Integrais

A integral indefinida de uma função f(t) é representada como

$$\int f(\tau)\cdot d\tau$$

Por outro lado, a integral definida, representada como

$$\int_a^b f(\tau)\cdot d\tau\,, \qquad \int_{-\infty}^b f_3(\tau)\cdot d\tau \qquad \text{ou} \qquad \int_a^\infty f(\tau)\cdot d\tau$$

faz a Soma de Riemann que calcula a área sob a curva em m intervalo bem definido como por exemplo:

[a , b] ,] -∞ , b] ou [a , ∞ [.

Este nome acima é dado em alusão ao matemático alemão *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826-1866).

A integral é um processo inverso do da derivada de funções pois,

$$\int f'(t)\,dt = \int \frac{df}{dt}(t)\ dt = \int \frac{df(t)}{dt}\ dt = \int df = f(t) + C$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\int f(t)\cdot dt\right) = f(t)\,.$$

Mais precisamente:

$$F(t) = \int_a^t f(t)\cdot dt$$

é chamada de primitiva de f(t).

Este resultado é chamado de Teorema Fundamental do Cálculo e faz a interligação entre o Cálculo Diferencial (secção anterior) e o Cálculo Integral (desta secção).

Algumas regras de integração de funções em geral

$$\int a\,f(t)\,dt = a\cdot\int f(t)\,dt + C$$ (regra da homogeneidade)

$$\int [\,f(t)+g(t)\,]\,dt = \int f(t)\,dt + \int g(t)\,dt + C$$ (regra da aditividade)

$$\int [\,f'(t)\cdot g(t)\,]\,dt = f(t)\cdot g(t) + \int f(t)\cdot g'(t)\,dt$$ (regra da integral por partes)

Se definirmos

$$u(t) = g(t) \qquad \text{e} \qquad v(t) = f(t)$$

então

$$du = g'(t) \cdot dt \qquad \text{e} \qquad dv = f'(t) \cdot dt$$

e a regra da integral por partes pode ser escrita doutra forma:

$$\int u \cdot dv \;=\; uv \;-\int v\, du$$

Por outro lado, se

$$u(t) = f(t) \qquad \text{e} \qquad du = f'(t) \cdot dt\,,$$

então a integral definida é calculada como:

$$\int_a^b du \;=\; u\Big]_a^b \;=\; u(b) - u(a)$$

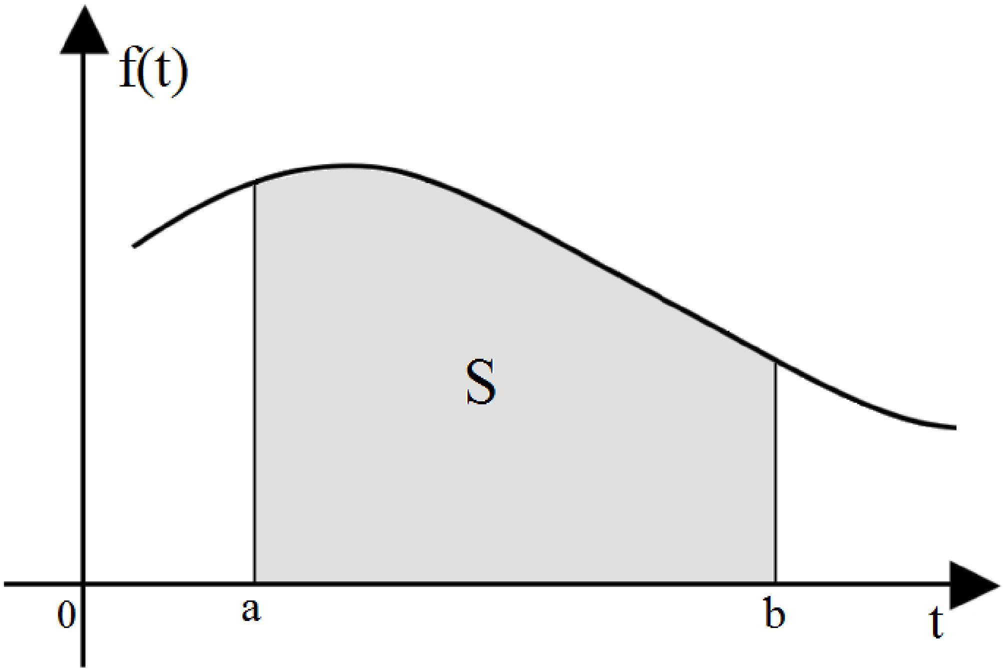

Fig. 1 – A área S sob a curva f(t) no intervalo definido [a, b].

