

Controlo Avançado

14

“Estimador assintótico”

J. A. M. Felippe de Souza

Neste capítulo continuaremos no estudo de
“Estimadores de Estado”,
 que foi iniciado no capítulo anterior.

A exemplo dos capítulos anteriores será analisado aqui o caso de sistemas lineares invariantes no tempo com uma entrada e uma saída.

Ou seja,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (14.1)$$

← $d = 0$

Notação:

Conforme introduzido no capítulo anterior, uma ESTIMATIVA do estado $\mathbf{x}(t)$ é representada por $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Semelhantemente, uma ESTIMATIVA de $\bar{\mathbf{x}}(t)$ é representada por $\hat{\bar{\mathbf{x}}}(t)$ e assim por diante.

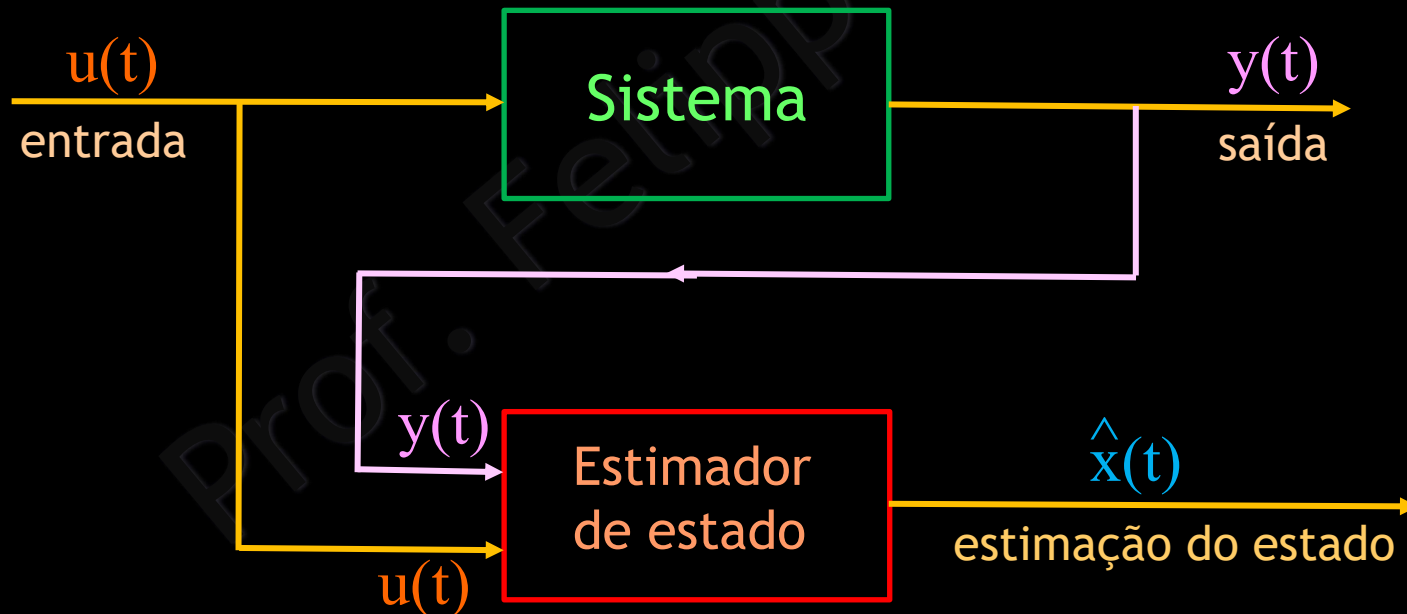
Um **ESTIMADOR ASSINTÓTICO** (também chamado de **ESTIMADOR** de Luemberger) tem como entradas:

$$u(t) \quad \text{e} \quad y(t)$$

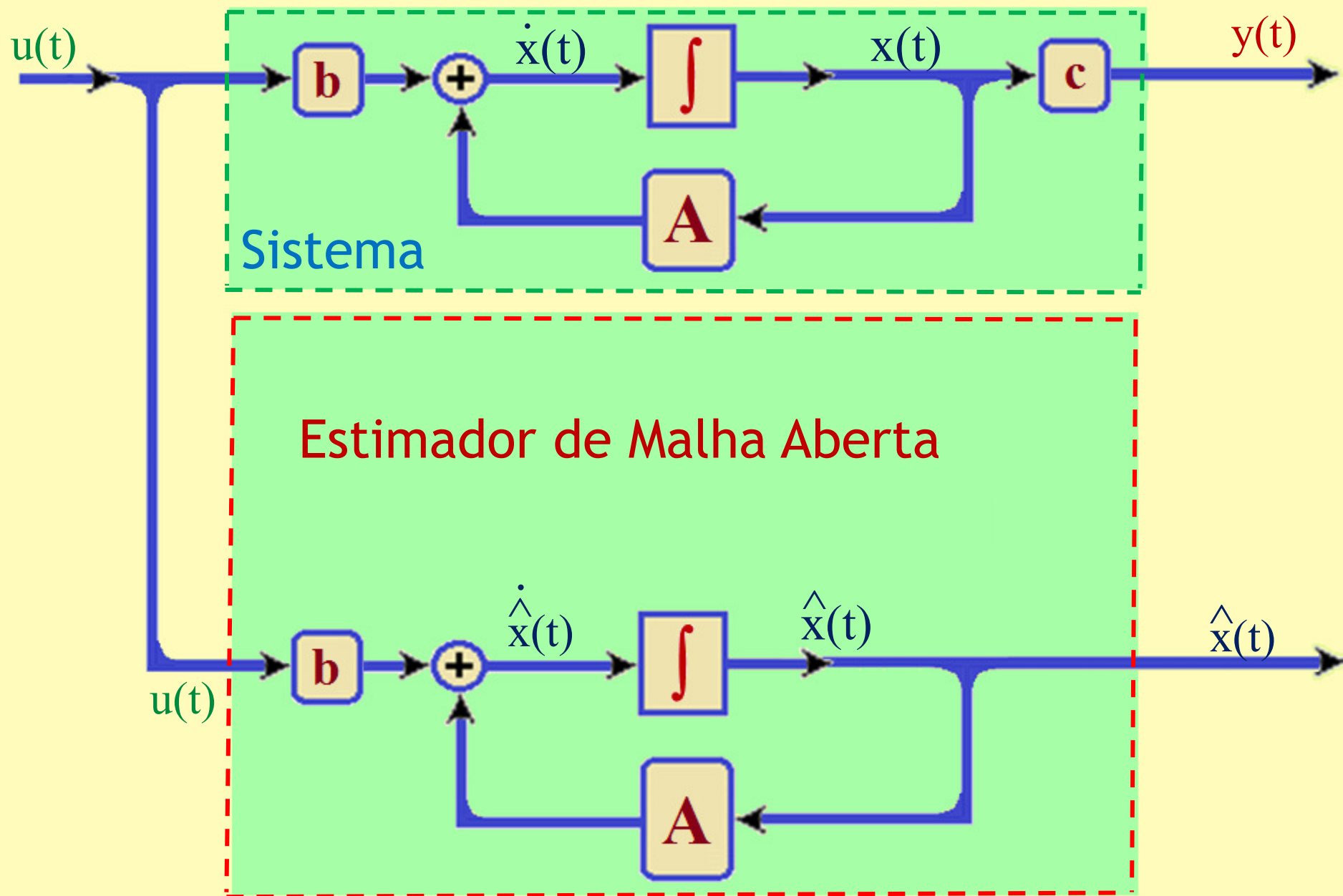
isto é, a **entrada** e a **saída** do *sistema original*, e tem como saída:

$$\hat{x}(t)$$

que é uma **ESTIMATIVA** do estado $x(t)$ do *sistema original*.

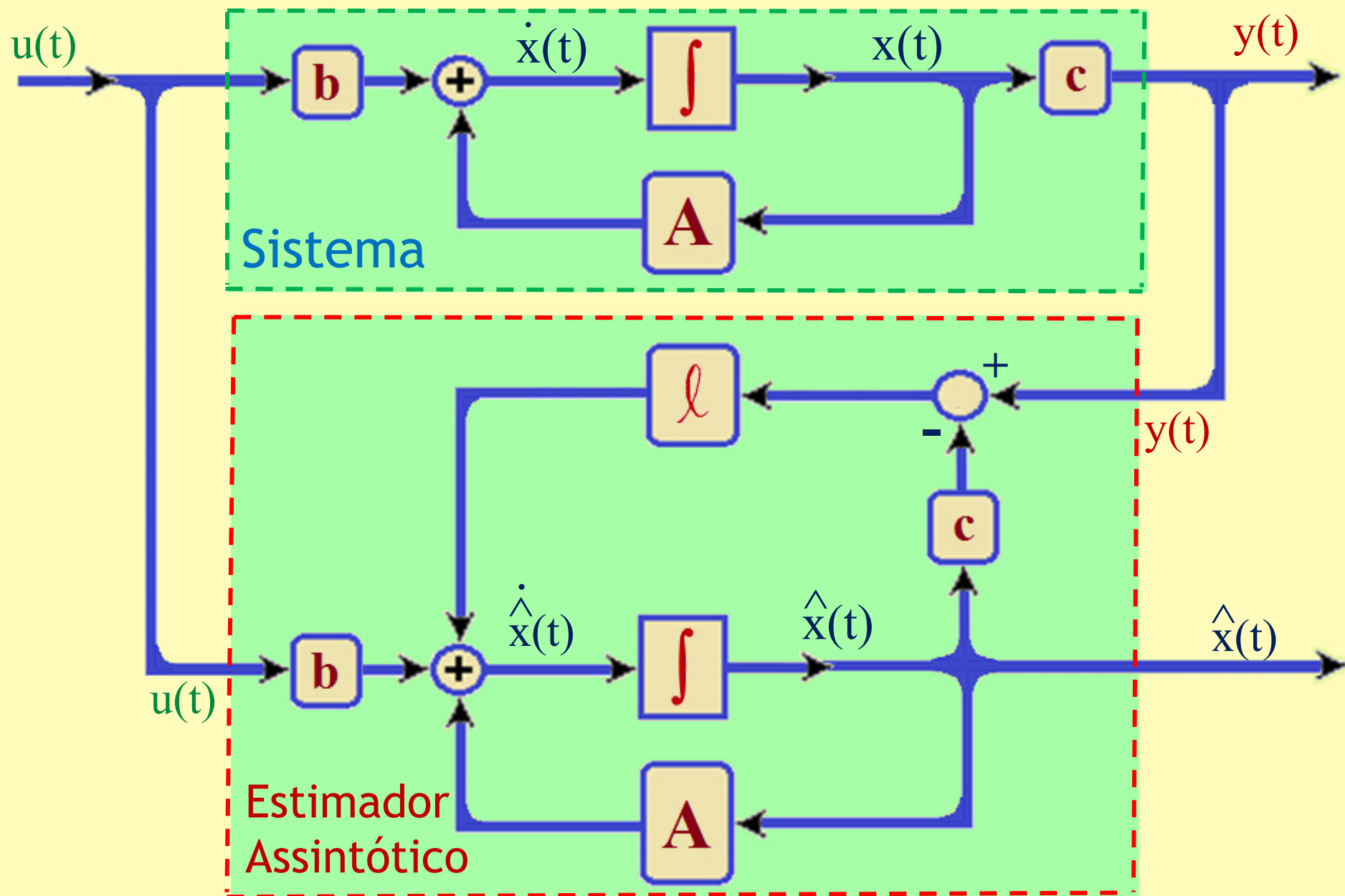


Começamos com o ESTIMADOR DE MALHA ABERTA do capítulo anterior:



Estimador assintótico

O ESTIMADOR ASSINTÓTICO, ou de Luemberger, tem o seguinte esquema:



No **ESTIMADOR ASSINTÓTICO**, ilustrado na figura acima, a saída $y = c \cdot x$ é comparada com $c \cdot \hat{x}$ e sua diferença

$$(c \cdot x - c \cdot \hat{x})$$

é usada para correção da entrada $b \cdot u$, após ser multiplicada pelo **vetor coluna**

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

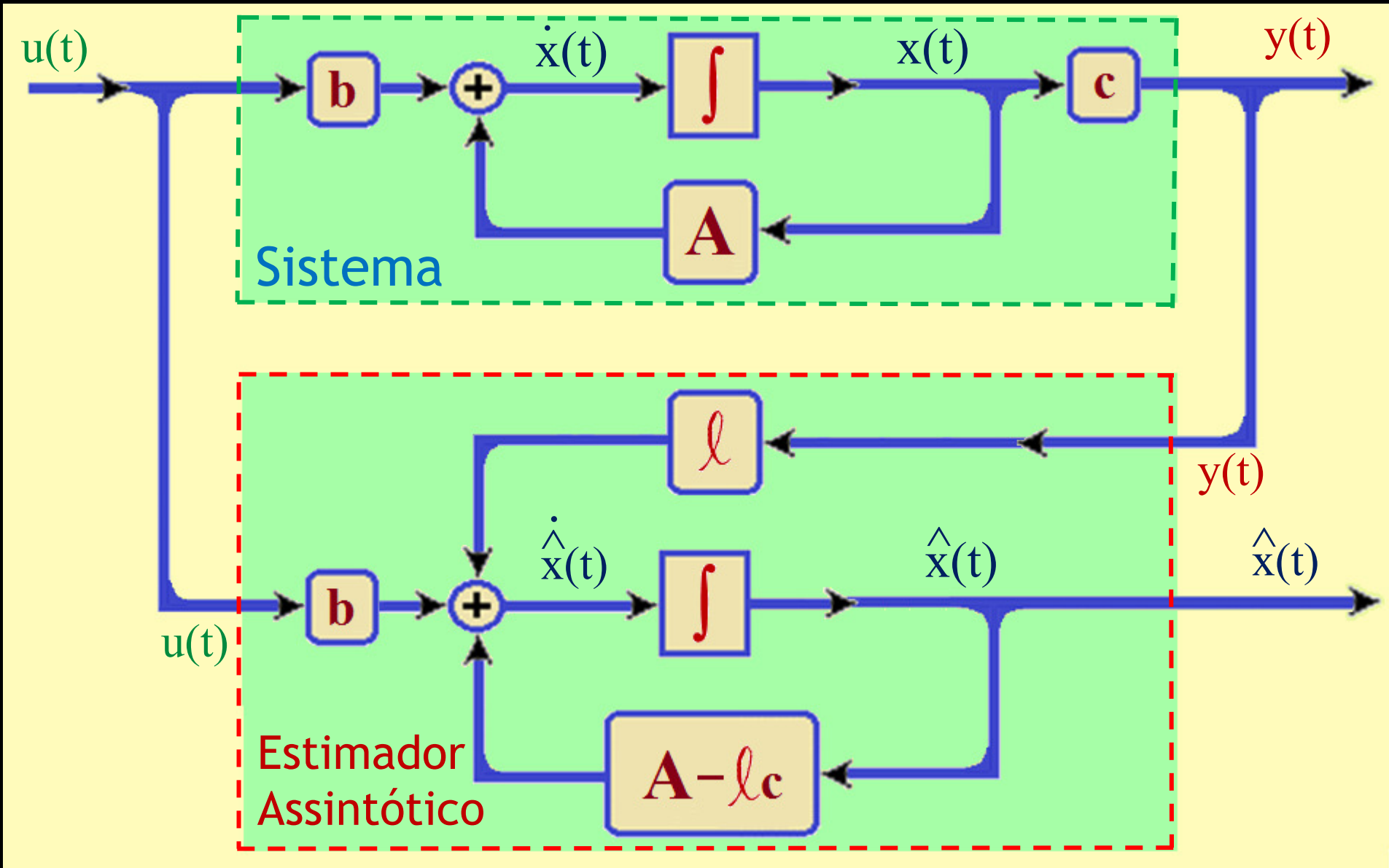
l é um
**vetor
coluna**

A *equação dinâmica* do **ESTIMADOR** é:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A \hat{x}(t) + l [y(t) - c \hat{x}(t)] + b u(t) \\ &= (A - l c) \hat{x}(t) + (l y(t) + b u(t)) \end{aligned} \quad (14.2)$$

Estimador assintótico

A figura abaixo é uma *representação equivalente* ao esquema anterior.



Com uma escolha adequada do vetor ℓ nos dará $\hat{\mathbf{x}}(t)$ cada vez mais próximo de $\mathbf{x}(t)$ a medida que t cresce.

Note que subtraindo-se $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$ de (14.2) menos $\dot{\mathbf{x}}(t)$ de (14.1) temos:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \ell [y(t) - \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}(t)] + \mathbf{b}u(t) & (14.2) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) & (14.1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) &= \\ &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \ell [y(t) - \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}(t)] + \cancel{\mathbf{b}u(t)} - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \cancel{\mathbf{b}u(t)} \\ &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \ell [y(t) - \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}(t)] \end{aligned}$$

Mas como $y(t) = c x(t)$, também da eq. (14.1), temos então:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) &= A \hat{x}(t) - A x(t) + \ell [c x(t) - c \hat{x}(t)] \\ &= A [\hat{x}(t) - x(t)] - \ell c [\hat{x}(t) - x(t)] \\ &= (A - \ell c) [\hat{x}(t) - x(t)]\end{aligned}\tag{14.3}$$

Define-se então $e(t)$ = erro de ESTIMAÇÃO no instante t , ou seja

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)\tag{14.4}$$

Então, pela eq. (14.3) acima, temos que

$$\dot{e}(t) = (A - \ell c) e(t)$$

Logo, escolhendo-se ℓ tal que os *autovalores* de $(A - \ell c)$ tenham parte real $-\sigma$, negativa, então as componentes de $e(t)$ tenderão para 0 (zero) numa razão de $e^{-\sigma t}$.

Mas de (14.4) conclui-se que

$$e(t) \rightarrow 0$$

equivale a

$$\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$$

$\hat{x}(t)$, a ESTIMAÇÃO do estado converge para o próprio estado $x(t)$

Portanto, escolhendo-se ℓ tal que $(A - \ell c)$ tenha os seus *autovalores* localizados no SPE, então a convergência do ESTIMADOR é garantida.

Teorema 1 – Se o sistema (14.1) é observável, então os *autovalores* de $(A - \ell c)$, ESTIMADOR ASSINTÓTICO de estado (14.2), podem ser escolhidos arbitrariamente.

Teorema 2 – Se o sistema for (14.1) ‘observável’, e

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

são os coeficientes de $\Delta(s) = \det(sI - A)$ e nós queremos que

$$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n,$$

sejam os coeficientes do *polinómio característico* de $(A - \ell c)$ então devemos escolher

$$\ell = P^{-1} \cdot \bar{\ell} \quad (14.5)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\ell} = [(\bar{\alpha}_n - \alpha_n) \quad \dots \quad (\bar{\alpha}_2 - \alpha_2) \quad (\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)]^T \end{array} \right. \quad (14.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = P^{-1} = V^{-1} \cdot \tilde{V} \end{array} \right. \quad (14.7)$$

Observação: Q acima é o mesmo definido em (11.7) e P em (11.6), no capítulo 11, assim como V e $\tilde{V}$, em (11.4) e (11.5), respectivamente.

Nota: O polinómio característico de $(A - \ell c)$ é, obviamente, o polinómio característico $\bar{\Delta}(s)$ do sistema (14.2), a equação dinâmica do ESTIMADOR do estado.

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(s) &= \det(s \cdot I - A + \ell c) = \\ &= s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \bar{\alpha}_2 s^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n\end{aligned}\tag{14.8}$$

O Teorema 1 acima mostra como escolher os autovalores desejados para o ESTIMADOR de estado (14.2), quando o sistema original (14.1) for 'observável'.

Portanto, um sistema 'observável' pode sempre ter um ESTIMADOR ASSINTÓTICO de estado escolhendo-se ℓ tal que $\bar{\Delta}(s)$ dado por (14.8) tenha raízes no SPE.

Com base nos Teorema 1 e 2 vamos apresentar 2 métodos para obter o vetor coluna ℓ e desta forma criar um ESTIMADOR ASSINTÓTICO de estado.

Dois métodos para obter ℓ

Tem-se A , c e quer se achar ℓ tal que $(A - \ell c)$ tenha como *autovalores*

$$\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n\}$$

I – Método Direto

Neste método, à semelhança do capítulo 12, primeiramente calcula-se $\bar{\Delta}(s)$, o *polinómio característico* de $(A - \ell c)$ em termos das n incógnitas $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, que são os coeficientes de ℓ .

$$\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix}$$

Primeiramente, (14.8) nos dá

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(s) &= \det(sI - A + \ell c) = \\ &= s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \bar{\alpha}_2 s^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n \end{aligned} \quad (14.8)$$

Como nós queremos que $(\mathbf{A} - \boldsymbol{\ell}\mathbf{c})$ tenha *autovalores*

$$\bar{\lambda}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

então o *polinómio característico* de $(\mathbf{A} + \boldsymbol{\ell}\mathbf{c})$ também é dado por

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(s) &= (s - \bar{\lambda}_1) (s - \bar{\lambda}_2) \dots (s - \bar{\lambda}_n) = \\ &= s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \bar{\alpha}_2 s^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n \end{aligned} \quad (14.9)$$

Equacionando as 2 expressões de $\bar{\Delta}(s)$ em (14.8) e (14.9) obtém-se n equações para os n coeficientes de s^i , $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

A solução destas equações nos dá

$$\boldsymbol{\ell} = [\ell_1 \quad \ell_2 \quad \dots \quad \ell_n]^T$$

Exemplo 1 – Considere o sistema de 2ª ordem abaixo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Achar $\ell = [\ell_1 \ \ell_2]^T$ tal que o ESTIMADOR ASSINTÓTICO de estado tenha *polos* $\lambda_{1,2} = -2 \pm j$.

Primeiramente é necessário verificar a *observabilidade* do sistema.

$$\rho(\mathbf{V}) = \rho \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}}^{\mathbf{V}} = 2$$



o sistema é *observável*

Agora calculamos

$$(\mathbf{A} - \ell \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \cdot [3 \quad 4] =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - 3\ell_1 & 1 - 4\ell_1 \\ -1 - 3\ell_2 & 1 - 4\ell_2 \end{bmatrix}$$

e o *polinómio característico* de $(\mathbf{A} - \ell \mathbf{c})$ usando (14.8)

$$\bar{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \ell \mathbf{c}) =$$

$$= (s - 2 + 3\ell_1)(s - 1 + 4\ell_2) - (1 + 3\ell_2)(4\ell_1 - 1) =$$

$$= s^2 + \underbrace{(-3 + 3\ell_1 + 4\ell_2)}_{\bar{\alpha}_1} s + \underbrace{(3 - 7\ell_1 - 5\ell_2)}_{\bar{\alpha}_2} =$$

$$= s^2 + \bar{\alpha}_1 s + \bar{\alpha}_2$$

Por outro lado, calculando novamente o *polinómio característico* de $(A - \ell c)$ mas agora usando (14.9), temos

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = \\ &= (s + 2 - j)(s + 2 + j) = \\ &= s^2 + 4s + 5 = \\ &= s^2 + \bar{\alpha}_1 s + \bar{\alpha}_2\end{aligned}$$

Agora, equacionando os coeficientes, obtemos:

$$\begin{cases} -3 + 3\ell_1 + 4\ell_2 = 4 \\ 3 - 7\ell_1 - 5\ell_2 = 5 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \ell_1 = -43/13 = -3,3 \\ \ell_2 = 55/13 = 4,23 \end{cases}$$

logo,

$$\ell = [\ell_1 \quad \ell_2]^T = [-3,3 \quad 4,23]^T$$

Verificação: Com o vetor coluna ℓ encontrado, calculamos a matriz $(A - \ell c)$ do ESTIMADOR ASSINTÓTICO de estado

$$\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,3 \\ 4,23 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad (A - \ell c) = \begin{bmatrix} 2 - 3\ell_1 & 1 - 4\ell_1 \\ -1 - 3\ell_2 & 1 - 4\ell_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11,92 & 14,23 \\ -13,69 & -15,92 \end{bmatrix}$$

e então o *polinómio característico* de $(A - \ell c)$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(s) &= \det(s.I - A + \ell c) = \\ &= \det \begin{bmatrix} (s-11,92) & -14,23 \\ 13,69 & (s+15,92) \end{bmatrix} \\ &= s^2 + 4s + 5 \\ &= (s + 2 - j) \cdot (s + 2 + j) \end{aligned}$$

e verificamos que de facto o ESTIMADOR ASSINTÓTICO de estado possui os *polos* $-2 \pm j$, os *autovalores* de $(A - \ell c)$

II – Método Algorítmico

- i) Calcular $\Delta(s) = \det(s \cdot I - A)$, o *polinómio característico* de A
- $$= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

obtém-se os α_i 's

- ii) Calcular $\bar{\Delta}(s) = \det(s \cdot I - A + \ell \cdot c)$, o *polinómio característico* de $A - \ell \cdot c$
- $$= s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \bar{\alpha}_2 s^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n$$

obtém-se os $\bar{\alpha}_i$'s

- iii) Calcular $\bar{\ell}$ usando (14.6), Teorema 2.

$$\bar{\ell} = [(\bar{\alpha}_n - \alpha_n) \quad \dots \quad (\bar{\alpha}_2 - \alpha_2) \quad (\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)]^T$$

iv) Calcular as linhas p_i , $i = 1, 2, \dots, n$ de (11.12), capítulo 11, ou seja

$$\begin{cases} p_n = c \\ p_{n-i} = p_{n-i+1} \cdot A + \alpha_i \cdot p_n, \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Isto permite acharmos a matriz P , pois p_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são as linhas de P .

v) Calcular $Q = P^{-1}$

$$Q = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}}_P^{-1} = P^{-1} = V^{-1} \cdot \tilde{V}$$

Nota: O cálculo de Q também poder ser feito usando (14.7),
 $Q = P^{-1} = V^{-1} \cdot \tilde{V}$

vi) Calcular ℓ usando (14.5), Teorema 2, ou seja

$$\ell = Q \cdot \bar{\ell} = P^{-1} \cdot \bar{\ell}$$

Exemplo 2 – Considere novamente o sistema do **Exemplo 1**.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Vamos fazer novamente a **ESTIMAÇÃO** de **estado** para este **sistema** usando agora o **algoritmo** do **Método II** passo a passo (*'step by step'*).

Achar $\ell = [\ell_1 \ \ell_2]^T$ tal que o **ESTIMADOR ASSINTÓTICO** de **estado** tenha **polos** $\lambda_{1,2} = -2 \pm j$.

Já verificamos no **Exemplo 1** que este **sistema** é **observável**.

Portanto vamos aplicar os **seis passos** (*steps*) do algoritmo.

$$\text{i) } \Delta(s) = \det(s \cdot I - A) \\ = s^2 - 3s + 3 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \bar{\Delta}(s) = \det(s \cdot I - A + \ell \cdot c) \\ = s^2 + 4s + 5 = (s + 2 - j) \cdot (s + 2 + j) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \bar{\alpha}_1 = 4 \\ \bar{\alpha}_2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{iii) } \bar{\ell} = \begin{bmatrix} (\bar{\alpha}_2 - \alpha_2) \\ (\bar{\alpha}_1 - \alpha_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv) } \begin{cases} p_2 = c = [3 \quad 4] \\ p_1 = p_2 \cdot A + \alpha_i \cdot p_2 = [-7 \quad -5] \end{cases} \quad \longrightarrow \quad P = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow p_1 \\ \longleftarrow p_2 \end{matrix}$$

$$\text{v) } Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4/13 & -5/13 \\ 3/13 & 7/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,31 & -0,39 \\ 0,23 & 0,54 \end{bmatrix}$$

Alternativamente, podemos achar Q da seguinte forma:

$$V = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow c \\ \leftarrow cA \end{matrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4/7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \tilde{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \right\}$$



$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \tilde{c} \\ \leftarrow \tilde{c}\tilde{A} \end{matrix}$$

logo,

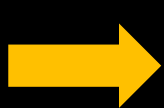
$$Q = P^{-1} = V^{-1} \cdot \tilde{V} = \begin{bmatrix} -4/13 & -5/13 \\ 3/13 & 7/13 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{cases} \text{que é a mesma} \\ \text{matriz } Q \text{ já} \\ \text{encontrada acima.} \end{cases}$$

Este *procedimento alternativo* para calcular a matriz Q substitui os passos (iv) e (v) do algoritmo.

Finalmente, no último *passo* [*passo* (vi)] temos:

vi)

$$\begin{aligned} \ell &= Q \cdot \bar{\ell} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -4/13 & -5/13 \\ 3/13 & 7/13 \end{bmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\bar{\ell}} = \begin{bmatrix} -3,3 \\ 4,23 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ell &= \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3,3 \\ 4,23 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que de facto corresponde
ao vetor ℓ já encontrado
no **Exemplo 1**.

Exemplo 3 – Considere o sistema de 3ª ordem abaixo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Vamos fazer a **ESTIMAÇÃO** de **estado** para este **sistema** que já apareceu em **capítulos** anteriores usando agora o **algoritmo** do **Método II** passo a passo (*'step by step'*).

Achar $\ell = [\ell_1 \ \ell_2 \ \ell_3]^T$ tal que o **ESTIMADOR ASSINTÓTICO** de **estado** tenha **polos** $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = -5$.

$$\rho(\mathbf{V}) = \rho \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} = 3$$



o sistema é **observável**

Vamos então aplicar os seis passos (*steps*) do algoritmo.

$$\text{i) } \Delta(s) = \det(s \cdot I - A) = s^3 - 9s + 2 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -9 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \bar{\Delta}(s) = \det(s \cdot I - A + \ell \cdot c) = (s+3) \cdot (s+4) \cdot (s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \bar{\alpha}_1 = 12 \\ \bar{\alpha}_2 = 47 \\ \bar{\alpha}_3 = 60 \end{cases}$$

$$\text{iii) } \bar{\ell} = \begin{bmatrix} (\bar{\alpha}_3 - \alpha_3) \\ (\bar{\alpha}_2 - \alpha_2) \\ (\bar{\alpha}_1 - \alpha_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 56 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Nos passos (steps) (iv) e (v) do algoritmo calcula-se $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$

$$\text{iv)} \quad \begin{cases} \mathbf{p}_3 = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{A} + \alpha_1 \cdot \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{A} + \alpha_2 \cdot \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \mathbf{p}_1 \\ \leftarrow \mathbf{p}_2 \\ \leftarrow \mathbf{p}_3 \end{matrix}$$

$$\text{v)} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 7/6 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alternativamente, podemos calcular a matriz Q da seguinte forma:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow c \\ \leftarrow cA \\ \leftarrow cA^2 \end{array} \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \tilde{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \tilde{c} \\ \leftarrow \tilde{c}\tilde{A} \\ \leftarrow \tilde{c}\tilde{A}^2 \end{array}$$

logo,

$$Q = P^{-1} = V^{-1} \cdot \tilde{V} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 7/6 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{que é a mesma matriz } Q \text{ já encontrada acima.}$$

Note que este *procedimento alternativo* acima para calcular a matriz Q substitui os passos (iv) e (v) do algoritmo.

Finalmente, no último *passo* [*passo* (vi)] temos:

vi)

$$\ell = Q \cdot \bar{\ell} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 7/6 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 58 \\ 56 \\ 12 \end{bmatrix}}_{\bar{\ell}} = \begin{bmatrix} 33 \\ 28 \\ 12 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 28 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Verificação: Com o valor de ℓ encontrado, calculamos a matriz $(A - \ell \cdot c)$ do ESTIMADOR ASSINTÓTICO de estado.

$$\ell = \begin{bmatrix} 33 \\ 28 \\ 12 \end{bmatrix} \longrightarrow (A - \ell \cdot c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -33 \\ 3 & -1 & -27 \\ 0 & 2 & -12 \end{bmatrix}$$

e então o *polinómio característico* de $(A - \ell \cdot c)$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(s) &= \det(s \cdot I - A + \ell \cdot c) = \\ &= \det \begin{bmatrix} (s-1) & -2 & 33 \\ -3 & (s+1) & 27 \\ 0 & -2 & (s+12) \end{bmatrix} = \\ &= s^3 + 12s^2 + 47s + 60 = \\ &= (s+3) \cdot (s+4) \cdot (s+5) \end{aligned}$$

cujas raízes são: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = -5$

e verificamos que, de facto, o ESTIMADOR ASSINTÓTICO de estado possui os *polos* -3 , -4 e -5 , os *autovalores* de $(A - \ell \cdot c)$.



Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Thank you!
Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt