

Controlo Avançado

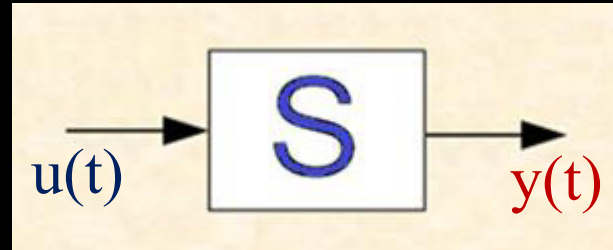
12

“Realimentação de estado”

J. A. M. Felippe de Souza

Em um sistema de 'malha aberta' $u(t)$ é predeterminado e não muda, seja lá qual for a saída $y(t)$.

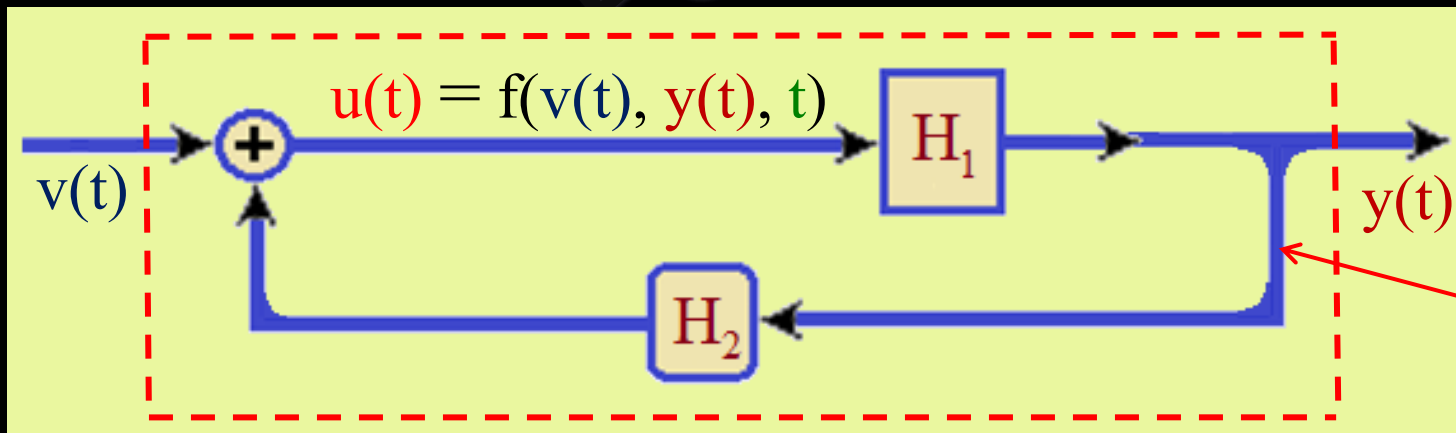
Isto não é o ideal.



Seria desejável que a entrada $u(t)$ reagisse ao comportamento do sistema.

Se o sistema se comporta como se espera, dando a saída $y(t)$ desejada, $u(t)$ não se alteraria, mas no caso contrário uma mudança apropriada na entrada $u(t)$ seria necessária para trazer a resposta $y(t)$ desejada.

Portanto, o controle $u(t)$ deveria ser uma função da saída $y(t)$ e de uma entrada de referência $v(t)$.