A integral definida desde a até b da função f

$$\int_a^b f(\tau) \cdot d\tau = S$$

é a área S sob a curva, conforme ilustrado na figura 1.

A figura 2 mostra dois exemplos da integral definida desde a até b da função f, onde áreas abaixo do eixo das abcissas contam negativamente.

$$\int_a^b f_1(\tau)\cdot d\tau = S_1 - S_2$$

e

$$\int_a^b f_2(\tau)\cdot d\tau = S_1 - S_2 + S_3$$

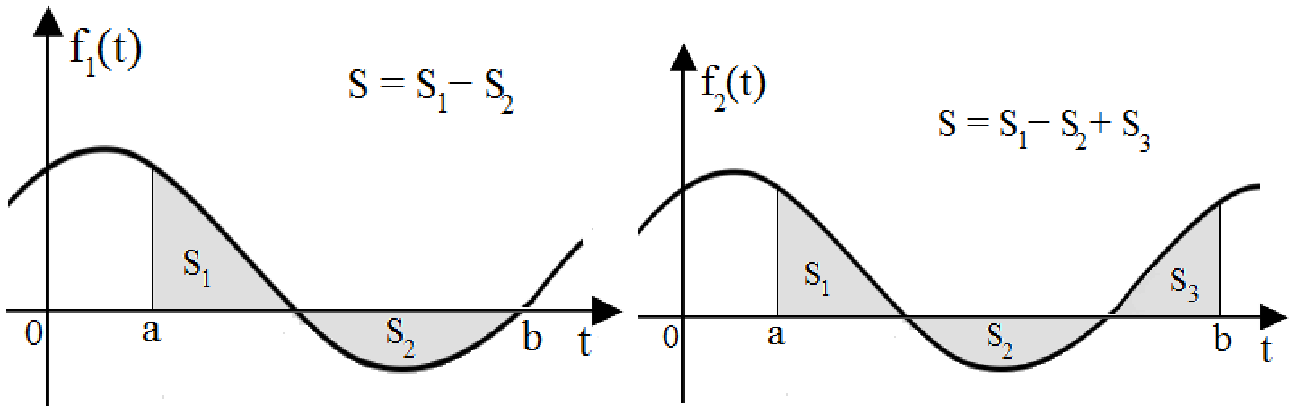

Fig. 2 – Dois exemplos da área sob a curva f(t) no intervalo definido [a, b]. As áreas abaixo do eixo das abcissas contam negativamente.

A figura 3 mostra dois exemplos da integral definida em intervalos infinitos:] -∞, b] e [a , ∞ [.

$$\int_{-\infty}^b f_3(\tau)\cdot d\tau = S' \qquad \text{e} \qquad \int_a^\infty f_4(\tau)\cdot d\tau = S''$$

