

Derivadas

A teoria do cálculo diferencial é de autoria do físico e matemático inglês *Sir Isaac Newton* (1643-1727) e do filósofo e matemático alemão *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646-1716).

A notação das derivada de uma função $f(t)$ pode ser

$$\frac{df(t)}{dt} \quad (\text{devido à Newton})$$

ou

$$f'(t) \quad (\text{devido à Leibniz}).$$

A derivada de uma função $f(t)$ no instante t nos dá a *inclinação* (ou *declive*) de uma recta tangente à curva naquele instante.

Se $f(t)$ é crescente em $t = a$, então a derivada será positiva naquele instante

$$f'(a) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=a} > 0.$$

Isso é ilustrado na figura 1.

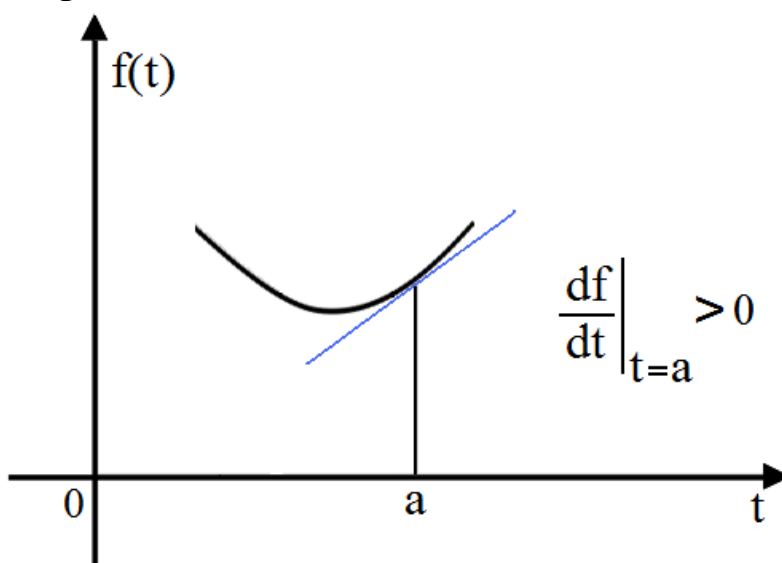


Fig. 1 – *Inclinação* positiva (ou *declive* positivo) da recta tangente à curva $f(t)$ no instante $t = a$.

Por outro lado, se $f(t)$ é decrescente em $t = a$, então a derivada será negativa naquele instante

$$f'(a) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=a} < 0.$$

Isso é ilustrado na figura 2.

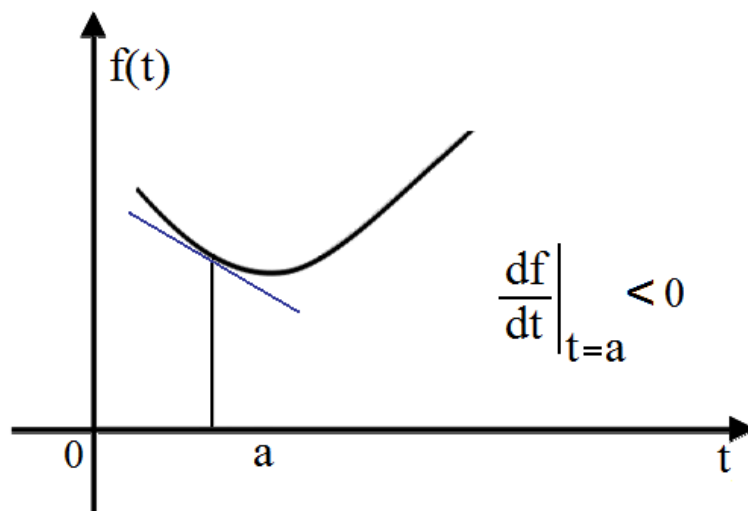


Fig. 2 – *Inclinação* negativa (ou *declive* negativo) da recta tangente à curva $f(t)$ no instante $t = a$.

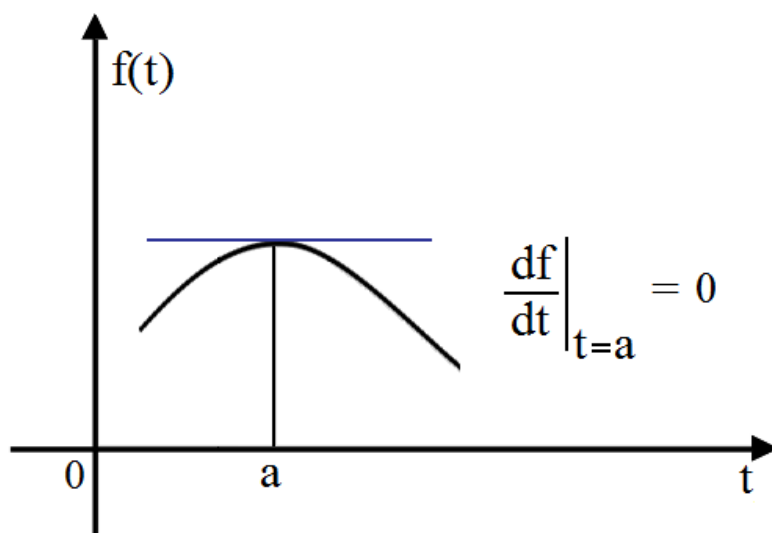


Fig. 3 – *Inclinação* nula (ou *declive* nulo) da recta tangente à curva $f(t)$ no instante $t = a$. Caso de máximo local.

Finalmente, se $f(t)$ não é crescente nem decrescente em $t = a$, então a derivada será zero naquele instante

$$f'(a) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=a} = 0.$$

Neste caso temos um máximo ou um mínimo local. Isso é ilustrado nas figuras 3 e 4.

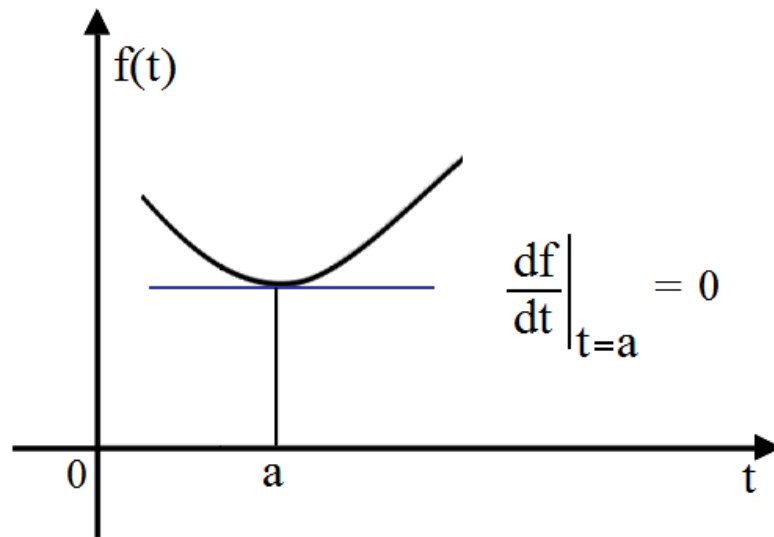


Fig. 4 – *Inclinação nula* (ou *declive nulo*) da recta tangente à curva $f(t)$ no instante $t = a$. Caso de mínimo local.

Algumas propriedades e regras das derivadas:

➡ Linearidade:

$$\frac{d(c \cdot f(t))}{dt} = c \cdot \frac{df(t)}{dt} = c \cdot f'(t) \quad (\text{homogeneidade})$$

$$\frac{d(f_1(t) + f_2(t))}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} + \frac{df_2(t)}{dt} = f_1'(t) + f_2'(t) \quad (\text{aditividade})$$

➡ Regra do produto:

$$\frac{d}{dt}(f(t) \cdot g(t)) = \frac{df(t)}{dt} \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{dg(t)}{dt} = f'(t) \cdot g(t) + g'(t) \cdot f(t)$$

➡ Regra do quociente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right) = \frac{g(t) \cdot \frac{df(t)}{dt} - f(t) \cdot \frac{dg(t)}{dt}}{g^2(t)} = \frac{g(t) \cdot f'(t) - f(t) \cdot g'(t)}{g^2(t)}$$

➡ Regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{df}{dg}(g(t)) \cdot \frac{dg(t)}{dt} = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

➤ Algumas derivadas de funções simples:

$$\frac{d}{dt} c = 0$$

$$\frac{d}{dt} (t^n) = n \cdot t^{n-1}$$

$$\frac{d}{dt} t = 1 \quad (\text{caso particular, } n = 1)$$

$$\frac{d}{dt} (c \cdot t) = c \quad (\text{aplicando a homogeneidade})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{d}{dt} (t^{-1}) = -t^{-2} = \frac{-1}{t^2} \quad (\text{caso particular, } n = -1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t^m} \right) = \frac{d}{dt} (t^{-m}) = -m \cdot t^{-m+1} = -m \cdot \frac{1}{t^{m+1}} \quad (\text{caso particular, } n = -m)$$

$$\frac{d}{dt} (\sqrt{t}) = \frac{d}{dt} (t^{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t \geq 0 \quad (\text{caso particular, } n = 1/2)$$

$$\frac{d}{dt} |t| = \frac{|t|}{t} = \text{sign}(t), \quad t \neq 0$$

➤ Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas:

$$\frac{d}{dt} c^t = c^t \cdot \ln c$$

$$\frac{d}{dt} e^t = e^t \quad (\text{caso particular, } c = e, \text{ a única função que é igual a própria derivada})$$

$$\frac{d}{dt} \log_c t = \frac{1}{t \cdot \ln c}$$

$$\frac{d}{dt} \ln t = \frac{1}{t} = t^{-1}, \quad t > 0 \quad (\text{caso particular, } c = e)$$

$$\frac{d}{dt} \ln |t| = \frac{1}{t} = t^{-1}$$

$$\frac{d}{dt} \ln t^t = t^t \cdot (1 + \ln t)$$

➤ Derivadas de funções trigonométricas:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sen}(t) = \cos(t)$$

$$\frac{d}{dt} \cos(t) = -\operatorname{sen}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tg}(t) = \sec^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

$$\frac{d}{dt} \sec(t) = \operatorname{tg}(t) \cdot \sec(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cotg}(t) = -\operatorname{cosec}^2(t) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(t)}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cosec}(t) = -\operatorname{cosec}(t) \cdot \operatorname{cotg}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsen}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccos}(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arctg}(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsec}(t) = \frac{1}{|t| \cdot \sqrt{t^2-1}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccotg}(t) = \frac{-1}{1+t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccosec}(t) = \frac{-1}{|t| \cdot \sqrt{t^2-1}}$$

✚ Derivadas de funções hiperbólicas:

$$\frac{d}{dt} \sinh(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \cosh(t) = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tgh}(t) = \operatorname{sech}^2(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sech}(t) = -\operatorname{tgh}(t) \cdot \operatorname{sech}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cotgh}(t) = -\operatorname{cossech}^2(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{csch}(t) = -\operatorname{cotgh}(t) \cdot \operatorname{cossech}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsenh}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccosh}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arctgh}(t) = \frac{1}{1 - t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsech}(t) = \frac{-1}{t\sqrt{1 - t^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcoth}(t) = \frac{1}{1 - t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsech}(t) = \frac{-1}{|t|\sqrt{1 + t^2}}$$