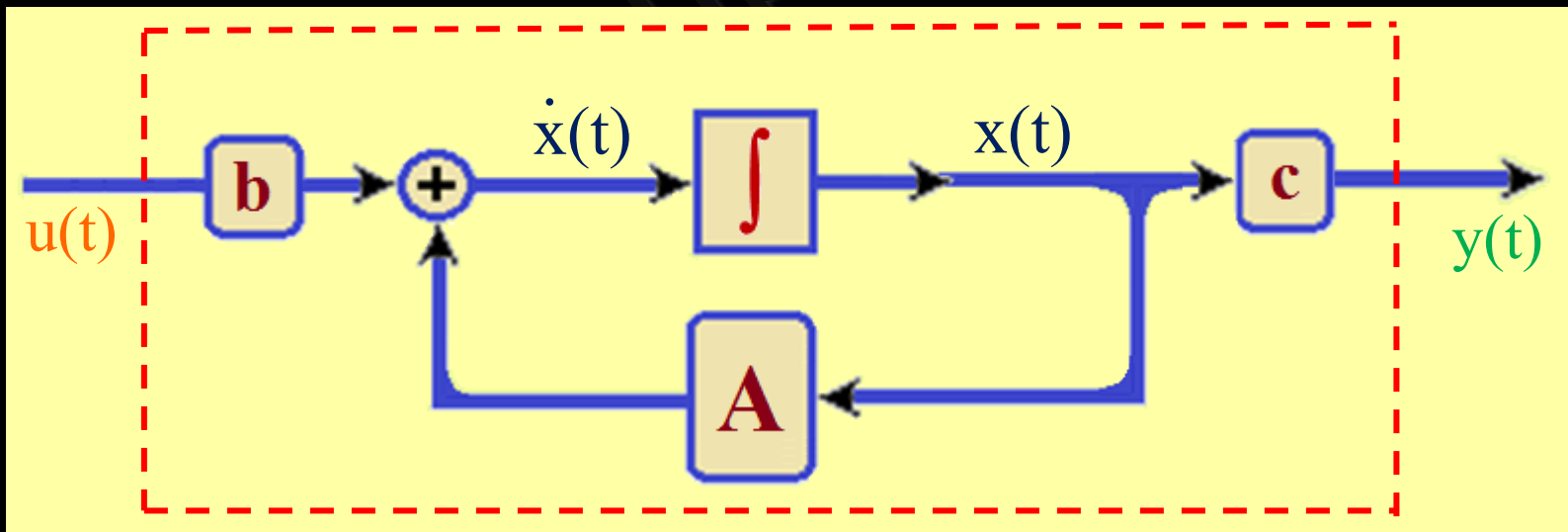


realimentação da saída

Ou então, melhor do que isso, uma função do estado $\mathbf{x}(t)$ e de uma entrada de referência $\mathbf{v}(t)$, pois desta forma o controle $\mathbf{u}(t)$ estaria diretamente relacionado com o comportamento da dinâmica do sistema.

Para o sistema abaixo, de uma entrada e uma saída.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \leftarrow \mathbf{d} = 0 \quad (12.1)$$



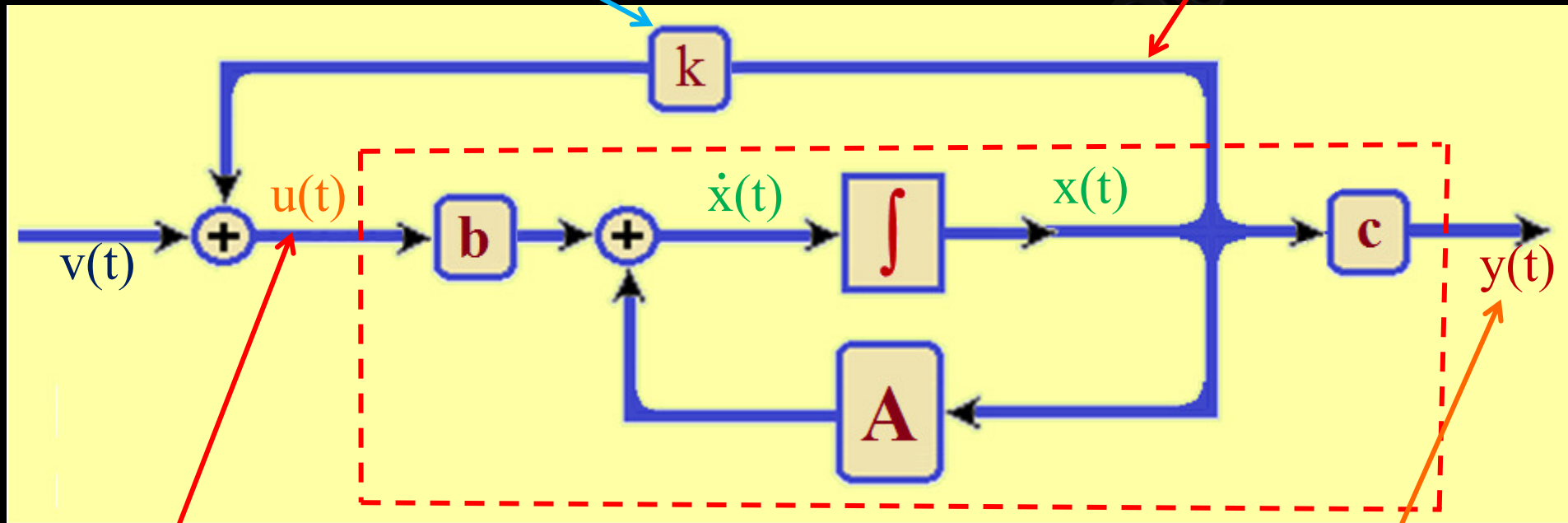
Realimentação de estado

podemos fazer a seguinte REALIMENTAÇÃO DE ESTADO:

onde k é um vetor linha

$$k = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

realimentação
do estado



$$u(t) = f(v(t), x(t), t)$$

$y(t)$ = output

Note que $k = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$ é um vetor linha onde os k_i 's multiplicam as componentes $x_i(t)$ e assim *realimenta-se o estado* no sistema.

Portanto, se

$$u(t) = v(t) + \overbrace{[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]}^k \cdot x(t)$$

o sistema REALIMENTADO terá a forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + b \cdot k) x(t) + b \cdot v(t), \\ y(t) = c \cdot x(t) \end{cases} \quad (12.2)$$

← $d = 0$

Teorema 1 – O sistema (12.1) é *controlável* se e somente se o sistema (12.2) é *controlável*.

Nota: A observabilidade do sistema pode não ser preservada.

Exemplo 1 – Considere o sistema de 2ª ordem abaixo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$\mathbf{d} = 0$

Facilmente verifica-se que este sistema é 'controlável' e 'observável'.

Fazendo-se a REALIMENTAÇÃO do sistema com o estado da forma abaixo

$$u(t) = v(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}(t)$$

veremos que o sistema REALIMENTADO é 'controlável' mas não é 'observável'.

Exemplo 1 (continuação)

o sistema REALIMENTADO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}^{(A + b \cdot k)} \mathbf{x}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^b \mathbf{v}(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_c \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