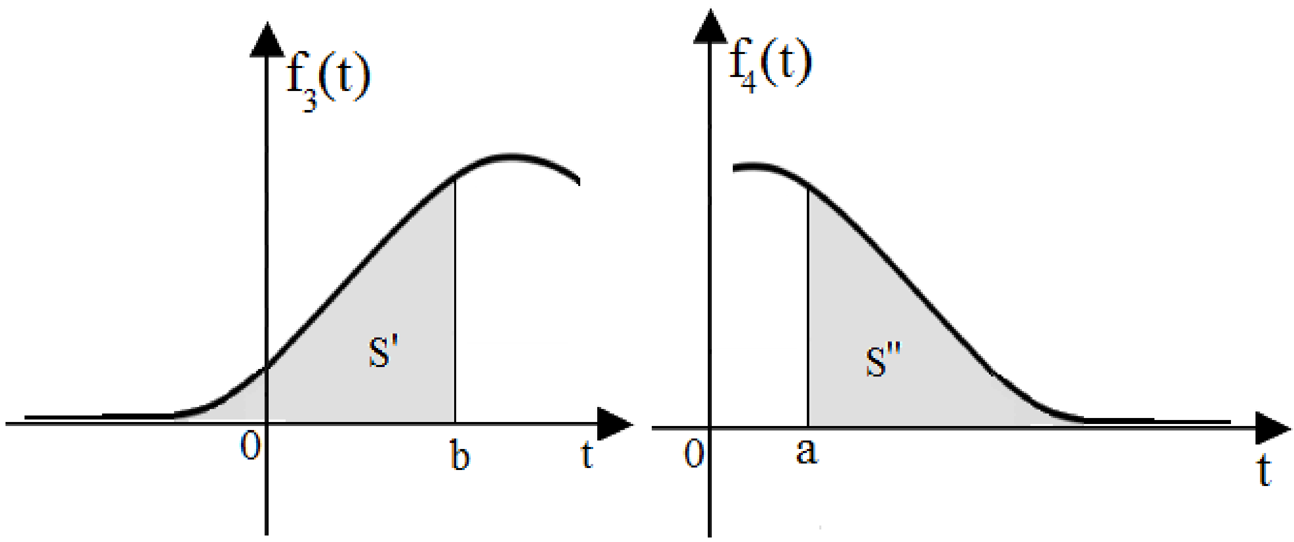

Fig. 3 – Dois exemplos da área sob a curva f(t) definidos em intervalos infinitos:] -∞ , b] e [a , ∞ [.

Apresentamos agora uma tabela das integrais das principais funções.

- Integrais de funções racionais:

$$\int du = u + C$$

$$\int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)} + C, \qquad n \neq 1$$

$$\int u^{-1} \cdot du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int \frac{1}{u^2 + a^2} \cdot dt = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} \cdot = \frac{1}{2a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C, \qquad u^2 > a^2$$

- Integrais de funções irracionais:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} \cdot = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} \cdot = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u \cdot \sqrt{u^2 - a^2}} \cdot = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arc}\sec\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \cdot = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad u^2 < a^2$$

- Integrais de logaritmos:

$$\int \log_b (a \cdot t)\, dt = t \cdot \log_b (a \cdot t) - t \cdot \log_b e + C \qquad (*)$$

$$\int \ln(a \cdot t)\, dt = t \cdot \ln(a \cdot t) - t + C$$

[caso particular <u>$b = e$</u> da integral (*) acima]

$$\int t^n \cdot \ln(a \cdot t)\, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(a \cdot t) - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \qquad n \neq 1$$

$$\int t^{-1} \cdot \ln(a \cdot t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot [\ln(a \cdot t)]^2 + C$$

$$\int \frac{dt}{t\cdot\ln(a\cdot t)} = \ln\left[\ln(a\cdot t)\right] + C$$

Integrais de funções exponenciais:

$$\int a^u\cdot du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C, \qquad a\neq 1, \quad a>0 \qquad\qquad (**)$$

$$\int e^u\cdot du = e^u + C$$ [caso particular <u>$a = e$</u> da integral (**) acima]

$$\int b^{at}\,dt = \frac{1}{a}\cdot\frac{b^{at}}{\ln(b)} + C \qquad\qquad (***)$$

$$\int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{at} + C$$ [caso particular <u>$b = e$</u> da integral (***) acima]

$$\int t\cdot e^{at}\,dt = \frac{e^{at}}{a^2}(at-1) + C$$

$$\int t^n\cdot e^{at}\,dt = \frac{1}{a}t^n e^{at} - \frac{n}{a}\int t^{n-1}e^{at}\,dt$$

$$\int t^n\cdot b^{at}\,dt = \frac{t^n\,b^{at}}{a\cdot\ln(b)} - \frac{n}{a\cdot\ln(b)}\int t^{n-1}b^{at}\,dt\,, \qquad b>0, \quad b\neq 1$$

$$\int e^{at}\cdot\mathrm{sen}(b\,t)\,dt = \frac{e^{at}}{\left(a^2+b^2\right)}\left[a\cdot\mathrm{sen}(bt) - b\cdot\cos(bt)\right] + C$$

$$\int e^{at}\cdot\cos(b\,t)\,dt = \frac{e^{at}}{\left(a^2+b^2\right)}\left[a\cdot\cos(bt) + b\cdot\mathrm{sen}(bt)\right] + C$$

Integrais de funções trigonométricas:

$$\int \mathrm{sen}(u)\,du = -\cos(u) + C$$

$$\int \cos(u)\,du = \mathrm{sen}(u) + C$$

$$\int \mathrm{tg}(u)\,du = \ln\left(\sec(u)\right) + C$$

$$\int \mathrm{cotg}(u)\,du = \ln\left|\mathrm{sen}(u)\right| + C$$

$$\int \sec(u)\cdot du = \int \frac{1}{\cos(u)}\cdot du = \ln\left|\sec(u)+\mathrm{tg}(u)\right| + C$$

$$\int \operatorname{cosec}(u)\cdot du = \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)}\cdot du = \ln\left|\operatorname{cosec}(u)-\operatorname{cotg}(u)\right| + C$$

$$\int \sec(u)\cdot\operatorname{tg}(u)\cdot du = \int \frac{\operatorname{tg}(u)}{\operatorname{sen}(u)}\cdot du = \sec(u) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}(u)\cdot\operatorname{cotg}(u)\cdot du = \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)\cdot\operatorname{tg}(u)}\cdot du = -\operatorname{cosec}(u) + C$$

$$\int \sec^2(u)\cdot du = \int \frac{1}{\cos^2(u)}\cdot du = \operatorname{tg}(u) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(u)\cdot du = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(u)}\cdot du = -\operatorname{cotg}(u) + C$$

$$\int \operatorname{sen}(a\,t)\,dt = \frac{-1}{a}\cos(a\,t) + C$$

$$\int \cos(a\,t)\,dt = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(a\,t) + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2(a\,t)\,dt = \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2a\,t)}{4a} + C$$

$$\int \cos^2(a\,t)\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2a\,t)}{4a} + C$$

- Fórmula de recorrência para integrais de potências de funções trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen}^n(a\cdot u)\,du = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1}(a\cdot u)\cdot\cos(a\cdot u)}{n\cdot a} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

$$\int \cos^n(a\cdot u)\,du = \frac{\cos^{n-1}(a\cdot u)\cdot\operatorname{sen}(a\cdot u)}{n\cdot a} + \frac{n-1}{n}\cdot\int \cos^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

$$\int \operatorname{tg}^n(a\cdot u)\,du = \frac{\operatorname{tg}^{n-1}(a\cdot u)}{a\cdot(n-1)} - \int \operatorname{tg}^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

$$\int \operatorname{cotg}^n(a\cdot u)\,du = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1}(a\cdot u)}{a\cdot(n-1)} - \int \operatorname{cotg}^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

$$\int \sec^n(a\cdot u)\,du = \frac{\sec^{n-2}(a\cdot u)\cdot\operatorname{tg}(a\cdot u)}{a\cdot(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\cdot\int \sec^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

$$\int \operatorname{cosec}^n(a\cdot u)\,du = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2}(a\cdot u)\cdot\operatorname{cotg}(a\cdot u)}{a\cdot(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\cdot\int \operatorname{cosec}^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

Integrais de outras funções trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen}(a\,t)\cdot\cos(b\cdot t)\,dt = -\frac{\cos[(a+b)\,t]}{2\,(a+b)} - \frac{\cos[(a-b)\,t]}{2\,(a-b)} + C, \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen}(a\cdot t)\cdot\operatorname{sen}(b\cdot t)\,dt = \frac{\operatorname{sen}[(a-b)\,t]}{2\,(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}[(a+b)\,t]}{2\,(a+b)} + C, \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos(a\cdot t)\cdot\cos(b\cdot t)\,dt = \frac{\operatorname{sen}[(a-b)\,t]}{2\,(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}[(a+b)\,t]}{2\,(a+b)} + C, \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen}(a\cdot t)\cdot\cos(a\cdot t)\,dt = -\frac{\cos(2\cdot a\cdot t)}{4\cdot a} + C$$

$$\int \operatorname{tg}(a\cdot t)\,dt = \int \frac{\operatorname{sen}(a\cdot t)}{\cos(a\cdot t)}\,dt = -\frac{1}{a}\cdot\ln\left|\cos(a\cdot t)\right| + C$$

$$\int \operatorname{cotg}(a\cdot t)\,dt = \int \frac{\cos(a\,t)}{\operatorname{sen}(a\,t)}\,dt = \frac{1}{a}\cdot\ln\left|\operatorname{sen}(a\,t)\right| + C$$

$$\int t\cdot\operatorname{sen}(a\cdot t)\,dt = -\frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(a\cdot t) - \frac{t}{a}\cos(a\cdot t) + C$$

$$\int t\cdot\cos(a\,t)\,dt = \frac{1}{a^2}\cos(a\,t) + \frac{t}{a}\sin(a\,t) + C$$

$$\int t^n\cdot\operatorname{sen}(a\,t)\,dt = -\frac{t^n}{a}\cos(a\,t) + \frac{n}{a}\int t^{n-1}\cos(a\,t)\,dt$$

$$\int t^n\cdot\cos(a\,t)\,dt = \frac{t^n}{a}\operatorname{sen}(a\,t) - \frac{n}{a}\int t^{n-1}\operatorname{sen}(a\,t)\,dt$$

Integrais de funções hiperbólicas:

$$\int \operatorname{senh}(at)\,dt = \frac{1}{a}\cdot\cosh(at) + C$$

$$\int \cosh(at)\,dt = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{senh}(at) + C$$

$$\int \operatorname{senh}^2(at)\,dt = \frac{\operatorname{senh}(2at)}{4a} - \frac{t}{2} + C$$

$$\int \cosh^2(at)\,dt = \frac{\operatorname{senh}(2at)}{4a} + \frac{t}{2} + C$$

$$\int t\cdot\operatorname{senh}(at)\,dt = \frac{t}{a}\cdot\cosh(at) - \frac{1}{a^2}\cdot\operatorname{senh}(at) + C$$

$$\int t \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{t}{a} \cdot \operatorname{senh}(at) - \frac{1}{a^2} \cdot \cosh(at) + C$$

$$\int t^n \cdot \operatorname{senh}(at)\, dt = \frac{t^n}{a} \cdot \cosh(at) - \frac{n}{a} \cdot \int t^{n-1} \cdot \cosh(at)\, dt + C$$

$$\int t^n \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{t^n}{a} \cdot \operatorname{senh}(at) - \frac{n}{a} \cdot \int t^{n-1} \cdot \operatorname{senh}(at)\, dt + C$$

$$\int \tanh(at)\, dt = \int \frac{\operatorname{senh}(at)}{\cosh(at)}\, dt = \frac{1}{a} \cdot \ln\left[\cosh(at)\right] + C$$

$$\int \coth(at)\, dt = \int \frac{\cosh(at)}{\operatorname{senh}(at)}\, dt = \frac{1}{a} \cdot \ln\left|\operatorname{senh}(at)\right| + C$$

Integrais definidas:

$$\int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-t} \cdot dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty e^{-a x^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1} \cdot dt = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^3}{e^t - 1} \cdot dt = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \cdot dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t}\, dt = \Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{[função gama]}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(t) \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \cdot dt = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 2\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot n} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & \text{se n é inteiro par} \geq 2 \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(n-1)} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & \text{se n é inteiro ímpar} \geq 3 \end{cases}$$