Controlo Avançado

13

"Estimador de malha aberta"

J. A. M. Felippe de Souza

Neste capítulo, e no próximo, estudaremos os "Estimadores de Estado".

Quando fazemos REALIMENTAÇÃO com o estado, do tipo $k \cdot x(t)$ visto no capítulo anterior (capítulo 12), nós necessitamos ter conhecimento do estado $x(t)$ do sistema, em cada instante $t > 0$.

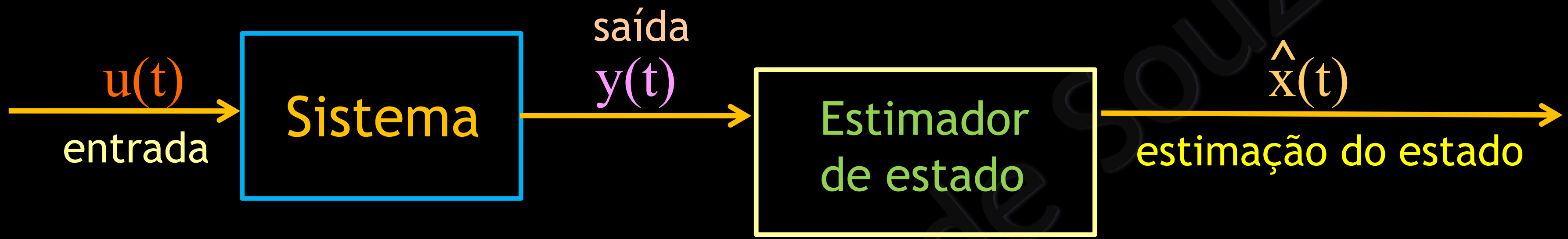
No entanto, nós só dispomos da saída $y(t)$.

No caso particular de $C = I$ (identidade), então $y(t) = x(t)$, ou seja, o estado $x(t)$ está disponível na própria saída $y(t)$ do sistema.

No entanto, em geral isto não é o caso.

Na grande maioria dos casos o estado $x(t)$ não é acessível por medidas diretas e, mesmo quando são, o número de dispositivos de medida podem ser limitados.

Portanto, em princípio, os Estimadores de estado são dispositivos construídos para se obter o estado $x(t)$ a partir da observação $y(t)$.

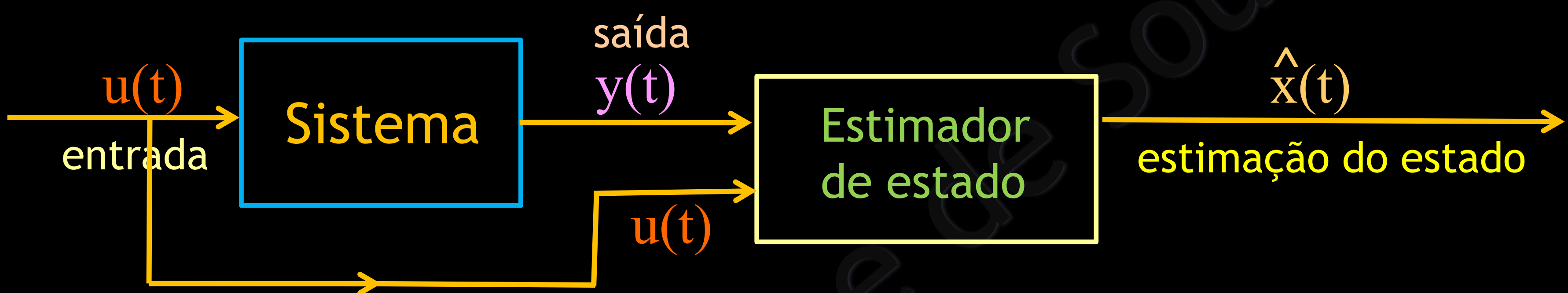


Ou seja, a saída $y(t)$ é uma entrada do "Estimador de estado".

O "Estimador de estado" usa a saída $y(t) = Cx(t)$ para calcular o estado $x(t)$ completo.

Se o sistema for '*observável*' isto sempre será possível.

Entretanto, a entrada $u(t)$ do sistema original também deve ser uma entrada do Estimador de estado.



Notação:

Uma estimativa do estado $x(t)$ é representada por $\hat{x}(t)$.

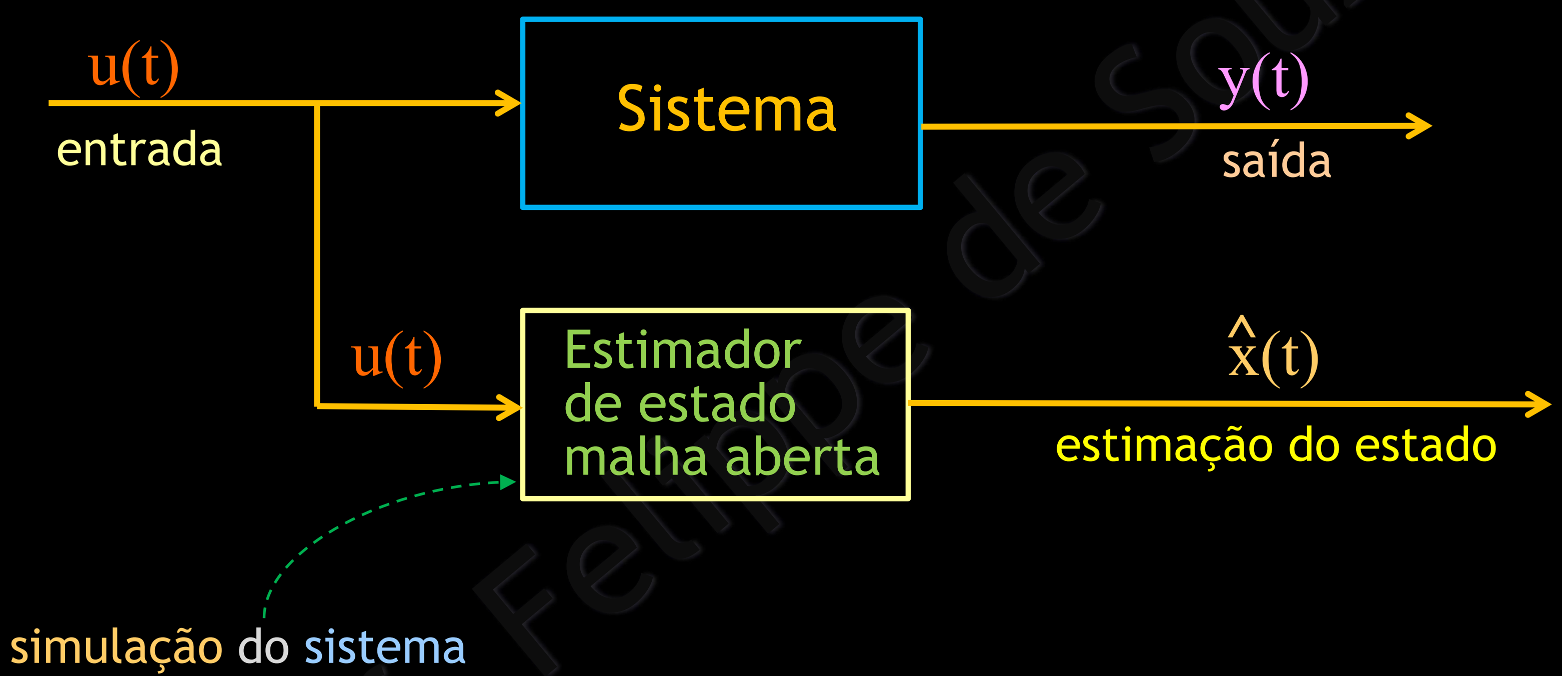
Semelhantemente, uma estimativa de $\bar{x}(t)$ é representada por $\hat{\bar{x}}(t)$ e assim por diante.

Nós estudaremos um eficiente Estimador de estado do tipo descrito acima no próximo capítulo.

Capítulo 14 – Estimadores assintóticos

Neste presente capítulo, estudaremos o 'Estimador de malha aberta' que, pelo contrário, tenta estimar o estado sem fazer uso da saída $y(t)$.

Um 'Estimador de malha aberta' obtém o estado fazendo a simulação da dinâmica do sistema e portanto, sem fazer uso da saída $y(t)$, conforme ilustrado na figura que segue:



Mas neste caso é necessário que o estimador tenha o mesmo estado inicial que o sistema original para que $\hat{x}(t)$ seja uma estimativa do estado $x(t)$ do sistema.

A exemplo do capítulo anterior (*Realimentação de Estado*) aqui, neste capítulo e no próximo, será analisado o caso de sistemas *lineares invariantes no tempo* com uma *entrada* e uma *saída*.

Ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + b\,u(t)\,, \qquad x(t_o) = x_o \\ y(t) = c\,x(t) \end{cases} \tag{13.1}$$

$d = 0$

Um 'estimador' é um sistema, ou um dispositivo, que nos fornece:

$$\hat{x}(t)$$

ou seja, uma *estimativa* do estado $x(t)$ do sistema *original*.

Estimador de malha aberta

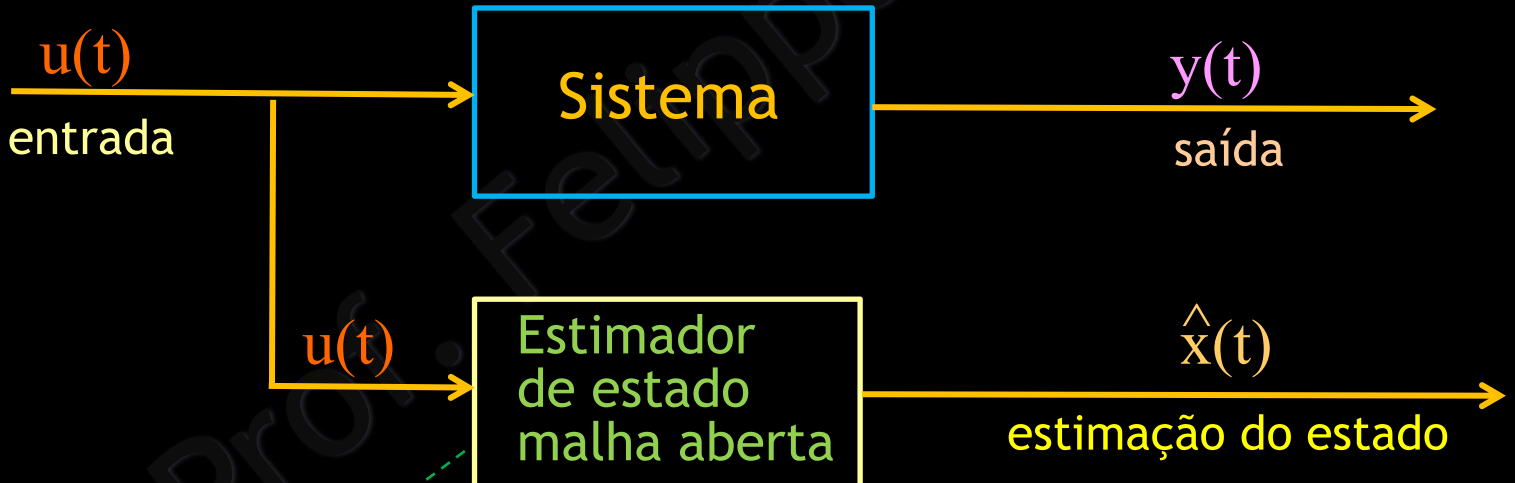
Um estimador de malha aberta tem como entrada:

$$u(t)$$

do sistema *original*, e como saída:

$$\hat{x}(t)$$

que é uma estimativa do estado $x(t)$ do sistema *original*.



aqui se faz a simulação da dinâmica do sistema

Estimador de malha aberta

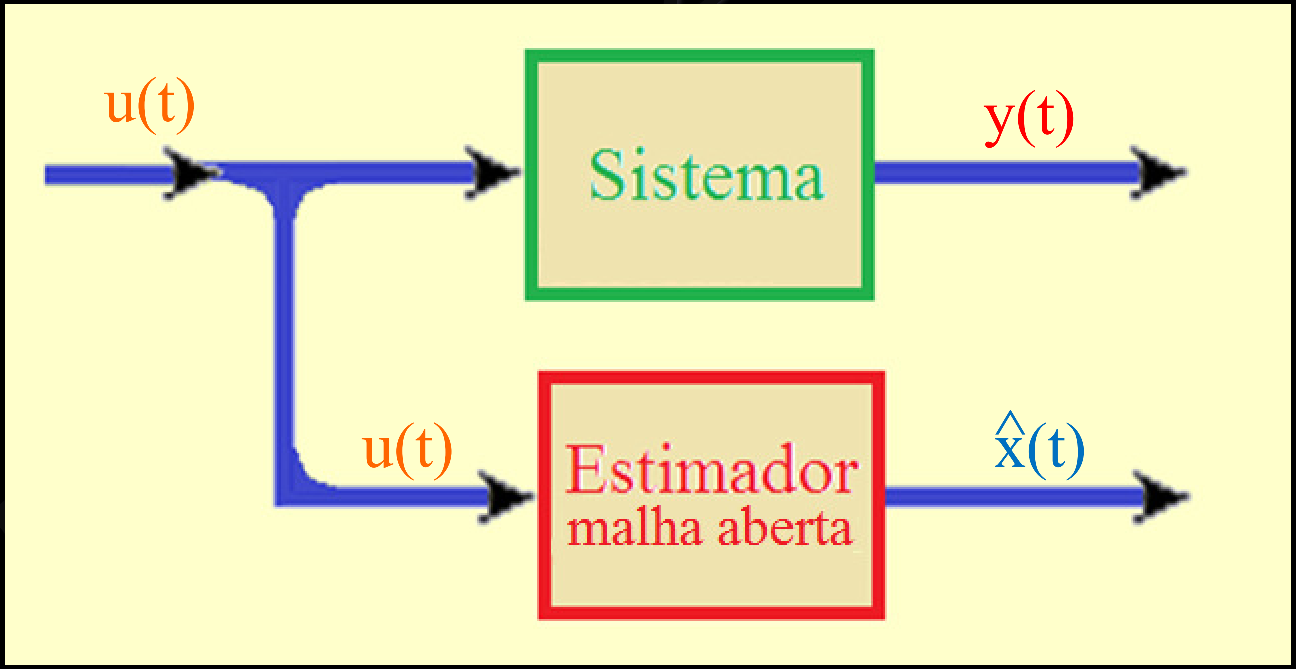
Um estimador de malha aberta tem como entrada:

$$u(t)$$

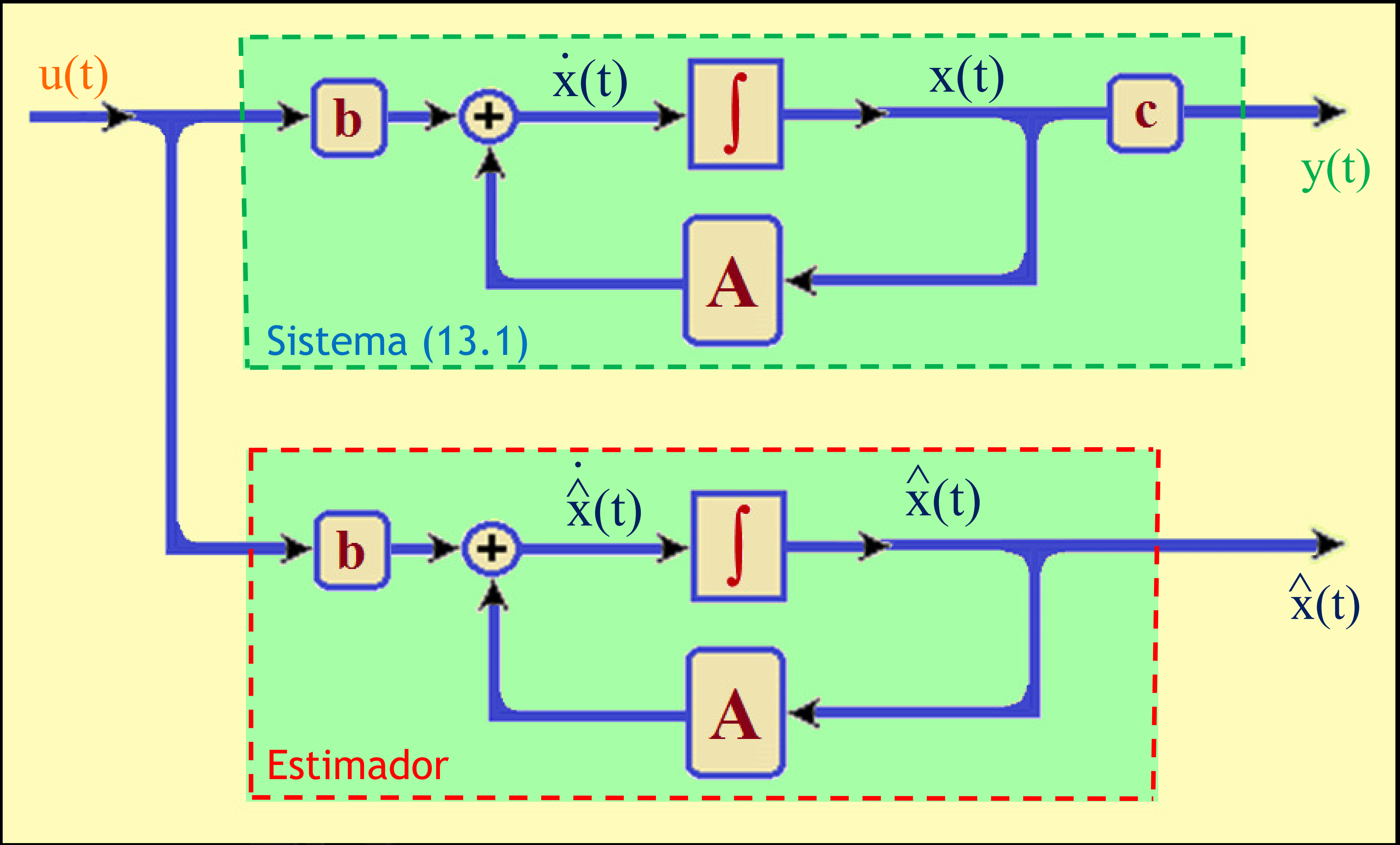
do sistema *original*, e como saída:

$$\hat{x}(t)$$

que é uma estimativa do estado $x(t)$ do sistema *original*.



Estimador de malha aberta



Um estimador de malha aberta para o sistema (13.1), ilustrado acima, consiste em simular analogicamente o sistema físico real e obtendo-se assim uma estimativa $\hat{x}(t)$ para o estado real $x(t)$.

Se o estimador tiver o mesmo estado inicial que o sistema físico real, então a estimativa $\hat{x}(t)$ acompanha o estado real $x(t)$.

$$\hat{x}(t) = x(t), \qquad \forall t \geq 0$$

O estado inicial x_o do sistema físico real pode ser calculado com base na saída $y(t)$ e na entrada $u(t)$ aplicada num intervalo de tempo $[0, t_f]$, desde que o sistema seja *observável*.

(Este resultado é análogo ao do cálculo do controle $u(t)$ para conduzir o estado de 0 a x_f visto no capítulo 8).

Definição 1 – a matriz V_t

$$\boxed{V_t = \int_o^t e^{A^T\tau} \cdot C^T \cdot C \cdot e^{A\tau} \cdot d\tau} \qquad (13.2)$$

(análoga a matriz W_t em (8.4) no capítulo 8)

Teorema 1 –

Se o sistema for observável, então V_t é inversível $\forall t \geq 0$.

Teorema 2 –

Se o sistema é observável com entrada $u(t)$ no intervalo $[0,\ t_f]$ e a saída $y(t)$ for observada no mesmo intervalo $[0,\ t_f]$ então

$$\boxed{x_o = V_{t_f}^{-1} \cdot \int_0^{t_f} e^{A^T \tau} \cdot C^T \cdot \bar{y}(\tau) \cdot d\tau} \qquad (13.3)$$

onde

$$\bar{y}(t) = y(t) - C \cdot \int_0^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \qquad (13.4)$$

Observe que $\bar{y}(t)$ em (13.4) é conhecido, tendo em vista que a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ são conhecidas.

Demonstração do Teorema 2 –

Usando (7.16), da Solução de um sistema *linear*, no capítulo 7,

$$y(t) = C \cdot e^{At} \cdot x_o + C \cdot \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

logo,

$$\bar{y}(t) = C \cdot e^{At} \cdot x_o$$

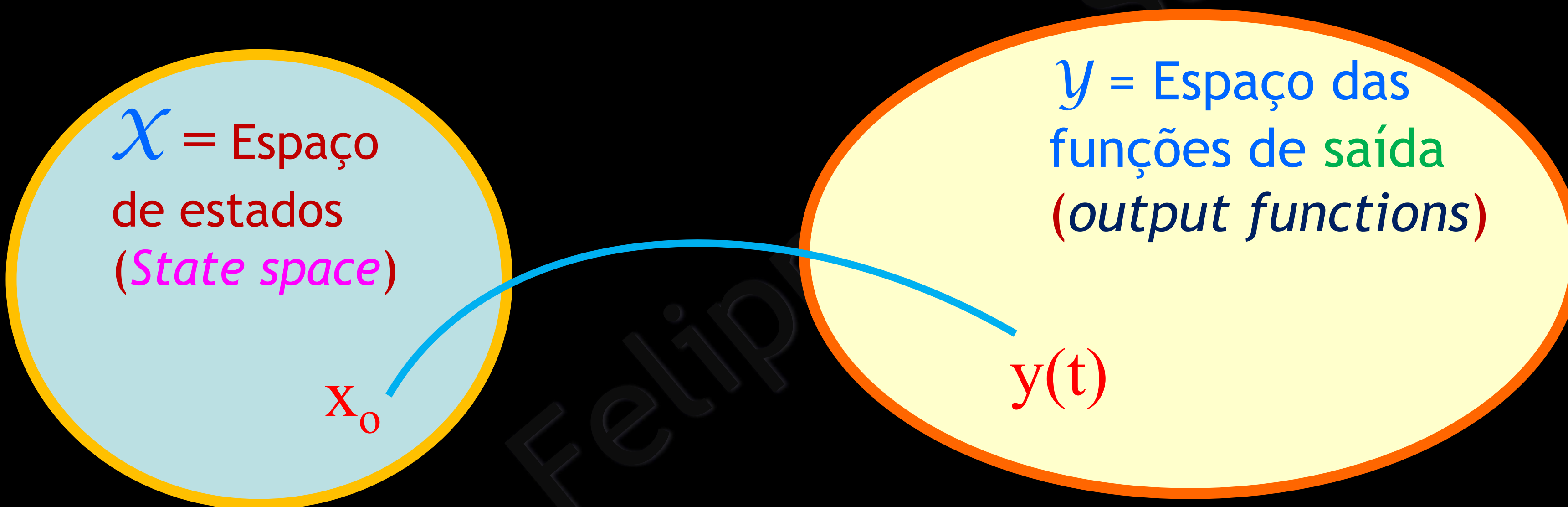
Pré multiplicando-se $\bar{y}(t)$ por $e^{A^T t} \cdot C^T$ e integrando-se de 0 a t_f, obtém-se

$$\int_0^{t_f} e^{A^T t} \cdot C^T \cdot \bar{y}(t) \cdot dt = \underbrace{\int_0^{t_f} e^{A^T t} \cdot C^T \cdot C \cdot e^{At} \cdot x_o \, dt}_{V_{t_f} x_o}$$

Agora, multiplicando-se ambos os membros por $V_{t_f}^{-1}$ tem-se x_o em (13.3), e o resultado do Teorema 2 segue de imediato.

Estimador de malha aberta

Já foi visto no Capítulo 9 que se um sistema é *observável*, então não há estados '*indistinguíveis*', isto é, todos os estados são '*distinguíveis*', ou seja, o estado inicial do sistema $x_o \in X$, qualquer que ele seja, pode ser identificado através da saída $y(t)$ do sistema.



Este Teorema 2 nos dá a forma com que este estado inicial x_o pode ser 'recuperado' ('*calculado*') a partir da *observação* (saída) $y(t)$ do sistema, quando o sistema for *observável*.

Uma vez tendo o estado inicial x_o do sistema, conforme dado por (13.3), então podemos obter o estado '*completo*' $x(t)$, pela equação (7.15) conforme visto no Capítulo 7.

$$x(t) = e^{At} \cdot x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \qquad (7.15)$$

Desvantagens do Estimador de Malha Aberta

i) É necessário o cálculo de $\hat{x}_o$ = uma estimativa para x_o

ii) Se A tem *autovalores* com *parte real positiva*, uma pequena diferença na estimativa de x_o já irá causar estimação incorreta do estado $x(t)$. Isto é, mesmo que

$$e_o = \| \hat{x}_o - x_o \|$$

"erro no estado inicial"

seja pequena,

$$e(t) = \| \hat{x}(t) - x(t) \|$$

"erro ao longo do *tempo, na trajetória do* sistema"

aumentará com o tempo.

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Thank you!
Obrigado!

Felippe de Souza
felippe@ubi.pt