c_2\mu_2(t) \end{cases} \quad (18)$$

Substituindo -x $\begin{cases} V(t) = \bar{V} + x_1(t) \\ \mu_1(t) = \bar{\mu}_1 + u_1(t) \\ \mu_2(t) = \bar{\mu}_2 + u_2(t) \end{cases}$ na 1ª equação, temos:

$$\dot{x}_1(t) = -k\sqrt{\frac{\bar{V} + x_1(t)}{S}} + \bar{\mu}_1 + u_1(t) + \bar{\mu}_2 + u_2(t)$$

Usando a 1ª equação estática (19) $\boxed{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 - \bar{\eta} = 0}$, temos

$$\dot{x}_1(t) = -k\sqrt{\frac{\bar{V} + x_1(t)}{S}} + \bar{\eta} + u_1(t) + u_2(t)$$

Usando agora a 3ª equação estática (19) $\boxed{\bar{\eta} = k\sqrt{\frac{\bar{V}}{S}}}$, temos

$$\dot{x}_1 = -k\sqrt{\frac{\bar{V} + x_1(t)}{S}} + k\sqrt{\frac{\bar{V}}{S}} + u_1(t) + u_2(t)$$

$$= -\frac{k}{\sqrt{S}}(\sqrt{\bar{V} + x_1} - \sqrt{\bar{V}}) + u_1(t) + u_2(t)$$

$$= -\frac{k}{\sqrt{S}} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{\bar{V}}}{2\bar{V}}\right)}_{\approx 1} \cdot (2\sqrt{\bar{V}}) \cdot (\sqrt{\bar{V} + x_1(t)} - \sqrt{\bar{V}}) + u_1(t) + u_2(t)$$

$$= -\frac{k}{2\bar{V}} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{\bar{V}}}{\sqrt{S}}\right)}_{\approx x_1(t)} (2\sqrt{\bar{V}}\sqrt{\bar{V} + x_1(t)} - 2\bar{V}) + u_1(t) + u_2(t)$$

(Ver no verso da pág. 8)

que é a Eq. (20a) ↗

$$\dot{x}_1(t) = -\left[\frac{k}{2\bar{V}} \sqrt{\bar{V}/S}\right] x_1(t) + u_1(t) + u_2(t) \quad (20a)$$

$$\dot{x}_2(t) \bar{V} + \bar{c} \dot{x}_1(t) = -\left[\bar{c} \frac{k}{2\bar{V}} \sqrt{\bar{V}/S}\right] x_1(t) - (k \sqrt{\bar{V}/S}) x_2(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

Usando a terceira equação em (19) obtemos

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{2} (\bar{\eta}/\bar{V}) x_1(t) + u_1(t) + u_2(t) \quad (20)$$

$$\dot{x}_2(t) \bar{V} + \bar{c} \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{2} \bar{c} (\bar{\eta}/\bar{V}) x_1(t) - \bar{\eta} x_2(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

Defina $\theta \triangleq \frac{\bar{V}}{\bar{\eta}} = \text{tempo p/ esvaziar o tanque c/ volume } \bar{V} \text{ e fluxo saída } \bar{\eta}$

e elimine $\dot{x}_1(t)$ da segunda equação de (20) acima, então

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{2\theta} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\theta} \end{bmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c_1 - \bar{c}}{\bar{V}} & \frac{c_2 - \bar{c}}{\bar{V}} \end{bmatrix}}_B \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (21)$$

ou seja, $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$.

As condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned} x_1(0) &= V(0) - \bar{V} \\ x_2(0) &= c(0) - \bar{c} \end{aligned}$$

A saída completa é $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ onde $y_1(t)$ já foi definido acima e $y_2(t) = x_2(t)$. Isto é, ao invés de considerarmos a saída como sendo o fluxo de saída $\eta(t)$ e a concentração $c(t)$, nós tomamos as variações de $\eta(t)$ e $c(t)$ com respeito aos valores nominais $\bar{\eta}$ e $\bar{c}$. Portanto,

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C x(t) = Cx(t) \quad (22)$$

1.6 - Modelo Econômico:

Seja, Y_n = produto nacional bruto (PNB) no ano n ;
 C_n = gastos em bens de consumo no ano n (representa cerca de $\frac{2}{3}$ PNB de um país);
 I_n = investimentos no ano n ;
 G_n = gastos (ou despesas) governamentais = controle

- transformações similares: $T: V \rightarrow V$ é similar a $S: V \rightarrow V$ se $\exists M: V \rightarrow V$ inversível tal que $S = M^{-1}TM$.

- Teor. 7 - As matrizes que representam um operador em bases diferentes são similares.

- Teor. 8 - $[TP]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\beta}^{\beta} [P]_{\beta}^{\beta}$

- Teor. 9 - Seja $T: V \rightarrow V'$ uma transf. linear, então: $\dim V = \rho(T) + \dim(\ker(T))$.

- injeção: T é injetora se $Tv_1 = Tv_2 \Rightarrow v_1 = v_2$

- sobrejeção: $T: V \rightarrow V'$ é sobrejetora se $\forall v' \in V', \exists v \in V$ tal que $Tv = v'$.

- bijeção: T é bijetora se T é injetora e sobrejetora.

- Teor. 10 - T é injetora se e somente se $\ker(T) = \{0\}$.

- determinante de uma matriz - $\det(T)$

- Teor. 11 - $\det(TP) = \det(T) \cdot \det(P)$; $\det(I) = 1$;

Se T é inversível $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$;

Se T não é inversível $\det(T) = 0$;

Se T e S são similares $\det(T) = \det(S)$.

- autovalores e autovetores: Seja $T: V \rightarrow V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$, $v \neq 0$.

Se $Tv = \lambda v$, então λ é autovalor e v é autovetor (associado a λ).

- espectro de T : $\sigma(T)$ = conjunto de autovalores de T .

- polinômio característico de T : $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - T) = \det(T - \lambda I)$.

- Teor. 12: Seja $T: V \rightarrow V$ operador linear. As 3 afirmações são equivalentes:

i) $\lambda \in \sigma(T)$, i.e., λ é autovalor de T ;

ii) $(T - \lambda I)$ não é inversível ;

iii) $\Delta(\lambda) = 0$, i.e., λ é raiz do polinômio característico.

- Teor. 13. Dois operadores similares possuem o mesmo polinômio característico.

- operador diagonalizável: se $\exists$ operador similar que é representado por matriz diagonal.

- multiplicidade de um autovalor: é a sua multiplicidade como raiz de $\Delta(\lambda)$.

- Teor. 14. Autovalores distintos possuem autovetores associados L.I.

2.2 - Forma Canônica de Jordan

Um operador $T: V \rightarrow V$ pode ser não-diagonalizável por 2 razões:

i) deficiência do corpo $\mathbb{K}$ (autovalores complexos e corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

ii) deficiência no operador (autovalores múltiplos sem autovetores em número suficiente).

Considerando-se o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ evita-se o primeiro tipo de deficiência. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\dim V = n$, então $T: V \rightarrow V$ possuirá n autovalores, podendo alguns serem repetidos (isto é, múltiplos).

CASO 1 - T tem n autovalores distintos: $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

Neste caso os auto-vetores associados $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formam uma base de V ,

$\hat{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ é a representação de T nesta base e

$\hat{T} = M^{-1}TM$ onde $M = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$ autovetores associados:

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 1$ autovetores: $(A - \lambda_1 I)v = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ é sol.
 $(A - \lambda_2 I)v = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ é sol.

$\hat{A} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ é a representação de A na base $\{v_1, v_2\}$ e $\hat{A} = M^{-1}AM$ onde $M = [v_1 | v_2]$.

Assume-se que: o PNB é a soma dos gastos em bem de consumo, investimentos e despesas governamentais, isto é,

$$Y_n = C_n + I_n + G_n.$$

Além disso, os gastos em bem de consumo em um ano só depende do PNB do ano anterior, isto é, $C_n = f(Y_{n-1})$

e finalmente, os investimentos no ano n depende apenas no crescimento dos bens de consumo do ano $(n-1)$ p/o ano n , i.e., $I_n = g(C_n - C_{n-1})$.

Portanto,

$$Y_n = f(Y_{n-1}) + g(f(Y_{n-1}) - f(Y_{n-2})) + G_n \quad (23)$$

ou seja, a descrição do modelo é uma equação de diferenças não-linear de segunda ordem. Suponha que p/ $\bar{G}_n, n=1,2,\dots,N$, $\bar{Y}$ satisfaz (23), então $\bar{Y}$ e $\bar{G}_n$ podem ser considerados como um regime estacionário. Nós definiremos as variáveis de estado e de controle como perturbações ao regime estacionário p/ obter um modelo linearizado. Seja y_n e u_n tais que:

$$Y_n = \bar{Y} + y_n \quad \text{e} \quad G_n = \bar{G}_n + u_n$$

então (23) linearizado torna-se

$$y_n = \alpha y_{n-1} + \beta \alpha (y_{n-1} - y_{n-2}) + u_n$$

onde α e β são constantes relacionadas c/ a tendência do consumo.

Introduzindo $x_n = (y_{n-1} \quad y_n)^T = (x_{n1} \quad x_{n2})^T \in \mathbb{R}^2$ p/cada n , temos

$$\begin{cases} x_{n1+1} = x_{n2} \\ x_{n2+1} = \alpha x_{n2} + \beta \alpha (x_{n2} - x_{n1}) + u_{n+1} \end{cases}$$

ou seja,

$$x_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta \alpha & \alpha(1+\beta) \end{bmatrix}}_A x_n + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u_{n+1}.$$

Este é um exemplo onde o estado $x(t)$ (e o controle $u(t)$) não é definido num intervalo $[t_0, t_f]$ mas sim no conjunto $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$. Para simplificar denota-se $x_n = x(t_n)$ (e $u_n = u(t_n)$). Estes sistemas são chamados de "discretos".

1.7. Barra de Metal no Forno:

Uma barra de comprimento l é aquecida por jatos cuja distribuição $b(x)$ é fixa mas a magnitude pode ser variada com o controle $u(t)$. O modelo é descrito por:

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} + b(x)u(t) \quad (\text{equação de calor})$$

onde $\theta(x,t)$ = temperatura no ponto x da barra no instante t
 α = condutividade térmica

Suponha que as condições iniciais (distr. de temp. no instante t_0) e as condições de fronteira (temp. nos extremos da barra) sejam dadas por

$$\theta(0,t) = \theta(l,t) = 0,$$

$$\theta(x,t_0) = \theta_0(x) = \text{função (em } x) \text{ conhecida.}$$

Assume-se que é possível medir a temp. a cada instante através de uma média ponderada em pontos nas proximidades. Sendo assim, a observação $y(t)$ é

$$y(t) = \int_0^l c(x) \theta(x,t) dx$$

onde $c(x)$ é conhecido.

Este sistema apresenta apenas uma entrada $u(t) \in \mathbb{R}^1$ e uma saída $y(t) \in \mathbb{R}^1$. No entanto, o estado do sistema no instante t , $\theta(\cdot, t)$ não pode ser descrito com um número finito de reais. Isto é $\theta(\cdot, t) \notin \mathbb{R}^n$ p/ nenhum n . Este é um exemplo de sistema cujo espaço de estado tem dimensão infinita. Na verdade aqui o espaço de estado é um espaço de funções, (e.g., $L^2(0, l)$). Ele pode ser re-escrito c/ a estrutura básica

$$\begin{cases} \dot{\theta}(\cdot, t) = A \theta(\cdot, t) + B u(t) \\ y(t) = C \theta(\cdot, t) \end{cases}$$

onde A é o operador $\partial^2/\partial x^2$, $Bu(t) = b(x)u(t)$ e $C\theta(\cdot, t) = \langle c(\cdot), \theta(\cdot, t) \rangle_{L^2}$.

1.8. Corda não-uniforme esticada:

Outro exemplo de sistema c/ espaço de estado de dimensão infinita é a corda da figura c/ distribuição de densidade $\rho(x)$ ao longo dela e o controle é uma força $u(t)$ aplicada em uma das extremidades conforme indicado na figura. Este modelo é descrito por:

(Equação de onda) $\rho(x) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(x) \frac{\partial z(x,t)}{\partial x}) = 0$, $z(0,t) = 0$, $z(l,t) = u(t)$.

onde $\alpha(x)$ é um parâmetro relacionado c/ a tensão da corda.

Sistemas cuja espaço de estado tem dimensão infinita são geralmente chamados de sistemas de parâmetros distribuídos, ao passo que sistemas cuja dimensão do espaço de estado é finita são geralmente chamados de sistemas de parâmetros concentrados.

1.9. Evolução Populacional

A evolução populacional de um país pode ser descrita pela seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial p(t,r)}{\partial t} + \frac{\partial p(t,r)}{\partial r} = \mu(t,r) p(t,r)$$

$$p(0,r) = p_0(r) = \text{distribuição inicial de idade}$$

$$p(t,0) = u(t) = \text{taxa de natalidade (nosso controle)}.$$

onde

$$p(t,r) = \text{densidade populacional de indivíduos c/ idade } r \text{ no instante } t,$$

$$\mu(t,r) = \text{taxa de mortalidade}.$$

O problema é escolher o controle $u(t)$ para que se atinja a uma densidade populacional $q(r)$ no instante final t_f .

Assim como os dois exemplos anteriores, este é um sistema de parâmetros distribuídos.

Sistemas discretos e sistemas de parâmetros distribuídos não fazem parte deste curso. Apenas foram introduzidos nestes exemplos a título de ilustração.

2. ÁLGEBRA LINEAR

2.1. Revisão: Espaços Vetoriais e Transformações Lineares

- corpo K . (neste curso somente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- espaço vetorial V sobre um corpo.
- subespaços.
- combinação linear.
- dependência e independência linear (LD e LI).
- dimensão de um espaço vetorial V - $\dim V$ (neste curso somente espaços de dimensão finita)
- base β de um espaço vetorial.
- Teor. 1: Seja V um espaço vetorial de dimensão n , então:
 - $\nexists$ conjunto LI com n elementos de V e é uma base de V .
 - $\nexists$ conjunto com mais de n elementos de V e é LD.
 - Todas as bases de V têm n elementos.

- coordenadas de um vetor $v \in V$ em relação a uma base β :

$[v]_{\beta}$ = vetor cujas componentes são as coordenadas de v na base β .

- Teor. 2: Seja V um espaço vetorial, $\dim V = n$, β e β' duas bases de V e $v \in V$, então

$$[v]_{\beta} = M [v]_{\beta'}$$

onde M = matriz mudança de base, formada da seguinte maneira: as colunas são os vetores da base β' escritos na base β .

- transformação linear $T: V \rightarrow V'$

propriedades: $T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2$ e $T(kv) = kTv$.

- domínio, contra-domínio, imagem, núcleo de $T: V \rightarrow V'$

domínio de $T = \mathcal{D}(T) = V$; contra-domínio = V'

imagem de $T = \text{Im}(T) = \{v' \in V' : \exists v \in V, Tv = v'\}$

núcleo de $T = \ker(T) = \{v \in V : Tv = 0\}$

- Teor. 3: O núcleo e a imagem de uma transformação linear são espaços vetoriais.

- posto (ou rank) de T : $\rho(T) = \dim \text{Im}(T)$.

- nullity de $T = \dim \ker(T)$.

- Teor. 4: Seja $T: V \rightarrow V'$ transf. linear, $\dim V = n$, $\dim V' = n'$, $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V e $\beta' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_{n'}\}$ uma base de V' , então:

i) T é univocamente determinada pelos n vetores $y_i = Tv_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

ii) T pode ser representada univocamente em relação às bases β e β' pela matriz $n' \times n$ $[T]_{\beta'}^{\beta}$ cujas colunas são $[y_i]_{\beta'}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

- Teor. 5: $\rho(T) = n^\circ$ máximo de vetores-linha (ou vetores-coluna) L.I. de $[T]_{\beta'}^{\beta}$, qualquer que sejam as bases escolhidas β e β' .

- operador linear $T: V \rightarrow V$.

- funcional linear $f: V \rightarrow K$.

- Teor. 6: $T: V \rightarrow V$ operador linear, então $[T]_{\beta'}^{\beta'} = M^{-1} [T]_{\beta}^{\beta} M$ onde M é a matriz de mudança de base (definida acima).

- operador identidade: $I: V \rightarrow V$, $Iv = v$

- operadores inversíveis: $T: V \rightarrow V$ é inversível se $\exists T^{-1}: V \rightarrow V$ (transf. inversa) tal que $TT^{-1} = I = T^{-1}T$

- transformações similares: $T: V \rightarrow V$ é similar a $S: V \rightarrow V$ se $\exists M: V \rightarrow V$ inversível tal que $S = M^{-1}TM$.
- Teor. 7 - As matrizes que representam um operador em bases diferentes são similares.
- Teor. 8 - $[TP]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\beta}^{\beta} [P]_{\beta}^{\beta}$
- Teor. 9 - Seja $T: V \rightarrow V'$ uma transf. linear, então: $\dim V = \rho(T) + \dim(\ker(T))$.
- injeção: T é injetora se $Tv_1 = Tv_2 \Rightarrow v_1 = v_2$
- sobrejeção: $T: V \rightarrow V'$ é sobrejetora se $\forall v' \in V', \exists v \in V$ tal que $Tv = v'$.
- bijeção: T é bijetora se T é injetora e sobrejetora.
- Teor. 10 - T é injetora se e somente se $\ker(T) = \{0\}$.
- determinante de uma matriz - $\det(T)$
- Teor. 11 - $\det(TP) = \det(T) \cdot \det(P)$; $\det(I) = 1$;
 Se T é inversível $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$;
 Se T não é inversível $\det(T) = 0$;
 Se T e S são similares $\det(T) = \det(S)$.
- autovalores e autovetores: Seja $T: V \rightarrow V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$, $v \neq 0$.
 Se $Tv = \lambda v$, então λ é autovalor e v é autovetor (associado a λ).
- espectro de T : $\sigma(T)$ = conjunto de autovalores de T .
- polinômio característico de T : $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - T) = \det(T - \lambda I)$.
- Teor. 12: Seja $T: V \rightarrow V$ operador linear. As 3 afirmações são equivalentes:
 i) $\lambda \in \sigma(T)$, i.e., λ é autovalor de T ;
 ii) $(T - \lambda I)$ não é inversível ;
 iii) $\Delta(\lambda) = 0$, i.e., λ é raiz do polinômio característico.
- Teor. 13. Dois operadores similares possuem o mesmo polinômio característico.
- operador diagonalizável: se $\exists$ operador similar que é representado por matriz diagonal.
- multiplicidade de um autovalor: é a sua multiplicidade como raiz de $\Delta(\lambda)$.
- Teor. 14. Autovalores distintos possuem autovetores associados L.I.

2.2 - Forma Canônica de Jordan

Um operador $T: V \rightarrow V$ pode ser não-diagonalizável por 2 razões:

- deficiência do corpo $\mathbb{K}$ (autovalores complexos e corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- deficiência no operador (autovalores múltiplos sem autovetores em número suficiente).

Considerando-se o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ evita-se o primeiro tipo de deficiência. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\dim V = n$, então $T: V \rightarrow V$ possuirá n autovalores, podendo alguns serem repetidos (isto é, múltiplos).

CASO 1 - T tem n autovalores distintos: $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

Neste caso os auto-vetores associados $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formam uma base de V ,

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ é a representação de } T \text{ nesta base e}$$

$$\hat{T} = M^{-1}TM \text{ onde } M = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]. \quad \text{autovetores associados:}$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 1$ | autovetores: $(A - \lambda_1 I)v = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ é sol.
 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ | $(A - \lambda_2 I)v = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ é sol.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \text{ é a representação de } A \text{ na base } \{v_1, v_2\} \text{ e } \hat{A} = M^{-1}AM \text{ onde } M = [v_1 | v_2].$$

CASO 2 - T tem autovalores múltiplos com autovetores assoc. suficientes. Este é o caso que p/ cada autovalor λ de multiplicidade n_λ podemos encontrar n_λ autovetores associados L.I. (Nota: a condição p/ que isto ocorra é: $\rho(T - \lambda I) = n - n_\lambda$).

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

Neste caso é possível formar uma base de V , $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, com autovetores.

$\hat{T}$ = matriz diagonal onde cada autovalor λ aparece n_λ vezes.

$\hat{T}$ é a representação de T na base β . Se $M = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$, então $\hat{T} = M^{-1} T M$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \Rightarrow$ autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$

Note que $\{v_1, v_2\}$ são L.I. (isto foi possível porque $\rho(A - \lambda_1 I) = 1$). $(A - \lambda_3 I)v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é solução.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ é a representação de } A \text{ na base } \beta = \{v_1, v_2, v_3\}$$

e $\hat{A} = M^{-1} A M$ onde $M = [v_1 | v_2 | v_3]$.

CASO 3 - T tem autovalores múltiplos sem autovetores associados suficientes.

Este é o caso de T possuir um (ou mais) autovalor λ de multiplicidade n_λ com apenas r autovetores L.I. associados ($r < n_\lambda$). Neste caso T não pode ser diagonalizado mas pode ser posto na forma canônica de Jordan.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

$\Rightarrow$ somente 1 autovetor L.I. associado a λ_1 . Este autovetor pode ser, por exemplo $v_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$. Para λ_3 é fácil calcular o autovetor associado $v_3 = (5 \ 3 \ 1)^T$.

Def: v é autovetor generalizado de posto k associado a λ se $(T - \lambda I)^k v = 0$ e $(T - \lambda I)^{k-1} v \neq 0$.

(Nota: se $k=1$ v é simplesmente um autovetor associado a λ).

Se v é autovetor gen. de posto k podemos definir uma cadeia de autovetores gen. $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ onde cada v_i tem posto i :

$$\boxed{v_i = (T - \lambda I)^{k-i} v} \quad \text{ou seja} \quad \left. \begin{aligned} v_k &= v \\ v_{k-1} &= (T - \lambda I)v = (T - \lambda I)v_k \\ v_{k-2} &= (T - \lambda I)^2 v = (T - \lambda I)v_{k-1} \\ &\vdots \\ v_1 &= (T - \lambda I)^{k-1} v = (T - \lambda I)v_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

(Nota: v_1 é autovetor simples associado a λ)

Teor. 15 - Uma cadeia de autovet. gen. (conforme definida em (2.1)) é L.I.

Teor. 16 - Autovet. gen. assoc. a autovalores $\neq$ são L.I.

Teor. 17 - Autovalores λ de multiplicidade n_λ têm um total de n_λ autovetores gen. (incluindo autovetores simples) L.I.

Corolário: Sempre é possível obter uma base de V com autovet. generalizados.

Continuação do exemplo do caso 3:

É fácil de verificar que $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é autovet. gen. de posto 2 associado a $\lambda_1 = 1$, uma vez que $(A - \lambda_1 I)v \neq 0$ e $(A - \lambda_1 I)^2 v = 0$.

Defina $v_2 = v$ e $v_1 = (A - \lambda_1 I)v$, então $\{v_1, v_2\}$ é uma cadeia de autovet. gen. L.I.

Além disso, $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de V . As representações de $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = v_1 + \lambda_1 v_2$ e $Av_3 = \lambda_3 v_3$ em relação a esta base são

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ e portanto } \hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \end{array} \right] \text{ é a representação de } A \text{ na base } \beta.$$

Pode-se também verificar que

$$\hat{A} = M^{-1} A M \quad \text{onde } M = [v_1 : v_2 : v_3] = \text{matriz mudança de base.}$$

$\hat{A}$ está na forma canônica de Jordan. Em geral esta forma é

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & & & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & & & & \lambda_2 & 1 & & & & \\ & & & & & & 0 & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & & & & & & & 0 & \lambda_2 & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & 0 & & & & & & & & & \\ & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} & & & & & & & & & \\ & 0 & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{21} & & & & & & & & \end{array} \right] \quad (2.2)$$

Procedimento p/ cálculo de $\hat{T}$, forma canônica de Jordan, p/ $T: V \rightarrow V$.

1. Achar todos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ e suas multiplicidades $n_1, n_2, \dots, n_m$.
2. Calcular n_1 autovet. gen. L.I. assoc. a λ_1 . (Nota: $\exists n_{\text{cad.}} = n - \rho(T - \lambda_1 I)$ cadeias de autov. gen. assoc. a λ_1 .)
 - 2.a) - Para achar a 1ª cadeia por exemplo, calcule $(T - \lambda_1 I)^i$ p/ $i = 1, 2, \dots$ até $\rho(T - \lambda_1 I)^k = \rho(T - \lambda_1 I)^{k+1}$. Ache um autovetor gen. v de posto k . A cadeia terá k autovet. gen. $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ definidos por (2.1) c/ $\lambda = \lambda_1$.
 - 2.b) - Se $k = n_1$ siga p/ item 3 (Nota: isto ocorrerá quando $n_{\text{cad.}} = 1$).
 - 2.c) - Se $k < n_1$ segue-se calculando a 2ª, 3ª, $\dots$ até $n_{\text{cad.}}$ cadeias de autovet. gen. L.I. assoc. a λ_1 . Cada uma dessas cadeias terá um número de autov. gen. $\leq k$. (Por exemplo: p/ achar a 2ª cadeia, tenta-se calcular um autovet. gen. de posto k L.I. com a 1ª cadeia. Se não for possível, tenta-se de posto $k-1$, e assim por diante. Uma vez achado este autov. gen. gera-se a 2ª cadeia de forma semelhante à acima.
3. Repita o item 2 para os autovetores $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$.

Escrever a matriz A abaixo na Forma Canônica de Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(s) = \det(sI - A) = (s-2)^3 s$$

$$\text{autovalores de } A \begin{cases} \lambda_1 = 2 & (n_1 = 3) \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{rank}(\lambda_1 I - A) = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > n - n_1 = 1 \Rightarrow \text{caso 3}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} (s-3) & 1 & -1 & 0 \\ -1 & (s-1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2) & 0 \\ -3 & -2 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(s-1)}{(s-2)^2} & \frac{-1}{(s-2)^2} & \frac{s}{(s-2)^3} & 0 \\ \frac{1}{(s-2)^2} & \frac{(s-3)}{(s-2)^2} & \frac{-(s-4)}{(s-2)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-2)} & 0 \\ \frac{3s-1}{(s-2)^2 s} & \frac{2s-9}{s(s-2)^2} & \frac{s^2-3s+12}{(s-2)^3 s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Usando $c = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ temos que

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = c(sI - A)^{-1} b = \frac{2s^2 - 3s + 12}{(s-2)^3 s} = \frac{\alpha = -1.5}{s} + \frac{\beta = 7}{(s-2)^3} + \frac{\gamma = -1}{(s-2)^2} + \frac{\delta = 1.5}{(s-2)}$$

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{U(s)}{s} \\ X_2(s) = \frac{U(s)}{(s-2)^3} \\ X_3(s) = \frac{U(s)}{(s-2)^2} \\ X_4(s) = \frac{U(s)}{(s-2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX_1(s) = U(s) \\ (s-2)X_2(s) = X_3(s) \\ (s-2)X_3(s) = X_4(s) \\ (s-2)X_4(s) = U(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX_1(s) = & + U(s) \\ sX_2(s) = & 2X_2(s) + X_3(s) \\ sX_3(s) = & 2X_3(s) + X_4(s) \\ sX_4(s) = & 2X_4(s) + U(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [-1.5 \ 7 \ -1 \ 1.5] x \end{cases}$$

$\hat{A}$ está na
forma
canônica
de Jordan

Dessa forma obter-se-á um total de n autov. gen. L.I. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ onde n_1 deles são assoc. a λ_1 , n_2 deles são assoc. a λ_2 , etc.

Defina $\beta =$ conjunto desses n autovet. gen. $= \{v_1, v_2, \dots, v_n\} =$ base de V .

$M =$ matriz formada por estes n autov. gen. $= [v_1 : v_2 : \dots : v_n]$. (2.3).

4. $\hat{T}$ terá blocos na diagonal e zeros no resto.

$\hat{T} = \begin{bmatrix} \hat{T}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{T}_{ij} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$ Cada cadeia de autov. gen. gera um bloco de ordem $=$ ao n° de autov. gen. na cadeia.

$\hat{T}_{ij} =$ bloco da j -ésima cadeia do autovalor λ_i

Os blocos $\hat{T}_{ij}$ têm a forma:

$$\hat{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Observações:

- A forma canônica de Jordan é única, a menos de uma possível troca de blocos.
- $\hat{T}$ é a representação de T na base β , M é a matriz mudança de base e
- $\hat{T}$ satisfaz: $\hat{T} = M^{-1} T M$ ou equivalentemente, $M \hat{T} = T M$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^5 \lambda$$

$$\text{autovalores: } \begin{cases} 2 & \text{c/multiplic. } 5 \\ 0 & \text{c/ " } 1 \end{cases}$$

$$\rho(A - 2I) = 4, \rho(A - 2I)^2 = 3, \rho(A - 2I)^3 = 2, \rho(A - 2I)^4 = 2 \Rightarrow k = 3$$

A 1ª cadeia de autov. gen. L.I. assoc. a $\lambda_1 = 2$ terá 3 autov. gen.

É fácil de verificar que $v = (001000)^T$ é um autov. gen. de posto 3.

Define-se $v_3 = v$, $v_2 = (A - 2I)v = (1 - 1 0 0 0 0)^T$ e $v_1 = (A - 2I)^2 v = (2 2 0 0 0 0)^T$. Portanto, $\{v_1, v_2, v_3\}$ é a 1ª cadeia.

Neste ponto verifica-se que $k = 3 < 5 = n_1 =$ multiplic. de λ_1 . Portanto, haverá pelo menos uma outra cadeia de autov. gen. assoc. a $\lambda_1 = 2$.

Observe que $n_{\text{cad.}} = n - \rho(A - 2I) = 6 - 4 = 2$ cadeias. Portanto a 2ª e última cadeia de autov. gen. assoc. a $\lambda_1 = 2$ terá 2 autov. gen. L.I. totalizando 5 autov. gen. assoc. a λ_1 . Sendo assim é necessário achar um autov. gen. L.I. com os anteriores, de posto 2. É fácil de verificar que $v' = (0 0 1 - 1 1 1)^T$ é tal autov. gen. Define-se $v_5 = v'$ e $v_4 = (A - 2I)v' = (0 0 2 - 2 0 0)^T$. Portanto $\{v_4, v_5\}$ é a 2ª cadeia.

Para o autovalor $\lambda_2 = 0$, qualquer elemento $\neq 0$ do núcleo de A será um autovetor de λ_2 . Por exemplo, $w = (0 0 0 0 1 - 1)^T$. Define-se $v_6 = w$. Portanto $\{v_6\}$ é a 1ª e única cadeia de autov. de λ_2 .

A forma canônica de Jordan p/ A é dada por

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ \hline & & & 2 & 1 & \\ & 0 & & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & & 0 \end{array} \right]$$

Além disso, $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ é uma base de V , $\hat{A}$ é a representação de A na base β e satisfaz

$$\hat{A} = M^{-1} A M$$

onde $M = [v_1 : v_2 : v_3 : v_4 : v_5 : v_6]$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

autovalores
 $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

$$f(\lambda) = \sin \lambda t$$

$$q(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda \quad (\text{polinômio})$$

Fazer $\begin{cases} f(\lambda_1) = q(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) = q(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = \sin t = \alpha_0 + \alpha_1 = q(1) \\ f(2) = \sin 2t = \alpha_0 + 2\alpha_1 = q(2) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{3} \sin t - \sin 2t \\ \alpha_1 = \frac{2}{3} (\sin t + \sin 2t) \end{cases}$$

Logo,

$$f(A) = \sin(At) = q(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 + 2\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ \frac{1}{3} (\sin t + \sin 2t) & \sin 2t \end{bmatrix}$$

Obs.: se $t=0 \Rightarrow \sin(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

se $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(A\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

autovalores
 $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

$$f(\lambda) = \sin \lambda t$$

$$q(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

Fazer $\begin{cases} f(\lambda_1) = q(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) = q(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = \sin t = \alpha_0 + \alpha_1 = q(1) \\ f(-2) = \sin(-2t) = \alpha_0 - 2\alpha_1 = q(-2) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \sin t + \frac{1}{3} \sin 2t \end{cases}$$

Logo,

$$f(A) = \sin At = q(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 - 2\alpha_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ \frac{1}{3} \sin t + \frac{1}{3} \sin 2t & -\sin 2t \end{bmatrix}$$

Obs.: se $t=0 \Rightarrow \sin(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

se $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(A\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

De forma semelhante podemos calcular:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\cos(At) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos 2t \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\cos(At) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$

Obs: se $t=0 \Rightarrow \cos(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

se $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(A\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.3. Polinômio de matriz (quadrada)

Seja $p(\lambda)$ um polinômio em λ de grau n (finito), podemos definir $p(A)$.
 Por exemplo: $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 5 \Rightarrow p(A) = A^4 - 2A^3 + 5I$.

- Teor. 18 - Se $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, então $p(A) = \begin{bmatrix} p(A_1) & 0 \\ 0 & p(A_2) \end{bmatrix}$.

- Teor. 19 - Se $\hat{A}$ é a forma can. de Jordan de A e M definida por (2.3), então

- i) $A^k = M \hat{A}^k M^{-1}$
- ii) $p(A) = M p(\hat{A}) M^{-1}$
- iii) $p(A) = 0 \Leftrightarrow p(\hat{A}) = 0$
- iv) Para o bloco $\hat{T}_{ij}$ de dimensão $n_{ij} \times n_{ij}$ definido em (2.4), $(\hat{T}_{ij} - \lambda_i I)^k \begin{cases} = 0 & \forall k \geq n_{ij} \\ \neq 0 & \forall k < n_{ij} \end{cases}$

- Corolário: Se $\bar{n}_i$ é a maior ordem dos blocos de $\hat{A}$ associados a λ_i e $\Psi(\lambda)$ é o polinômio $\Psi(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i}$, então $\Psi(A) = 0$.

- Nota: $\Psi(\lambda)$ tem grau $\bar{n} = \sum_{i=1}^m \bar{n}_i \leq n = \text{grau do polin. característico } \Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$.
 Pelo item (iv) do Teor. 19 nenhum polinômio $p(\lambda)$ de grau $< \bar{n}$ satisfaz $p(A) = 0$.

- $\bar{n}_i$ é chamado de índice do autovalor λ_i .

- $\Psi(\lambda)$ é chamado de polinômio mínimo de A .

- Corolário (Teorema de Cayley-Hamilton): $\Delta(A) = 0$.

- Definição: Se $\alpha_{ij} = p^{(j)}(\lambda_i)$ $\begin{cases} i=1, 2, \dots, m \\ j=0, 1, \dots, (n_i-1) \end{cases}$ então diz-se que α_{ij} são os valores de p no espectro de A .

- Teor. 20. $p(A) = q(A) \Leftrightarrow p^{(j)}(\lambda_i) = q^{(j)}(\lambda_i), i=1, 2, \dots, m; j=0, 1, \dots, \bar{n}_i$.

- Corolário: Se p e q têm os mesmos valores no espectro de A , então $p(A) = q(A)$.

- Teor. 21. Se A é uma matriz $n \times n$, então para $\forall$ polinômio $p(\lambda)$ pode-se construir um polinômio $q(\lambda)$ de grau $(n-1)$, isto é,

$$q(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1},$$

tal que p e q têm o mesmo valor no espectro de A . E portanto,

$$p(A) = q(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}.$$

Por exemplo,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Achar A^{100} : Primeiro calcula-se $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Logo,

$\lambda_1 = 1, n_1 = 2$

Agora, defina $\begin{cases} p(\lambda) = \lambda^{100} \\ q(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(1) = q(1) \Rightarrow 1^{100} = \alpha_0 + \alpha_1 \\ p'(1) = q'(1) \Rightarrow 100 \cdot (1)^{99} = \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -99 \\ \alpha_1 = 100 \end{cases}$

Logo, $p(A) = A^{100} = q(A) = \begin{bmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.4. Função de matriz (quadrada): Seja $f(\lambda)$ uma função que é definida no espectro de A . Se $q(\lambda)$ é um polinômio que tem os mesmos valores no espectro de A , então $f(A) \triangleq q(A)$.

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Calcular e^{At} . Primeiro acha-se $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Logo, $\lambda_1 = 1, n_1 = 2$ e $\lambda_2 = 2, n_2 = 1$. Agora defina $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ e $q(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2$.

$$\begin{cases} f(1) = q(1) \Rightarrow e^t = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ f'(1) = q'(1) \Rightarrow te^t = \alpha_1 + 2\alpha_2 \quad (\text{Nota: derivada c/respecto a } \lambda) \\ f(2) = q(2) \Rightarrow e^{2t} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = e^{2t} - 2te^t \\ \alpha_1 = 3te^t + 2e^t - 2e^{2t} \\ \alpha_2 = e^{2t} - e^t - te^t \end{cases}$$

Portanto, $f(A) = e^{At} = q(A) = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & 0 & 2e^t - 2e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{2t} - e^t \end{bmatrix}$.

① Pela definição de função de matriz:

Calcular e^{At}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

Autovalores

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}$$

$$q(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

$$f(\lambda_1) = e^t = \alpha_0 + \alpha_1 = q(\lambda_1)$$

$$f(\lambda_2) = e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1 = q(\lambda_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t} \\ \alpha_1 = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} \end{cases}$$

$$e^{At} = f(A) = q(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A =$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

② Usando transformada inversa de $(\lambda I - A)^{-1}$:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(\lambda I - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda - 1} & 0 \\ \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda + 2)} & \frac{1}{\lambda + 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

③ Usando série de potências:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ t & -2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & 0 \\ -\frac{t^2}{2} & \frac{4t^2}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^3}{3!} & 0 \\ \frac{3t^3}{3!} - \frac{8t^3}{3!} & \frac{8t^3}{3!} \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots & 0 \\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{3t^3}{3!} + \dots & 1 - 2t + \frac{4t^2}{2} - \frac{8t^3}{3!} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$t - \frac{t^2}{2} + \frac{3t^3}{3!} + \dots = \frac{1}{3}(1 - 1) + \frac{1}{3}(t + 2t) + \frac{1}{3}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{4t^2}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3!} + \frac{8t^3}{3!}\right) + \dots$$

$$= \frac{1}{3}(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots) - \frac{1}{3}(1 - 2t + \frac{4t^2}{2} - \frac{8t^3}{3!} + \dots)$$

$$= \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{3} e^{-2t}$$

- Teor. 22 - (Generalização do Teor. 18):

Se $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, então $f(A) = \begin{bmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{bmatrix}$

- Teor. 23 - (Generalização dos itens (ii) e (iii) do Teor. 19):

i) $f(A) = M f(\hat{A}) M^{-1}$

ii) $f(A) = 0 \iff f(\hat{A}) = 0$.

- Função de um bloco de Jordam: Seja $\hat{T}_{ij}$ o bloco de dimensão $n_i \times n_i$ definido em (2.4).

$$(\hat{T}_{ij} - \lambda_i I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}, \quad (\hat{T}_{ij} - \lambda_i I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad (\hat{T}_{ij} - \lambda_i I)^{n_i-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, se quisermos calcular $f(\hat{T}_{ij})$ será mais prático se definirmos $q(\lambda)$

$$q(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1(\lambda - \lambda_i) + \alpha_2(\lambda - \lambda_i)^2 + \dots + \alpha_{n_i-1}(\lambda - \lambda_i)^{n_i-1}$$

e calcularmos os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_i-1}$ tal que f e q tenham os mesmos valores no espectro de A . Observe que para $\hat{T}_{ij}$ o polin. caract. $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, ou seja um autovvalor λ_i com multiplicidade n_i .

Logo,

$$\alpha_0 = f(\lambda_i)$$

$$\alpha_1 = f'(\lambda_i)$$

$$\alpha_2 = f''(\lambda_i)/2!$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n_i-1} = f^{(n_i-1)}(\lambda_i)/(n_i-1)!$$

são tais valores de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_i-1}$.
(Concluímos o resultado no enunciado do Teor. 24).

- Teor. 24.

$$f(\hat{T}_{ij}) = q(\hat{T}_{ij}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i)/1! & f''(\lambda_i)/2! & \dots & f^{(n_i-1)}(\lambda_i)/(n_i-1)! \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i)/1! & \dots & f^{(n_i-2)}(\lambda_i)/(n_i-2)! \\ 0 & 0 & f(\lambda_i) & \dots & f^{(n_i-3)}(\lambda_i)/(n_i-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Com esse resultado fica fácil calcular $f(\hat{A})$ p/ matrizes $\hat{A}$ na forma de Jord.

dan. Por exemplo,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2! & & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & t e^{\lambda_2 t} \\ & & & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

- Teor. 25. Seja $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ duas funções definidas no espectro de A , então:
 $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

- Teor. 26 - Se $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$ e a representação da função f em série de potências e $f(\lambda_i)$ converge p/ todos autovvalores λ_i de A , então
 $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$.

- Exemplo:

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n t^n}{n!} \Bigg\} \Rightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

converge p/ todo λ finito

- Propriedades de e^{At} :

i) $e^0 = I$

ii) $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$

iii) $A e^{At} = e^{At} A = \frac{d}{dt} e^{At}$

iv) $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} \iff AB = BA$.

- Teor. 27 - Se $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$ é a representação da função f em série de potências e $A^n = 0$ para algum inteiro $n > 0$, então

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$$

- Exemplo: Considere o bloco de Jordan $\hat{T}_{ij}$ definido em (2.4) e a função f expandida na forma de Taylor na vizinhança de λ_i ,
então,

$$f(\lambda) = f(\lambda_i) + f'(\lambda_i)(\lambda - \lambda_i) + \frac{f''(\lambda_i)}{2!}(\lambda - \lambda_i)^2 + \dots$$

$$f(\hat{T}_{ij}) = f(\lambda_i)I + f'(\lambda_i)(\hat{T}_{ij} - \lambda_i I) + \frac{f''(\lambda_i)}{2!}(\hat{T}_{ij} - \lambda_i I)^2 + \dots$$
que é o resultado do teorema 24.

2.5. Transformada de Laplace

Seja $f(t)$ uma função definida p/ $t > 0$, $\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$.

onde s é uma variável complexa. (0- no lim. de integr. aparece p/ incluir $f(t) = \delta(t)$).

- Algumas transformadas de Laplace: $\rightarrow$

- Propriedades da transf. de Laplace:

i) $\mathcal{L}(f_1(t) + f_2(t)) = \mathcal{L}(f_1(t)) + \mathcal{L}(f_2(t))$

ii) $\mathcal{L}(a f(t)) = a \mathcal{L}(f(t))$

iii) $\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(s+a)$

iv) $\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^-)$

v) $\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - s f(0^-) - f'(0^-)$

vi) $\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$, $n=0, 1, 2, \dots$

vii) $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t) dt\right) = \frac{1}{s} F(s)$.

viii) $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$; $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$
(Teorema do valor inicial) (Teorema do valor final)

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ (= delta Dirac)	1
1 (= $f(t) = 1$ degrau)	$1/s$
t (= $f(t) = t$ rampa)	$1/s^2$
t^n $n=0, 1, 2, \dots$	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$, $s > a$

- Transformada inversa de Laplace: $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$ se $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

- Transform. de Laplace de vetores $x(t) \in \mathbb{R}^n$ p/ cada t e matrizes $G(t)$ são: o vetor $X(s)$ cujas componentes são as transf. de Laplace das componentes de $x(t)$, e a matriz $\tilde{G}(s)$ cujos elementos são as transf. de Laplace dos elementos de $G(t)$.

- Teor. 28 - $\mathcal{L}(e^{At}) = (sI - A)^{-1}$ e $\mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} = e^{At}$.

- Cálculo de $(sI - A)^{-1}$ - pode ser feito de diversas maneiras:

i) tomando a inversa de $(sI - A)$;

ii) usando a definição de função de matriz, calcula-se $f(A)$ para $f(\lambda) = (s - \lambda)^{-1}$;

iii) usando $(sI - A)^{-1} = M(sI - \hat{A})^{-1} M^{-1}$;

iv) usando teor. 27 com $f(\lambda) = (s - \lambda)^{-1} = s^{-1} + s^{-2} \lambda + s^{-3} \lambda^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{s^{k+1}} \lambda^k$

v) calculando a transf. de Laplace de e^{At} (teorema 28).

- Cálculo de e^{At}

Já foram ilustrados duas maneiras:

i) usando a definição de função de matriz, acha-se $f(A)$ p/ $f(\lambda) = e^{\lambda t}$;

ii) usando série de potência (teor. 26 e exemplo que segue).

O teor. 28 nos dá uma terceira maneira:

iii) calculando a transf. inversa de Laplace de $(sI - A)^{-1}$.

2.6. Normas

O conceito de norma de um vetor v generaliza a idéia de distância de v a 0 . A notação para norma de um vetor v é $\|v\|$. Se nós tomarmos $\|v_1 - v_2\|$ para dois vetores v_1 e v_2 teremos a generalização do conceito de distância entre dois vetores.

- Definição: norma é a função $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz

$$i) \|v\| \geq 0 \quad \text{e} \quad \|v\| = 0 \iff v = 0;$$

$$ii) \|kv\| = |k| \cdot \|v\|$$

$$iii) \|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| \quad (\text{desigualdade triangular})$$

- Exemplos de norma para $V = \mathbb{K}^n (= \mathbb{C}^n \text{ ou } \mathbb{R}^n)$

Para $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ podemos definir inúmeras normas:

$$a) - \|v\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$b) - \|v\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \quad (\text{norma Euclidiana})$$

$$c) - \|v\|_k = (|x_1|^k + |x_2|^k + \dots + |x_n|^k)^{1/k} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^k\right)^{1/k}, \quad k \text{ finito}$$

$$d) - \|v\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|).$$

- Norma de operadores lineares:

O conjunto de operadores lineares $A: V \rightarrow V$ formam um espaço vetorial que é denotado por $\mathcal{L}(V)$. Portanto também pode-se definir norma de A , $\|A\|$.

- Exemplos de norma para operadores lineares $A: V \rightarrow V$

$$i) \|A\| = \sup_{v \neq 0} \left\{ \frac{\|Av\|}{\|v\|} \right\} = \sup_{\|v\|=1} \{ \|Av\| \}$$

$$ii) \text{ Se } V = \mathbb{K}^n, \quad \|A\| = (\text{traço}(A^T A))^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

- Propriedades de $\|A\|$:

$$\|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\| \quad \text{e} \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

2.7. Produto Interno

O produto interno de dois vetores v_1 e v_2 generaliza a idéia de ângulo formado por eles. Por exemplo, se o produto interno $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ diz-se que v_1 e v_2 são ortogonais.

- Definição: o produto interno é a função $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$i) \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle \quad \text{iii) } \langle kv_1, v_2 \rangle = k \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$ii) \langle v, v \rangle > 0, \quad \forall v \neq 0 \quad \text{iv) } \langle v_1 + v_2, v \rangle = \langle v_1, v \rangle + \langle v_2, v \rangle.$$

- Exemplos de produto interno no $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$):

$$a) - \langle v_1, v_2 \rangle = v_1^* v_2 = \sum_{i=1}^n \bar{v}_{1i} v_{2i} \quad \text{onde } v_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}) \text{ e } v_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})$$

$$b) - \langle v_1, v_2 \rangle = v_1^* A v_2 = \sum_{i=1}^n \bar{v}_{1i} k_i v_{2i} \quad \text{onde } A = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{bmatrix}, \text{ e } k_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

- Propriedades do produto interno:

$$i) \text{ Se } A \text{ é uma matriz } n \times n, \text{ então } \langle v_1, A v_2 \rangle = \langle A^* v_1, v_2 \rangle, \quad A^* = \text{transposta conjugada de } A.$$

$$ii) \text{ Uma norma pode ser definida por } \|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

$$iii) |\langle v_1, v_2 \rangle| \leq \langle v_1, v_1 \rangle^{1/2} \cdot \langle v_2, v_2 \rangle^{1/2} \quad (\text{desigualdade de Schwarz})$$

- Definindo-se norma pela propriedade (ii) acima podemos exprimir (iii), a desigualdade de Schwarz, como

$$|\langle v_1, v_2 \rangle| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - a)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a \quad (n_1 = 2)$$

$$\text{rank}(aI - A) = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 > 0 = n_1 - n_1$$

(caso 3)

Autovectores

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = ax \\ ay = ay \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = q \\ y = 0 \end{cases}$$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é autovector. $\nexists$ outro autovector l.i. associado a $\lambda_1 = a$.

$$\hat{A} = PAP^{-1} \Rightarrow \hat{A}P = PA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} aw + y & ax + z \\ ay & az \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw & bw + az \\ ay & by + az \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} aw + y = aw \\ ay = ay \\ ax + z = bw + az \\ az = by + az \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bw = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -q/b \\ 0 & 1/b \end{bmatrix}$$

Verificação:

$$\hat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-a)} & \frac{b}{(s-a)^2} \\ 0 & \frac{1}{(s-a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} & bte^{at} \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix}$$

e^{At} usando definição de função de matriz

$$p(\lambda) = (\lambda - a)^2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\lambda) = e^{at} \\ q(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 A \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(\lambda) = te^{at} \\ q'(\lambda) = \alpha_1 \end{cases}$$

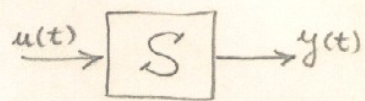
$$\begin{cases} f(a) = e^{at} = \alpha_0 + \alpha_1 a = q(a) \\ f'(a) = te^{at} = \alpha_1 = q'(a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = e^{at} - at e^{at} \\ \alpha_1 = t e^{at} \end{cases} \Rightarrow e^{At} = f(A) = q(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 a & b \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 + \alpha_1 a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{at} & bte^{at} \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix}$$

3. DESCRIÇÃO DE SISTEMAS

Conforme notação introduzida no capítulo 1, a função $u(\cdot)$ representa a entrada (ou as entradas) e a função $y(\cdot)$ representa a saída (ou as saídas). Também usaremos a notação $u_{[t_0, t_1]}$ se a função $u(\cdot)$ é definida no intervalo $[t_0, t_1]$. Semelhantemente se define $u_{[t_0, \infty)}$, $u_{(-\infty, t_0]}$, $y_{[t_0, t_1]}$, etc.



3.1. Descrição entrada-saída

Também chamada descrição I/O (input/output), é qualquer descrição do sistema que nos dá uma relação H entre a entrada $u(\cdot)$ e a saída $y(\cdot)$, isto é

$$y(\cdot) = H u(\cdot) \quad (3.1)$$

É importante se assumir que o sistema está relaxado em $t = -\infty$ e portanto a saída $y(\cdot)$ é excitada apenas pela entrada $u_{(-\infty, \infty)}$.

Um caso particular é quando a $y(t)$, a saída no instante t , depende apenas da entrada no instante t , $u(t)$. Por exemplo,

$$y(t) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} u(t)$$

Neste caso H é a transformação linear $u(\cdot) \mapsto [R_1 R_2 / (R_1 + R_2)] u(\cdot)$

Estes sistemas são chamados de sistemas sem-memória ou sistemas instantâneos. Para o caso de várias entradas e várias saídas, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T$, $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t))^T$ e

$$y(t) = H u(t) \quad \text{onde } H \text{ é uma matriz } p \times m \text{ com elementos reais.}$$

No caso geral no entanto, os sistemas têm memória, isto é, $y(t)$, a saída no instante t , depende de $u_{(-\infty, \infty)}$.

O sistema é dito linear se o operador H em (3.1) é um operador linear. Isto é, H satisfaz o princípio da superposição que consistem em duas propriedades:

$$i) \quad H(u + u') = H u + H u' \quad (\text{aditividade})$$

$$ii) \quad H(\alpha u) = \alpha H u \quad (\text{homogeneidade})$$

para quaisquer entradas $u(\cdot)$, $u'(\cdot)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

O princípio da superposição significa que podemos superpor duas entradas $u(\cdot)$ e $u'(\cdot)$ obtendo a entrada $(u(\cdot) + u'(\cdot))$ e a saída $y(t)$ será a soma (ou superposição) das saídas que seriam obtidas se aplicássemos as entradas $u(\cdot)$ e $u'(\cdot)$ separadamente. Além disso, se multiplicarmos uma entrada por α , a saída também ficará multiplicada por α .

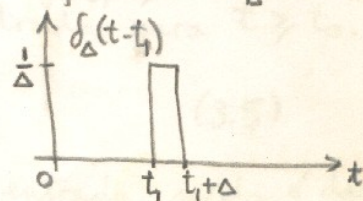
Exemplo: Suponha que um sistema de 1 entrada $u(t)$ e uma saída $y(t)$ tenha a seguinte relação para todo t ,

$$y(t) = \begin{cases} \frac{u^2(t)}{u(t-1)} & \text{se } u(t-1) \neq 0 \\ 0 & \text{se } u(t-1) = 0 \end{cases}$$

É fácil de verificar que esta relação de entrada-saída satisfaz a propriedade de homogeneidade, no entanto ela não satisfaz a propriedade de aditividade.

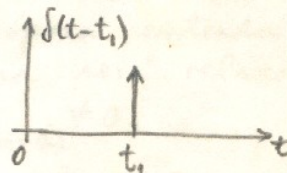
Nós iremos agora desenvolver uma expressão para H para sistemas lineares e relaxados em $t = -\infty$. Primeiramente defina-se $\delta_\Delta(t-t_1)$ o pulso retangular em $t=t_1$

$$\delta_\Delta(t-t_1) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_1 \\ 1/\Delta & \text{se } t_1 \leq t \leq t_1 + \Delta \\ 0 & \text{se } t > t_1 + \Delta \end{cases}$$

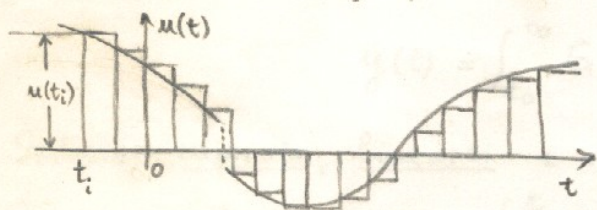


Claro que quando $\Delta \rightarrow 0$ temos que

$$\delta(t-t_1) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t-t_1)$$



onde $\delta(t-t_1)$ é a função delta de Dirac (ou impulso) em $t=t_1$.



Nós podemos tomar a função $u(\cdot)$ de entrada e, desde que ela seja contínua em intervalos, a seguinte aproximação é válida:

$$u(\cdot) = \sum_i u(t_i) \cdot \delta_\Delta(t-t_i) \cdot \Delta$$

E portanto, uma vez que o sistema é relaxado em $t = -\infty$,

a saída $y(\cdot)$ satisfará a relação

$$y(\cdot) = Hu = \sum_i (H \delta_\Delta(t-t_i)) u(t_i) \cdot \Delta$$

e isto nos dá, quando $\Delta \rightarrow 0$,

$$y(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(H \delta(t-\tau))}_{g(\cdot, \tau)} u(\tau) d\tau$$

$g(\cdot, \tau)$ = resposta do sistema relaxado ao impulso aplicado no instante $t=\tau$

Logo,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

Se o sistema tem m entradas e p saídas, (3.2) pode ser extendida para

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

onde $G(t, \tau) = [g_{ij}(t, \tau)]$ é uma matriz $p \times m$ cujo elemento $g_{ij}(t, \tau)$ é a i -ésima resposta no instante t ao impulso aplicado no instante τ na j -ésima entrada.

Def.: O sistema é dito causal se $y(t)$, a saída no instante t , não depende da entrada aplicada depois do instante t . Isto é,

$$y(t) = H u_{(-\infty, t]}$$

Portanto, sistemas causais, lineares e relaxados em $t = -\infty$ satisfazem

$$G(t, \tau) = 0 \quad \text{para todo } \tau \text{ e para todo } t < \tau$$

Consequentemente

$$y(t) = \int_{-\infty}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Def.: O sistema é dito relaxado em $t = t_0$ se $y[t_0, \infty)$, a saída para $t \geq t_0$, depende apenas de $u[t_0, \infty)$, a entrada para $t \geq t_0$. Isto é,

$$y[t_0, \infty) = H u[t_0, \infty) \quad (3.5)$$

Exemplo: Um sistema com retardo cuja relação entrada-saída é dada por $y(t) = u(t-a)$. Isto é, a saída é a própria entrada atrasada de a unidades de tempo. Este sistema será relaxado em t_0 se $u[t_0-a, t_0) = 0$, mesmo que $u(-\infty, t_0-a) \neq 0$.

Portanto sistemas relaxados satisfazem (3.5) e por isso,

$$y(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

Sistemas causais, lineares e relaxados em $t = t_0$ satisfazem

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Teor. 1: Um sistema cuja relação de entrada-saída é dada por (3.3) é relaxado em t_0 se e somente se $u[t_0, \infty) = 0$ implica em $y[t_0, \infty) = 0$.

Def.: O sistema é dito invariante no tempo (ou estacionário) se as características do sistema não mudam com o tempo.

Se nós chamarmos de Q_α o operador que desloca a função α unidades para a direita, isto é,

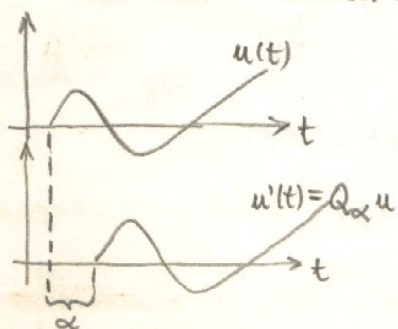
$$Q_\alpha u(\cdot) = u'(\cdot)$$

onde $u'(t) = u(t-\alpha)$,

então, sistemas invariantes no tempo são aqueles que

$$H Q_\alpha u(\cdot) = Q_\alpha H u(\cdot)$$

para qualquer entrada u e $\alpha \in \mathbb{R}$.



É fácil de se mostrar que se o sistema é invariante no tempo
então $G(t, \tau) = G(t - \tau, 0) = G(t - \tau)$. (3.8)

Isto é, a resposta no instante t ao impulso aplicado no instante τ depende apenas da diferença $t - \tau$.

Portanto, um sistema linear, causal, relaxado em $t = t_0$ e invariante no tempo satisfaz

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

Em particular, se o instante inicial $t_0 = 0$, então

$$y(t) = \int_0^t G(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t G(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (3.9)$$

que é chamada de integral de convolução.

Se nós tomarmos a transf. de Laplace $Y(s)$ de $y(t)$ em (3.9), obteremos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty G(t - \tau) u(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt = \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty G(t - \tau) e^{-s(t - \tau)} dt \right) u(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \\ &= \underbrace{\int_0^\infty G(v) e^{-sv} dv}_{\tilde{G}(s)} \cdot \underbrace{\int_0^\infty u(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{U(s)} \\ &= \tilde{G}(s) \cdot U(s) \end{aligned}$$

A transf. Laplace da convolução de 2 funções é o produto das transfs. de Laplace dessas funções

$\tilde{G}(s)$ = transf. de Laplace de $G(t)$ = é chamada de Função de Transferência do sistema.

Observe que foi necessário assumir que o sistema é relaxado em $t_0 = 0$.
Portanto, a função de transferência $\tilde{G}(s)$ nos dá uma relação entre as transfs. de Laplace $U(s)$ e $Y(s)$ (respectivamente da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$) p/ sistemas lineares, invariantes no tempo e relaxado em $t_0 = 0$.

Se o sistema tem apenas 1 entrada $u(t)$ e 1 saída $y(t)$, então $\tilde{G}(s)$ terá a forma de uma função racional:

No entanto, se o sistema tiver m entradas e p saídas, $\tilde{G}(s)$ será uma matriz $p \times m$ de funções racionais.

$$\tilde{G}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \text{quociente de 2 polinômios em } s.$$

Exemplos de Função de Transferência:

Tomando o exemplo 1.1 (Circuito Elétrico) e assumindo $i(0) = 0$, temos $sI(s) - i(0) + 2I(s) = U(s)$
e como $y(t) = -2i(t)$, $Y(s) = -2I(s)$, o que nos dá $I(s) = +\frac{1}{2}Y(s)$. Logo,
 $(\frac{s}{2} + 1)Y(s) = U(s)$

o que nos dá $\tilde{G}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(\frac{s}{2} + 1)} = \frac{-2}{(s + 2)}$.

Tomando o exemplo 1.3 (Sistema massa-mola) e assumindo relaxado em $t = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 \quad (\text{posição} = 0 \text{ em } t = 0) \\ \dot{x}_1(0) &= 0 \quad (\text{velocidade} = 0 \text{ em } t = 0), \end{aligned}$$

então, $m s^2 X_1(s) - s \dot{x}_1(0) - x_1(0) = -k X_1(s) + U(s)$
 e como $y(t) = x_1(t) = \text{posição no instante } t$, temos

$$(m s^2 + k) Y(s) = U(s) \quad \text{Logo, } \tilde{G}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(m s^2 + k)} = \frac{1/m}{(s^2 + k/m)}$$

Observe que o polinômio do denominador não tem o termo do 1º grau. Isto se dá ao fato que o atrito nas rodas do carro de massa m foi desprezado. Considerando um coeficiente de atrito viscoso k' a equação diferencial fica modificada para $m \ddot{x}_1(t) = -k' \dot{x}_1(t) - k x_1(t) + u(t)$ e portanto,

$$(m s^2 + k' s + k) Y(s) = U(s)$$

e a função de transferência $\tilde{G}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/m}{s^2 + (k'/m)s + (k/m)}$.

Tomando agora o exemplo 1.4 (sistema carro e pêndulo) e assumindo relaxado em $t=0$, isto é,

De (14) temos:

$$\begin{cases} M e s^2 \theta(s) + (m+M) g \theta(s) = -U(s) \\ M s^2 S(s) - m g \cdot \theta(s) = U(s) \end{cases} \quad \begin{cases} s(0) = 0 & (\text{posição do carro} = 0 \text{ em } t=0) \\ \dot{s}(0) = 0 & (\text{velocidade do carro} = 0 \text{ em } t=0) \\ \theta(0) = 0 & (\text{posição do pêndulo} = 0 \text{ em } t=0) \\ \dot{\theta}(0) = 0 & (\text{veloc. ang. do pêndulo} = 0 \text{ em } t=0). \end{cases}$$

Como $y_1(t) = s(t) = \text{posição do carro}$ e $y_2(t) = \theta(t) = \text{posição ang. do pêndulo}$,

$$M s^2 Y_1(s) - m g \cdot Y_2(s) = U(s) \quad \text{e} \quad [M e s^2 + (m+M) g] Y_2(s) = -U(s)$$

Logo,

$$\tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{U(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1/M) s^2 - (g/M e)}{s^4 + [(m+M)g/M e] s^2} \\ \frac{1/M e}{s^2 + \frac{(m+M)g}{M e}} \end{bmatrix}$$

Def: i) $\lambda \in \mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ é um pólo de uma função racional $r(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ se $|r(\lambda)| = \infty$.

ii) $\lambda \in \mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ é um zero de uma função racional $r(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ se $r(\lambda) = 0$.

Def: $\lambda \in \mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ é um pólo da matriz racional $\tilde{G}(s)$ se λ é um pólo de pelo menos um elemento de $\tilde{G}(s)$.

Exemplo: $\tilde{G}(s) = \frac{s-2}{s^2-5s+6}$ $\lambda=3$ é um pólo. No entanto, $\lambda=2$ não é nem zero nem pólo, uma vez que $g(2) = -1$ que é $\neq 0$ e $|g(2)| = 1$ que é $\neq \infty$. Na realidade $\tilde{G}(s)$ pode ser reescrita como $\tilde{G}(s) = \frac{(s-2)}{(s-2)(s-3)} = \frac{1}{(s-3)}$.

Se nós assumirmos que cada elemento $N_{ij}(s)/D_{ij}(s)$ de $\tilde{G}(s)$ é irredutível (isto é, não têm fatores comuns), então as raízes de $D_{ij}(s)$ são os polos de $\tilde{G}(s)$.

É comum também se assumir que $D_{ij}(s)$ é mônico. Isto é, o coeficiente do termo de mais alto grau é 1. Os três exemplos acima estão nesta forma.

3.2. Descrição na forma de estado

A descrição entrada-saída só é válida quando o sistema é relaxado no estado inicial. Se o sistema não é relaxado em t_0 , então a equação $y(t_0, \infty) = H u(t_0, \infty)$ não é válida, uma vez que $y(t_0, \infty)$ irá depender das condições iniciais do sistema.

Def: O estado de um sistema em t_0 é a quantidade de informação em t_0 que juntamente com $u(t_0, \infty)$ determinam o comportamento do sistema para todo $t > t_0$.

Nós já vimos no capítulo 1 alguns exemplos da descrição de sistemas na forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), & x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \quad (3.11)$$

A equação (3.10) é chamada de "equação dinâmica" do sistema e descreve a dinâmica do estado $x(t)$ para $t \geq t_0$.

Na maioria dos casos é possível escrever o sistema na forma (3.10)-(3.11). Por exemplo, um sistema descrito por uma equação diferencial ordinária de 4ª ordem pode ser transformado para forma (3.10)-(3.11), (que é um sistema de 1ª ordem), com a dimensão do estado igual a 4.

Se o sistema linear (3.10)-(3.11) podem ser re-escritas como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (3.13)$$

Se o sistema é linear e invariante no tempo, obtemos $A(t) = A$, $B(t) = B$ e $C(t) = C$, e portanto,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.15)$$

Para este último caso nós podemos calcular a expressão de $\tilde{G}(s) =$ função de transferência do sistema. Tomando a transf. Laplace de (3.14)-(3.15),

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (3.16)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) \quad (3.17)$$

Se o sistema está relaxado em $t_0 = 0$, então $x(0) = x_0 = 0$ e

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}B}_{\tilde{G}(s)} U(s) \quad (3.18)$$

$\tilde{G}(s)$ = função de transferência do sistema.

3.3. Sistemas equivalentes

Se nós definirmos um novo estado $\bar{x}(t) = Px(t)$ para o sistema (3.14)-(3.15), onde P é uma matriz inversível, obteremos

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} u(t) \quad (3.19)$$

$$y(t) = \bar{C} \bar{x}(t) \quad (3.20)$$

onde $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB$ e $\bar{C} = CP^{-1}$.

Observe que (3.19)-(3.20) é uma outra forma de escrever o sistema (3.14)-(3.15) na qual o novo estado $\bar{x}(t)$ é uma combinação linear das componentes do estado original $x(t)$. Estes sistemas são chamados "equivalentes".

Portanto, sistemas equivalentes são na verdade um só sistema com a definição das variáveis de estado diferentes (um é combinação linear das componentes do outro).

Se $\hat{A}$ é a forma canônica de Jordan de A , então $\hat{A} = M^{-1}AM$ onde M é a matriz $[v_1: v_2: \dots: v_n]$ formada pelos autovetores e autovetores generalizados de A . Se definirmos

$$\hat{B} = M^{-1}B \quad \text{e} \quad \hat{C} = CM$$

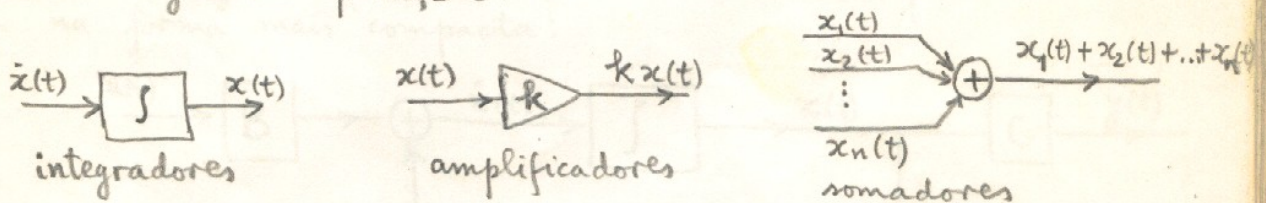
então

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} u(t) \\ y(t) = \hat{C} \hat{x}(t) \end{cases}$$

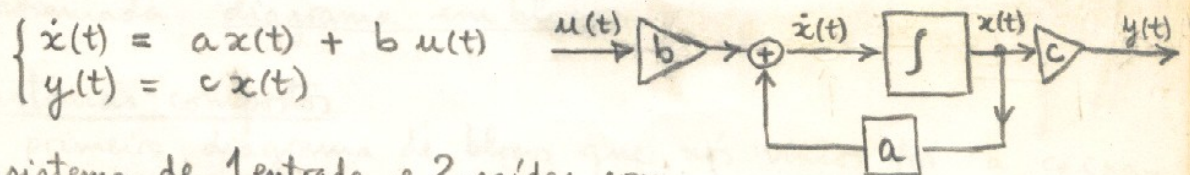
é um sistema equivalente a (3.14)-(3.15) onde $\hat{x}(t) = M^{-1}x(t)$.

3.4. Simulação Analógica

Computadores analógicos possuem dispositivos eletrônicos que fazem as seguintes operações:



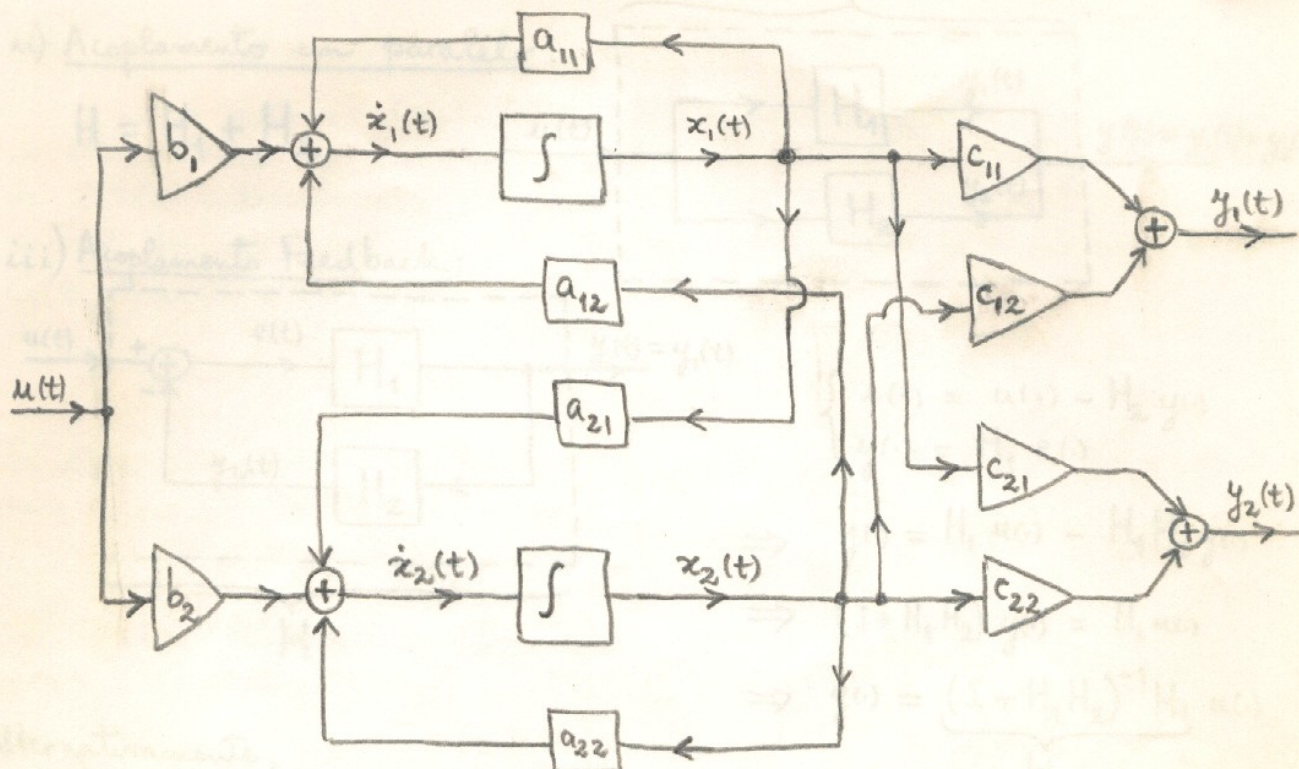
Com isto é possível simular analógicamente um sistema do tipo (3.14) (3.15). Por exemplo, considere o caso simples de apenas um estado



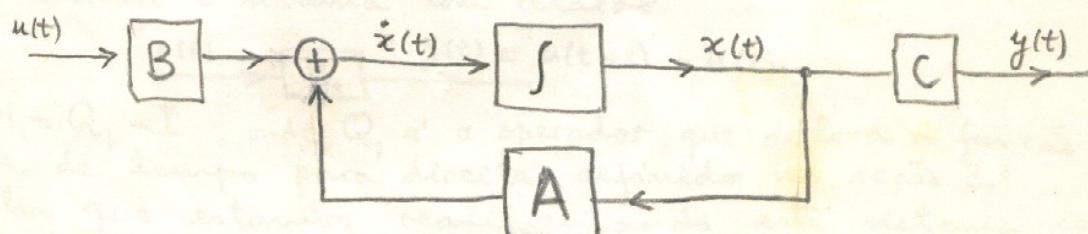
Para um sistema de 1 entrada e 2 saídas com 2 estados temos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$



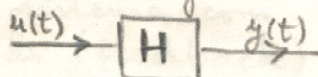
É claro que a medida que o número de estados e/ou o número de entradas e saídas aumentam o diagrama acima vai se tornando cada vez mais complexo. No entanto, os detalhes das conexões acima só interessam quando se vai fazer uma simulação analógica. Caso contrário se costuma representar o sistema na forma mais compacta:



que é chamada diagrama em blocos.

3.5 - Sistemas compostos

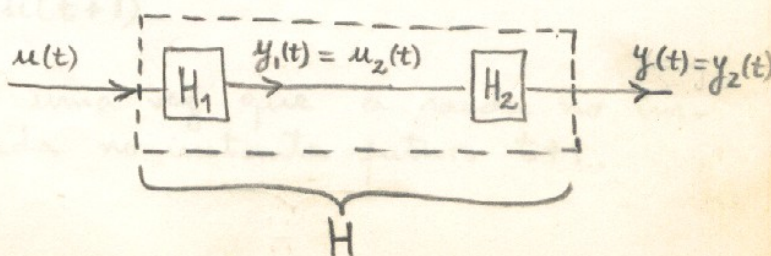
O primeiro diagrama de blocos que nós vimos foi a caixa-preta



Agora vamos analisar a descrição entrada-saída de três tipos de acoplamentos de sistemas:

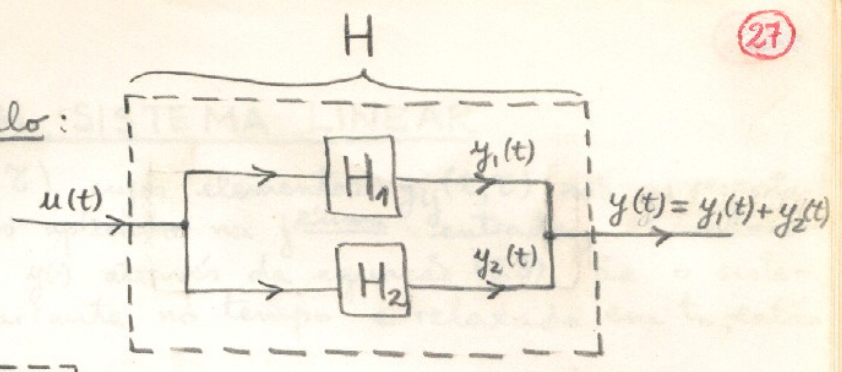
i) Acoplamento em série

$$H = H_2 H_1$$

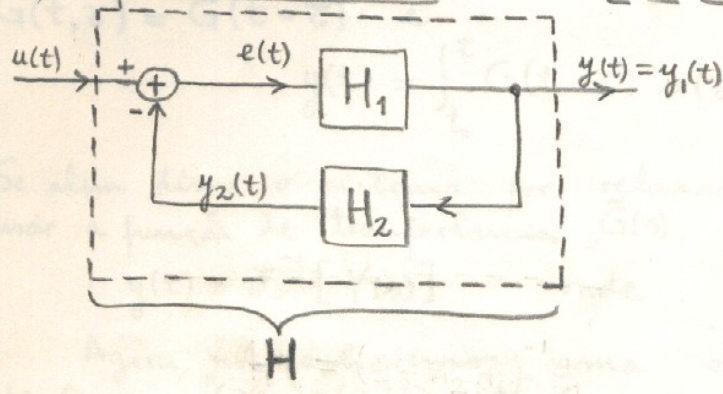


ii) Acoplamento em paralelo:

$$H = H_1 + H_2$$



iii) Acoplamento Feedback:



$$\begin{cases} e(\cdot) = u(\cdot) - H_2 y(\cdot) \\ y(\cdot) = H_1 e(\cdot) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(\cdot) = H_1 u(\cdot) - H_1 H_2 y(\cdot)$$

$$\Rightarrow (I + H_1 H_2) y(\cdot) = H_1 u(\cdot)$$

$$\Rightarrow y(\cdot) = \underbrace{(I + H_1 H_2)^{-1} H_1}_H u(\cdot)$$

Alternativamente,

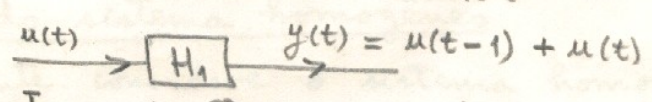
$$\begin{cases} e(\cdot) + H_2 H_1 e(\cdot) = u(\cdot) \\ y(\cdot) = H_1 e(\cdot) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(\cdot) = \underbrace{H_1 (I + H_2 H_1)^{-1}}_H u(\cdot)$$

Portanto,

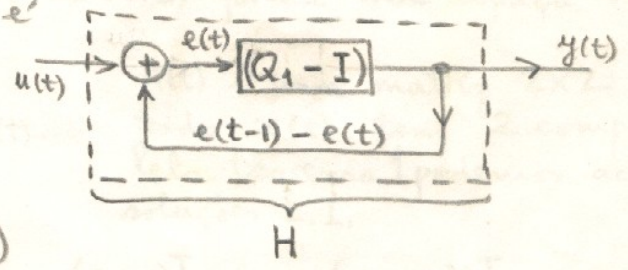
$$H = (I + H_1 H_2)^{-1} H_1 = H_1 (I + H_2 H_1)^{-1}$$

Exemplo: Considere o sistema com retardo



Portanto $H_1 = Q_1 - I$, onde Q_1 é o operador que desloca a função de 1 unidade de tempo para direita, definido na seção 3.1.

Suponha que estamos realimentando este sistema com a própria saída $y(t)$, isto é $H_2 = 1$.



É fácil de deduzir que para o sistema com realimentação (feedback)

$$H = (I - Q_{-1})$$

ou seja,

$$y(t) = u(t) - u(t+1)$$

e portanto é não-causal uma vez que a saída no instante t depende da entrada no instante futuro $t+1$.

4. SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Se a matriz $G(t, \tau)$, cujos elementos $g_{ij}(t, \tau)$ são as respostas na i -ésima saída ao impulso aplicado na j -ésima entrada, é conhecida, então podemos achar $y(\cdot)$ através da equação (3.3). Se o sistema é linear, causal, invariante no tempo e relaxado em t_0 , então $G(t, \tau) = G(t - \tau)$ e

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t - \tau) u(\tau) d\tau.$$

Se além disso o sistema for relaxado em $t_0 = 0$, então podemos usar a função de transferência $\tilde{G}(s)$.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \quad \text{onde} \quad Y(s) = \tilde{G}(s) U(s).$$

Agora nós acharemos uma expressão para a equação dinâmica (3.12)-(3.13), isto é,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (4.2)$$

A solução $x(t)$ irá depender de t, t_0, x_0 e $u(\cdot)$. Sendo assim usaremos a notação

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$$

para representar a solução de (4.1) quando $x(t_0) = x_0$ e a entrada $u(\cdot)$ é aplicada em $[t_0, \infty)$.

4.1 - Solução do sistema homogêneo

Primeiramente considere o sistema homogêneo:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (4.3)$$

Teor 1: O conjunto de soluções de (4.3) forma um espaço vetorial de dimensão n .

Exemplo:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}}_{A(t)} x(t)$$

$A(t)$ é uma matriz 2×2 e o estado $x(t)$ tem 2 componentes. Pelo teorema 1 podemos achar 2 soluções L.I.

Uma possibilidade é escolher $(0 \ 1)^T$ e $(2 \ t^2)^T$.

Outro exemplo: $\dot{x}(t) = 0 x(t)$ onde 0 é uma matriz $n \times n$.

Pelo teorema podemos encontrar n soluções L.I. De fato, qualquer conjunto de n elementos do $\mathbb{R}^n$ que seja L.I. é uma possibilidade.

Def: Matriz Fundamental $\Psi(t)$ de (4.3) é qualquer matriz $n \times n$ cujas colunas são soluções L.I. de (4.3).

Exemplo $\Psi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}$ é uma possível matriz fundamental para o sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ do exemplo acima. Outra matriz fundamental possível seria $\Psi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4+t^2 \end{bmatrix}$. No entanto a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2t^2 & t^2 \end{bmatrix}$ não é uma matriz fundamental porque embora suas colunas sejam soluções de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, elas não são L.I.

É fácil de verificar que se $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema (4.3), então $\Psi(t)$ satisfaz

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t) \quad (4.4)$$

e $\Psi(t_0)$ é uma matriz de coeficientes reais não-singular, isto é

$$\det \Psi(t_0) \neq 0. \quad (4.5)$$

Na realidade temos o seguinte resultado:

Teor. 2: $\Psi(t)$ é matriz fundamental de (4.3) se e somente se $\Psi(t)$ satisfaz (4.4) p/ todo t e (4.5) p/ algum t_0 .

Teor. 3: Se $\Psi(t)$ é matriz fundamental, então $\Psi(t_0)$ é não singular para todo $t_0 \in (-\infty, \infty)$.

Como resultado do Teorema 3 nós sabemos que $\Psi^{-1}(t_0)$ existe para todo t_0 . Portanto podemos definir

Def: Matriz de Transição $\Phi(t, t_0)$ de (4.3)

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) \quad \text{para todo } t, t_0 \in (-\infty, \infty)$$

Teor. 4: A matriz de transição de (4.3) é única. Depende apenas de $A(t)$. $\Phi(t, t_0)$ não depende da escolha da matriz fundamental $\Psi(t)$.

Este resultado segue do fato que 2 matrizes fundamentais de (4.3) quaisquer, $\Psi(t)$ e $\Psi'(t)$ satisfazem $\Psi(t) = \Psi'(t)P$ para alguma matriz P inversível.

Propriedades de $\Phi(t, t_0)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \Phi(t, t) = I \\ \text{ii) } \Phi^{-1}(t, t_0) = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t) = \Phi(t_0, t) \\ \text{iii) } \Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{para todo} \\ t, t_0, t_1 \text{ e } t_2 \in (-\infty, \infty) \end{array}$$

Exemplo da matriz de transição de um sistema: Tomando novamente o sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ do exemplo acima onde $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$, qualquer que seja a matriz fundamental $\Psi(t)$ escolhida, $\Phi(t, t_0)$ será dada por $\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) & 1 \end{bmatrix}$.

Teor. 5: A matriz de transição $\Phi(t, t_0)$ de (4.3) é a única solução de $\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$, $\Phi(t_0, t_0) = I$. (4.6)

Neste ponto nós estamos prontos para escrever a solução do sistema

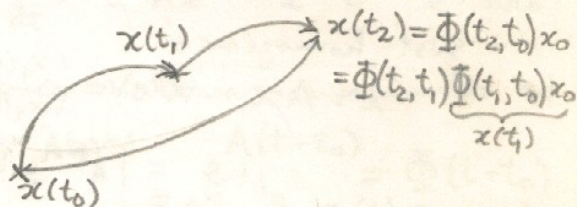
homogêneo com condições iniciais $x(t_0) = x_0$.

Teor 6: $\phi(t, t_0, x_0, 0) = \Phi(t, t_0) x_0$.

Portanto a matriz de transição $\Phi(t, t_0)$ de (4.3) governa a evolução de $x(t)$ quando $x(t_0) = x_0$. Ou seja, $\Phi(t, t_0)$ governa o estado do sistema (4.1) quando $u(\cdot) = 0$.

A interpretação da propriedade (iii), por exemplo, é que

$$\phi(t_2, t_0, x_0, 0) = \phi(t_2, t_1, \underbrace{\phi(t_1, t_0, x_0, 0)}_{x(t_1)}, 0).$$



Teor 7: Se $A(t)$ e $\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right)$ comutam, então a única solução de (4.6) é dada por $\Phi(t, t_0) = e^{\left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right]}$ (4.7)

Este teorema diz que se

$$A(t) \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right) = \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right) A(t), \quad (4.8)$$

então $\Phi(t, t_0)$ dada por (4.7) é a matriz de transição de (4.3).

Observação importante: Quando $A(t)$ é uma matriz diagonal, ou então quando $A(t) = A$ (independente de t), a equação (4.8) é satisfeita.

4.2 - Solução da equação dinâmica

Teor 8: A solução de (4.1) é dada por

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) &= \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \\ &= \Phi(t, t_0) \left[x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

onde $\Phi(t, t_0)$ é a matriz de transição de (4.3), ou seja, $\Phi(t, t_0)$ é a única solução de (4.6).

Se $u(\cdot) = 0$ temos: $\phi(t, t_0, x_0, 0) = \Phi(t, t_0) x_0$ (já visto no teorema 6)

Se $x_0 = 0$ temos: $\phi(t, t_0, 0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$

Portanto,

$$\phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \underbrace{\phi(t, t_0, x_0, 0)}_{\text{transiente ou resposta livre}} + \underbrace{\phi(t, t_0, 0, u(\cdot))}_{\text{regime estacionário ou resposta forçada}}$$

Corolário: A saída $y(t)$ em (4.2) é dada por

$$y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

Se $x_0 = 0$, temos que: $G(t, \tau)$ definido em (3.7).

$$y(t) = \int_{t_0}^t \left[C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) \right] u(\tau) d\tau$$

Sist. homogêneo

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

Solução $\rightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{At}$

Sist. homogêneo

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

Solução $\rightarrow x(t) = e^{At} x_0$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

Solução $x(t) = x_0 e^{At} + \int_0^t e^{A(t-z)} B u(z) dz$

Sist. c/ controle $u(t)$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

Solução $x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-z)} B u(z) dz$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$u(t) = \text{degrau unitário}$

Sist. homogêneo

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^t \\ e^t + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Sist. c/ controle $u(t)$

$$x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3e^t \\ e^t + 2e^{-2t} \end{bmatrix}}_{e^{At} x_0} + \int_0^t \underbrace{\begin{bmatrix} e^{(t-z)} & 0 \\ \frac{1}{3}(e^{(t-z)} - e^{-2(t-z)}) & e^{-2(t-z)} \end{bmatrix}}_{e^{A(t-z)} B u(z)} \underbrace{\hat{u}(z)}_{=1} dz =$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^t \\ e^t + 2e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (e^t - 1) \\ -\frac{1}{2} + \frac{e^t}{3} + \frac{e^{-2t}}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4e^t - 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}e^t + \frac{13}{6}e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Note que pl } t=0 \\ = x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

cond. iniciais

Observação: $y = Cx$

Pl Sist. homogêneo

$$y = C e^{At} x_0$$

Pl Sist. c/ controle $u(t)$

$$y(t) = C e^{At} x_0 + \int_0^t C e^{A(t-z)} B u(z) dz$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sist. homogêneo

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{At} x_0$$

$$= e^t + 2e^{-2t}$$

Sist. c/ controle $u(t)$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e^{At} x_0 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^t e^{A(t-z)} B u(z) dz$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{3}e^t + \frac{13}{6}e^{-2t}$$

4.3 - Solução de sistemas invariantes no tempo

Para sistemas invariantes no tempo $A(t)=A$, $B(t)=B$ e $C(t)=C$, conforme vimos na seção 3.2. Neste caso uma possível matriz fundamental $\Psi(t)$ é dada por

$$\Psi(t) = e^{At}$$

Isto segue do teorema 2 uma vez que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ e e^{At_0} é não singular para $t=0$.

Portanto a matriz de transição para sistemas invariantes no tempo tem a forma

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = e^{A(t-t_0)} = \Phi(t-t_0).$$

Aliás, este resultado também poderia ser obtido pelo teorema 7 juntamente com a observação que o segue.

Logo,

$$\phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-z)} B u(z) dz \quad (4.9)$$

Se $t_0=0$, a solução do sistema linear invariante no tempo é então dada por

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t, 0, x_0, u(\cdot)) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-z)} B u(z) dz & (4.10) \\ y(t) = C e^{At} x_0 + C e^{At} \int_0^t e^{-Az} B u(z) dz & (4.11) \end{cases}$$

Se $x_0=0$, temos que

$$y(t) = \int_0^t \underbrace{C e^{A(t-z)} B}_{G(t,z)} u(z) dz \quad (4.12)$$

e portanto a matriz

$G(t,z) = G(t-z)$ = matriz resposta ao impulso, dada por (3.8).

Tomando a transf. de Laplace de (4.10) e (4.11),

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} B U(s) \\ Y(s) = C(sI - A)^{-1} x_0 + C(sI - A)^{-1} B U(s) \end{cases}$$

Quando $x_0=0$, temos a matriz de transferência $\tilde{G}(s)$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1} B}_{\tilde{G}(s)} U(s).$$

conforme já havia sido obtida em (3.18).

5. CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Primeiramente introduziremos o conceito de "controlabilidade" e "alcançabilidade".

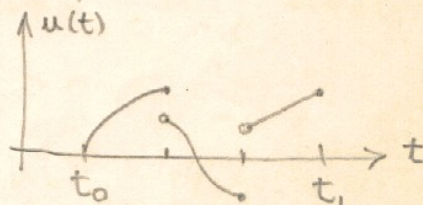
Def. Um estado x_0 é dito controlável para x_1 no tempo $t_0 > 0$ se $\exists t_1 \geq t_0$ e um controle $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tal que a expressão

$$x_1 = \phi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)) \quad (5.1)$$

é satisfeita.

Def. Um estado x_1 é dito alcançável de x_0 no tempo $t_1 > 0$ se $\exists t_0 > 0$, $t_0 \leq t_1$, e um controle $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tal que a expressão (5.1) é satisfeita.

$\mathcal{U}$ = espaço das funções contínuas em intervalos definidas em $[t_0, t_1]$



(exemplo de uma função $u(\cdot) \in \mathcal{U}$)

Considere o sistema linear:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

então,

$$\phi(t, 0, x_0, u(\cdot)) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Def. O sistema é dito controlável se qualquer estado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é controlável para qualquer estado $x_1 \in \mathbb{R}^n$ em qualquer tempo $t > 0$.

Def. O sistema é dito alcançável se qualquer estado $x_1 \in \mathbb{R}^n$ é alcançável de qualquer estado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ em qualquer tempo $t > 0$.

Como nós estamos considerando apenas sistemas lineares e invariantes no tempo (uma vez que $A(t) = A$ e $B(t) = B$), nós teremos alguns resultados que permitem checar controlabilidade e alcançabilidade via as matrizes A e B . Além disso, controlabilidade e alcançabilidade são conceitos equivalentes p/ esse tipo de sistemas (lineares e invariantes no tempo).

Def. $\mathcal{R}(t) = \{ \phi(t, 0, 0, u(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{U} \}$

$\mathcal{L}(t) = \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} \text{ tal que } \phi(t, 0, x_0, u(\cdot)) = 0 \}$