← $d = 0$

$$\mathbf{U} = [b \quad (A + b \cdot k) \cdot b]$$

$$\rho(\mathbf{U}) = \rho \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

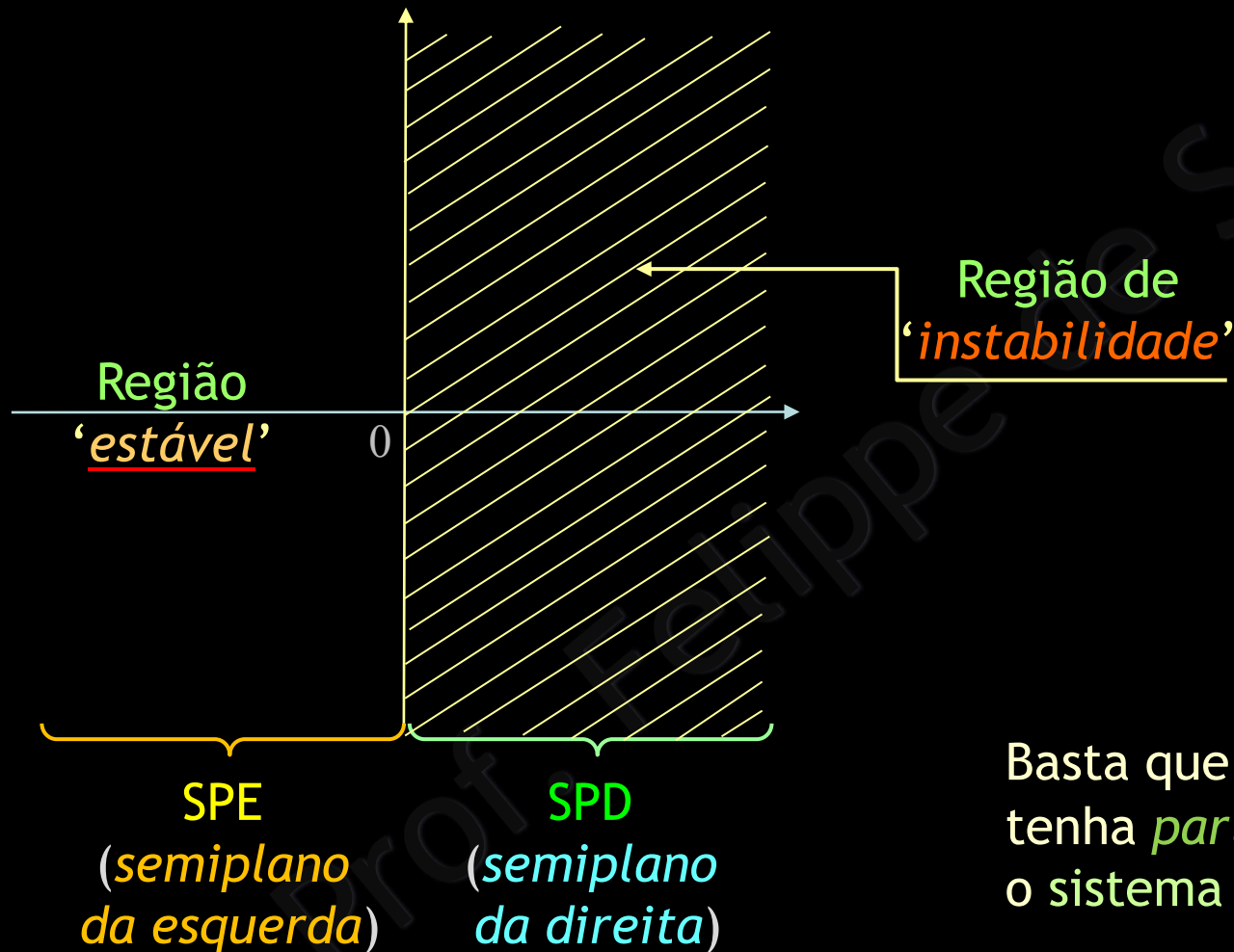
➡ sistema é
'controlável'

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot (A + b \cdot k) \end{bmatrix}$$

$$\rho(\mathbf{V}) = \rho \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 1$$

➡ sistema não é
'observável'

Um resultado clássico em teoria de sistema, sobre estabilidade, é associado à *parte real* dos autovalores de A .



Um sistema é 'estável' se possui **TODOS** os autovalores de A (os *polos* do sistema) localizados no **SPE** (*semiplano da esquerda*).

Basta que um autovalor de A tenha *parte real* positiva que o sistema será 'instável'.

Uma das principais aplicações da ‘REALIMENTAÇÃO DE ESTADO’ é que quando o sistema é ‘controlável’, é possível escolher o vetor $\mathbf{k}$ tal que os *autovalores* de $(\mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k})$ sejam escolhidos arbitrariamente.

Aqui nesta seção veremos que a ‘REALIMENTAÇÃO DE ESTADO’ permite mudar a localização dos *polos* do sistema, ou seja, dos *autovalores* de $\mathbf{A}$.

Por exemplo, com a ‘REALIMENTAÇÃO DE ESTADO’ podemos colocar todos os *polos* do sistema no **SPE** (*semiplano da esquerda*), onde quisermos.

Ou seja, um sistema *instável* (i.e., com algum autovalor de $\mathbf{A}$ tenha *parte real positiva*) pode ser REALIMENTADO com $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t)$ tal que se torne estável (e isto é chamado de “estabilização do sistema”).

Teorema 2 – Se o sistema (12.1) é controlável, então aplicando o controle

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t)$$

os *autovalores* de $(\mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k})$ podem ser escolhidos arbitrariamente.

Teorema 3 – Se o sistema (12.1) é *controlável*,

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

são os coeficientes de $\Delta(s) = \det(sI - A)$ e nós queremos que

$$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n,$$

sejam os coeficientes do *polinómio característico* de $(A + b \cdot k)$ então devemos escolher

$$k = \bar{k} \cdot P \quad (12.3)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{k} = [(\alpha_n - \bar{\alpha}_n) \quad \dots \quad (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2) \quad (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)] \\ P = Q^{-1} = \bar{U} \cdot U^{-1} \end{array} \right. \quad (12.4)$$

$$(12.5)$$

Observação: P acima é o mesmo definido em (10.6) e Q em (10.7), no capítulo 10, assim como U e $\bar{U}$, em (10.4) e (10.5), respectivamente.

Nota: O polinómio característico de $(A + b \cdot k)$ é, obviamente, o polinómio característico $\bar{\Delta}(s)$ do sistema (12.2), o sistema REALIMENTADO com $k \cdot x(t)$, ou seja, REALIMENTADO com o estado.

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(s) &= \det(s \cdot I - A - b \cdot k) = \\ &= s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \bar{\alpha}_2 s^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n\end{aligned}\tag{12.6}$$

O Teorema 3 acima mostra como *escolher* os *autovalores* desejados para um sistema REALIMENTADO com o estado (12.2), quando o sistema original (12.1) for 'controlável'.

Portanto, um sistema 'controlável' que não seja *estável*, pode sempre tornar-se *estável* com uma REALIMENTAÇÃO DE ESTADO escolhendo-se k tal que $\bar{\Delta}(s)$ dado por (12.6) tenha raízes no SPE.

Com base nos Teorema 2 e 3 vamos apresentar 2 métodos para obter o vetor linha k e desta forma fazer a REALIMENTAÇÃO DE ESTADO.

Dois métodos para obter k

Tem-se A , b e quer se achar k tal que $(A + b \cdot k)$ tenha como *autovalores*

$$\{ \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n \}$$

I – Método Direto

Neste método primeiramente calcula-se $\bar{\Delta}(s)$, o *polinómio característico* de $(A + b \cdot k)$ em termos das n incógnitas $k_1, k_2, \dots, k_n$, que são os coeficientes de k .

$$k = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

Primeiramente, (12.6) já vista acima

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(s) &= \det(s \cdot I - A - b \cdot k) = \\ &= s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \bar{\alpha}_2 s^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n \end{aligned} \quad (12.6)$$

Como nós queremos que $(A + b \cdot k)$ tenha *autovalores*

$$\bar{\lambda}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

então o *polinómio característico* de $(A + b \cdot k)$ também é dado por

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(s) &= (s - \bar{\lambda}_1) (s - \bar{\lambda}_2) \dots (s - \bar{\lambda}_n) = \\ &= s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \bar{\alpha}_2 s^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n \end{aligned} \quad (12.7)$$

Equacionando as 2 expressões de $\bar{\Delta}(s)$ em (12.6) e (12.7) obtém-se n equações para os n coeficientes de s^i , $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

A solução destas equações nos dá

$$k = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

Exemplo 2 – Considere o sistema de 2ª ordem abaixo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}} u(t)$$

Achar $\mathbf{k} = [k_1 \ k_2]$ tal que o sistema REALIMENTADO tenha *polos* -1 e -2 .

É fácil de verificar que este sistema não é *estável*.

Mas o sistema REALIMENTADO a ser construído aqui, com *polos* $\lambda_{1,2} = -1$ e -2 , no SPE, será obviamente estável.

Primeiramente é necessário verificar *controlabilidade* do sistema.

$$\rho(\mathbf{U}) = \rho \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{U}} = 2$$



o sistema é
controlável

Agora calculamos

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2] = \\
 &= \begin{bmatrix} 2 + \mathbf{k}_1 & 1 + \mathbf{k}_2 \\ -1 + 2\mathbf{k}_1 & 1 + 2\mathbf{k}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e o *polinómio característico* de $(\mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k})$ usando (12.6)

$$\begin{aligned}
 \bar{\Delta}(s) &= \det(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) = \\
 &= (s - 2 - \mathbf{k}_1)(s - 1 - \mathbf{k}_2) - (1 - 2\mathbf{k}_1)(-1 - \mathbf{k}_2) = \\
 &= s^2 - \underbrace{(3 + \mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2)}_{\bar{\alpha}_1} s + \underbrace{(3 + 5\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)}_{\bar{\alpha}_2} = \\
 &= s^2 + \bar{\alpha}_1 s + \bar{\alpha}_2
 \end{aligned}$$

Por outro lado, calculando novamente o *polinómio característico* de $(\mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k})$ mas agora usando (12.7), temos

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = \\ &= (s + 1)(s + 2) = \\ &= s^2 + 3s + 2 = \\ &= s^2 + \bar{\alpha}_1 s + \bar{\alpha}_2\end{aligned}$$

Agora, *equacionando os coeficientes*, obtemos:

$$\begin{cases} -3 - k_1 - 2k_2 = 3 \\ 3 - k_1 + 5k_2 = 2 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} k_1 = -4 \\ k_2 = -1 \end{cases}$$

logo,

$$\mathbf{k} = [k_1 \ k_2] = [-4 \ -1]$$

Verificação: Com o vetor linha $\mathbf{k}$ encontrado, calculamos a matriz $(\mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k})$ do sistema REALIMENTADO

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= [\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2] = \\ &= [-4 \quad -1] \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) &= \begin{bmatrix} 2 + \mathbf{k}_1 & 1 + \mathbf{k}_2 \\ -1 + 2\mathbf{k}_1 & 1 + 2\mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -9 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e então o *polinómio característico* de $(\mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k})$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(s) &= \det(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) = \\ &= \det \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 9 & s+1 \end{bmatrix} = \\ &= s^2 + 3s + 2 = \\ &= (s+1) \cdot (s+2) \end{aligned}$$

e verificamos que de facto o sistema REALIMENTADO possui os *polos* -1 e -2 , os *autovalores* de $(\mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k})$

II – Método Algorítmico

i) Calcular $\Delta(s) = \det(s \cdot I - A)$, o *polinómio característico* de A

$$= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

obtém-se os α_i 's

ii) Calcular $\bar{\Delta}(s) = \det(s \cdot I - A - b \cdot k)$, o *polinómio característico* de $A + b \cdot k$

$$= s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \bar{\alpha}_2 s^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n$$

obtém-se os $\bar{\alpha}_i$'s

iii) Calcular $\bar{k}$ usando (12.4), Teorema 3.

$$\bar{k} = [(\alpha_n - \bar{\alpha}_n) \quad \dots \quad (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2) \quad (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)]$$

iv) Calcular as colunas q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ de (10.12), capítulo 10, ou seja

$$\begin{cases} q_n = b \\ q_{n-i} = A \cdot q_{n-i+1} + \alpha_i \cdot q_n, \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

v) Calcular $P = Q^{-1}$

$$P = Q^{-1} = \left[\underbrace{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{n-1} \ q_n}_Q \right]^{-1} = \bar{U} \cdot U^{-1}$$

Nota: O cálculo de P também poder ser feito usando (12.5),
 $P = Q^{-1} = \bar{U} \cdot U^{-1}$

vi) Calcular k usando (12.3), Teorema 3, ou seja

$$k = \bar{k} \cdot P$$

Exemplo 3 – Considere novamente o sistema do **Exemplo 2**.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}} u(t)$$

Vamos fazer novamente a **REALIMENTAÇÃO DE ESTADO** do sistema usando agora o *algoritmo* do Método II passo a passo (*‘step by step’*).

Achar $\mathbf{k} = [k_1 \ k_2]$ tal que o sistema **REALIMENTADO** tenha **polos** -1 e -2 .

É fácil de verificar que este sistema não é *estável*.

Mas o sistema **REALIMENTADO** a ser construído aqui, com **polos** -1 e -2 , no **SPE**, será obviamente estável.

Já verificamos no **Exemplo 2** que este sistema é *controlável*.

Portanto vamos aplicar os seis passos (*steps*) do algoritmo.

$$\begin{aligned} \text{i) } \Delta(s) &= \det(s \cdot I - A) \\ &= s^2 - 3s + 3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \bar{\Delta}(s) &= \det(s \cdot I - A - b \cdot k) \\ &= (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \bar{\alpha}_1 = 3 \\ \bar{\alpha}_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \bar{k} &= [(\alpha_2 - \bar{\alpha}_2) \quad (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)] \\ &= [1 \quad -6] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \begin{cases} q_2 = b = [1 \quad 2]^T \\ q_1 = A \cdot q_2 + \alpha_1 \cdot q_2 = [1 \quad -5]^T \end{cases} \quad \longrightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} \overbrace{q_1} & \overbrace{q_2} \\ 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{v) } P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/7 & -1/7 \\ 5/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

Alternativamente, podemos achar $\mathbf{P}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/7 & 4/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}} & \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{b}} \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

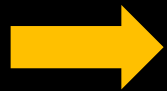
logo,

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/7 & -1/7 \\ 5/7 & 1/7 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{cases} \text{que é a mesma} \\ \text{matriz } \mathbf{P} \text{ já} \\ \text{encontrada acima.} \end{cases}$$

Este *procedimento alternativo* para calcular a matriz $\mathbf{P}$ substitui os passos (iv) e (v) do algoritmo.

Finalmente, no último passo [*passo* (vi)] temos:
vi)

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{P} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -6 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{k}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2/7 & -1/7 \\ 5/7 & 1/7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \end{aligned}$$



$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix}$$

que de facto corresponde
ao vetor $\mathbf{k}$ já encontrado
no **Exemplo 2**.

Exemplo 4 – Considere o sistema de 3ª ordem abaixo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}} u(t)$$

Este sistema, que já apareceu em capítulos anteriores, *não é estável* pois possui *polos* (autovalores de $\mathbf{A}$) no SPD.

Vamos estabiliza-lo projetando uma REALIMENTAÇÃO DE ESTADO para este sistema aplicando os seis passos (steps) do algoritmo do Método II.

O sistema REALIMENTADO deverá ter os seguintes *polos*:

$$s = -1 \quad \text{e} \quad s = -1 \pm j.$$

$$\rho(\overbrace{\mathbf{U}}^{\mathbf{U}}) = \rho \left[\begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \right] = 3 \quad \longrightarrow \quad \text{o sistema é controlável}$$

$$\text{i) } \Delta(s) = \det(s \cdot I - A) = s^3 - 9s + 2 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -9 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \bar{\Delta}(s) &= \det(s \cdot I - A - b \cdot k) = \\ &= (s+1) \cdot (s+1-j) \cdot (s+1+j) = \\ &= (s+1)(s^2 + 2s + 2) = \\ &= s^3 + 3s^2 + 4s + 2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \bar{\alpha}_1 = 3 \\ \bar{\alpha}_2 = 4 \\ \bar{\alpha}_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \bar{k} &= [(\alpha_3 - \bar{\alpha}_3) \quad (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2) \quad (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)] \\ &= [0 \quad -13 \quad -3] \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \begin{cases} q_3 = b = [2 \quad 1 \quad 1]^T \\ q_2 = A \cdot q_3 + \alpha_1 \cdot q_3 = [4 \quad 6 \quad 2]^T \\ q_1 = A \cdot q_2 + \alpha_2 \cdot q_3 = [-2 \quad -1 \quad 3]^T \end{cases} \quad \longrightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} \overbrace{q_1} & \overbrace{q_2} & \overbrace{q_3} \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

v)

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 5/8 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Alternativamente, podemos achar $\mathbf{P}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 7/4 & -1/2 & -2 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

logo,

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 5/8 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

que é a mesma matriz $\mathbf{P}$ já encontrada acima.

Note que este *procedimento alternativo* para calcular a matriz $\mathbf{P}$ substitui os passos (iv) e (v) do algoritmo.

Finalmente, no último passo [*passo (vi)*] temos:

vi)

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -13 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 5/8 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

➡ $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -1/4 & -7/4 & -3/4 \end{bmatrix}$

Verificação: Com o valor de k encontrado, calculamos a matriz $(A + b \cdot k)$ do sistema REALIMENTADO

$$k = \begin{bmatrix} -1/4 & -7/4 & -3/4 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow (A + b \cdot k) = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 11/4 & -11/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & -3/4 \end{bmatrix}$$

e então o *polinómio característico* de $(A + b \cdot k)$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(s) &= \det(s \cdot I - A - b \cdot k) = \\ &= \det \begin{bmatrix} (s - 1/2) & 3/2 & 3/2 \\ -11/4 & (s + 11/4) & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & (s + 3/4) \end{bmatrix} \\ &= s^3 + 3s^2 + 4s + 2 \\ &= (s + 1) \cdot (s + 1 - j) \cdot (s + 1 + j) \end{aligned}$$

e verificamos que de facto o sistema REALIMENTADO possui os polos -1 e $-1 \pm j$, os autovalores de $(A + b \cdot k)$.



Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Thank you!
Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt