

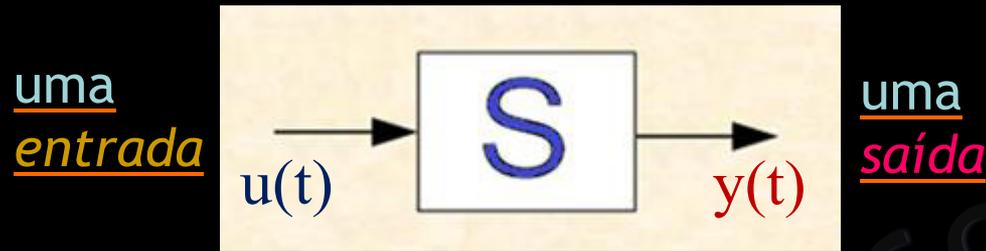
Controlo Avançado

11

“Forma dual da companheira”

J. A. M. Felippe de Souza

Considere novamente um sistema de uma entrada e uma saída.



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (11.1)$$

← $\mathbf{d} = 0$

Já vimos no capítulo 6, (6.12)-(6.14) que se \mathbf{P} é inversível e

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{P} \mathbf{b}$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{P}^{-1}$$

então o sistema

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{b}} u(t), & \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{c}} \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (11.2)$$

← $\tilde{\mathbf{d}} = 0$

é equivalente a (11.1).

Cada componente $\tilde{x}_i(t)$ do novo estado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ é uma combinação linear das componentes $x_i(t)$ do estado original do sistema.

O novo estado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ satisfaz

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{x}$$

Definição 1 – Novamente aqui vamos por vezes utilizar a inversa de \mathbf{P} , ou seja \mathbf{P}^{-1} , como sendo \mathbf{Q} .

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} \quad (11.3)$$

Um desenvolvimento semelhante ao feito no capítulo 10 para sistemas controláveis será feito aqui para sistemas observáveis.

Entretanto, \mathbf{P} e \mathbf{Q} neste capítulo para sistemas observáveis serão diferentes de \mathbf{P} e \mathbf{Q} definidos em (10.6) e (10.7) no capítulo 10 para sistemas controláveis.

Neste caso iremos obter $\tilde{\mathbf{A}}$ na “forma dual da companheira” em vez de $\bar{\mathbf{A}}$ na forma companheira.

Se V for a matriz definida em (9.3), capítulo 9

$$V = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

e \tilde{V} for a matriz

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{c}\tilde{A} \\ \tilde{c}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{c}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

então

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{c}\tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{c}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{c}\tilde{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}$$

o que permite concluir:

Teorema 1 – O sistema (11.1) é *observável* se e somente se sistema (11.2) é *observável*.

Note que como o sistema só tem uma entrada, \tilde{c} é um vetor linha e portanto $\tilde{\mathbf{V}}$ é uma **matriz quadrada**.

Teorema 2 – Se (11.1) é *observável*, então \mathbf{V} e $\tilde{\mathbf{V}}$ são inversíveis e

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{V} \quad (11.6)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{V}} \quad (11.7)$$

Teorema 3 – Se o sistema (11.1) é *observável*, então ele pode ser transformado num sistema equivalente da forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}} \cdot u(t) \\
 y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{c}}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t)
 \end{aligned} \tag{11.8}$$

$\tilde{\mathbf{d}} = 0$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, são os coeficientes do *polinómio característico* de A

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

Além disso, a *função de transferência* do sistema tem a forma

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \quad (11.9)$$

Portanto, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, que aparecem em \tilde{b} são os coeficientes do *numerador* da *função de transferência* do sistema.

Definição 2 – A matriz \tilde{A} conforme aparece no sistema (11.8), e repetida abaixo em (11.10), é chamada de a “*forma dual da companheira*” de A (“*dual companion form*” of A).

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

Definição 3 – Semelhantemente, o sistema (11.8) é dito estar na “*forma dual da companheira*” (“*dual companion form*”).

Note que um sistema pode ser escrito na “*forma companheira*” (11.8) diretamente da *função de transferência* do sistema na forma (11.9), onde o *polinómio característico* no denominador é mónico, isto é, tem o coeficiente do termo de mais alto grau (s^n) igual a 1.

Neste capítulo e nos próximos usaremos o ‘til’ em \tilde{A} , \tilde{b} e \tilde{c} exclusivamente para denotar estas três matrizes na forma como aparecem no sistema (11.9), isto é, na *forma dual da companheira*, ou seja, \tilde{A} dado por em (11.10) acima, \tilde{b} e \tilde{c} dado por (11.11) abaixo.

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad \tilde{c} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \quad (11.11)$$

Demonstração do Teorema 3 –

Observe que se o sistema (11.1) é ‘observável’, então as linhas de

são L.I., logo, os vetores linhas

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

definidos por,

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n = c \\ p_{n-1} = p_n A + \alpha_1 p_n = cA + \alpha_1 c \\ p_{n-2} = p_{n-1} A + \alpha_2 p_n = cA^2 + \alpha_1 cA + \alpha_2 c \\ \vdots \\ p_1 = p_2 A + \alpha_{n-1} p_n = cA^{n-1} + \alpha_1 cA^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \cdot c \end{array} \right. \quad (11.12)$$

também são L.I.

Portanto, assim como em (10.12) no capítulo 10, onde tínhamos um algoritmo para Q , aqui tem-se um algoritmo para P em (11.12):

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = Q^{-1} \quad (11.13)$$

e se $\tilde{x} = P x$, ou seja $\tilde{x} = Q x$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = \underbrace{P A P^{-1}}_{\tilde{A}} \tilde{x} + \underbrace{P b}_{\tilde{b}} u \\ y = \underbrace{c P^{-1}}_{\tilde{c}} \tilde{x} \end{array} \right. \quad \left| \right.$$

Logo, temos a seguinte relação:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{A} = P A P^{-1} \\ \tilde{c} = c \cdot P^{-1} \end{array} \right\} \quad (11.14)$$

e $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$, logo, os valores $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ podem ser calculados de

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (11.15)$$

Note que $\tilde{\mathbf{A}}$ em (11.10) é a transposta da *forma companheira* de $\bar{\mathbf{A}}$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^T, \quad (11.16)$$

além disso

$$\tilde{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{c}}^T, \quad (11.17)$$

e

$$\tilde{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{b}}^T. \quad (11.18)$$

Com as relações (11.16), (11.17) e (11.18) pode-se mostrar que a matriz \tilde{V} em (11.5) é a mesma que \bar{U} , definido em (10.16) no capítulo 10, ou seja,

$$\bar{U} = \tilde{V}$$

assim como \bar{U}^{-1} em (10.18) é igual a \tilde{V}^{-1} .

Entretanto, note que as matrizes P e Q definidas em (10.3) para o caso da “*forma companheira*” não são as mesmas matrizes P e Q definidas em (11.3) para o caso da “*forma dual da companheira*”.

O sistema *observável* (11.8) é dito ser o “*dual*” do sistema *controlável* (10.8), do capítulo 10.

Se \bar{A} , \tilde{A} , \bar{b} , \tilde{b} , \bar{c} , \tilde{c} satisfazem (11.16), (11.17) e (11.18), então

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{b} \cdot u(t) \\ y(t) = \tilde{c} \cdot \tilde{x}(t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}^T \cdot \bar{x}(t) + \bar{c}^T \cdot u(t) \\ y(t) = \bar{b}^T \cdot \bar{x}(t) \end{cases}$$

é um sistema *observável* e “*dual*” do sistema

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \cdot \bar{x}(t) + \bar{b} \cdot u(t) \\ y(t) = \bar{c} \cdot \bar{x}(t) \end{cases}$$

que é um sistema *controlável*.

E vice versa.

É fácil de verificar que:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \tilde{\mathbf{c}} (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{b}} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \\ -1 & s & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & (s + \alpha_1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n}
 \end{aligned}$$

que é a *função de transferência (11.9)* do sistema.

Além disso,

$$\tilde{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \vdots & \dots & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & & & \\ \alpha_1 & 1 & & & & \\ 1 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

onde

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$$

são os coeficientes do *polinómio característico* de A .

matriz
triangular
superior

Exemplo 1 – Considere novamente o sistema do **Exemplo 1** do **capítulo 10**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}(t) \end{array} \right. \quad \mathbf{d} = 0$$

e transforme para a forma equivalente com $\tilde{\mathbf{A}}$ sendo na **forma dual da companheira**. Ache a **função de transferência** do sistema.

O **polinómio**

característico de \mathbf{A} é $\Delta(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -3 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda + 2$

logo,

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = -9$$

$$\alpha_3 = 2$$

Exemplo 1 (continuação):

Usando (11.4), temos

$$V = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

portanto

$$\rho(V) = \rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 3 \quad \longrightarrow \quad \text{o sistema é observável}$$

Além disso, usando (11.10) e (11.11), obtém-se as matrizes \tilde{A} e \tilde{b} , que são A e b na *forma dual da companheira*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 (continuação):
e portanto, de (11.5)

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{c}\tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{c}\tilde{\mathbf{A}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

matriz
triangular
inferior

logo, invertendo $\tilde{\mathbf{V}}$, obtemos

$$\tilde{\mathbf{V}}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz
triangular
superior

Alternativamente, como temos α_1 , α_2 e α_3 , podemos obter este mesmo $\tilde{\mathbf{V}}^{-1}$ já encontrado acima usando (11.21),

$$\tilde{\mathbf{V}}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz
triangular
superior

Exemplo 1 (continuação):

Agora podemos calcular e_0 , e_1 e e_2 , usando (11.20),

$$e_0 = 1$$

$$e_1 = -\alpha_1 \cdot e_0 = 0$$

$$e_2 = -\alpha_1 \cdot e_1 - \alpha_2 \cdot e_0 = 9$$

e assim podemos obter este mesmo \tilde{V} já encontrado acima usando (11.19),

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & e_1 \\ 1 & e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

matriz
triangular
inferior

Portanto, agora podemos calcular P , usando (11.6),

$$P = \tilde{V}^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 (continuação):

Observe entretanto que este mesmo \mathbf{P} pode ser obtido da seguinte maneira: primeiramente, achar os vetores linha \mathbf{p}_3 , \mathbf{p}_2 e \mathbf{p}_1 usando (11.12)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_3 = \mathbf{c} = [0 \ 0 \ 1] \\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{p}_3 = \mathbf{cA} + \alpha_1 \mathbf{c} = [0 \ 2 \ 0] \\ \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{p}_3 = \mathbf{cA}^2 + \alpha_1 \mathbf{cA} + \alpha_2 \cdot \mathbf{c} = [6 \ -2 \ -7] \end{array} \right.$$

e a seguir, usando (11.13)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que é o mesmo \mathbf{P} obtido acima usando (11.7), isto é, $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{v}$.

Exemplo 1 (continuação):

Agora, tendo \mathbf{P} , já podemos achar $\tilde{\mathbf{b}}$, ou seja, \mathbf{b} na *forma dual da companheira*, usando (11.15)

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \beta_3 = 3 \\ \beta_2 = 2 \\ \beta_1 = 1 \end{cases}$$

Observe também que, tendo \mathbf{P} pode-se calcular $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$, usando (11.3).

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 (continuação):

O sistema completo na *forma dual da companheira* é então dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{c}}} \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right. \quad \leftarrow \tilde{\mathbf{d}} = 0$$

Note que, ao se comparar a *forma dual da companheira* deste **Exemplo** com a *forma companheira* do **Exemplo 1**, capítulo 10, temos:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^T, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{c}}^T \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{b}}^T$$

Exemplo 1 (continuação):

Observe que, agora que temos \mathbf{P} , também podemos calcular $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{b}}$ utilizando (11.14), obtendo as mesmas matrizes que já tínhamos achado acima usando (11.10) e (11.11).

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As mesmas matrizes $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{c}}$ já encontradas aqui mais acima.

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fica assim claro que o cálculo da matriz \mathbf{P} acima era importante para se encontrar $\tilde{\mathbf{b}}$. Por outro lado, a matriz \mathbf{P} fornece uma forma alternativa para encontrar $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{c}}$.

Exemplo 1 (continuação):

Agora usando (11.9), a função de transferência do sistema é

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 - 9s + 2}$$

Note que esta função de transferência também poderia ter sido obtida usando

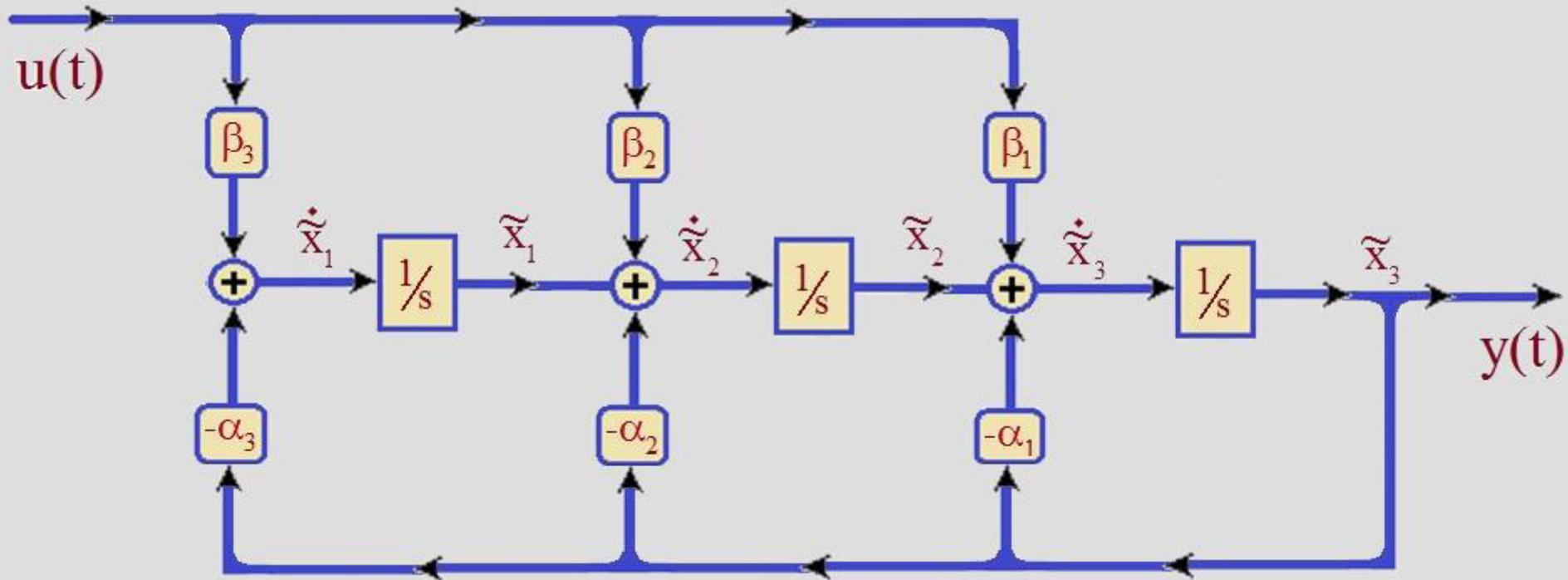
$$G(s) = \mathbf{c} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

ou

$$\begin{aligned} G(s) &= \tilde{\mathbf{c}} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & 0 & 2 \\ -1 & s & -9 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 - 9s + 2} \end{aligned}$$

Exemplo 1 (continuação):

O diagrama de blocos para a *simulação analógica* deste sistema depois de transformado para a *forma dual da companheira* é:



que é mais simples que a *simulação analógica* deste mesmo sistema na forma original.

Assim como na *forma companheira*, a representação de um sistema na *forma dual da companheira* tem as vantagens de o número de coeficientes com valor 'zero' igual ou superior a $(n^2 - n)$ e que o número máximo de coeficientes diferentes de 'zero' ou 'um' são apenas $2n$.

No caso geral pode-se ter até $(n^2 + 2n)$ coeficientes \neq 'zero' ou 'um' e por isso serem necessários um igual número de amplificadores/atenuadores para os representar na *simulação analógica*.

Em resumo, à semelhança da *forma companheira*, o diagrama de blocos de um sistema na *forma dual da companheira* é bem mais simples, o que significa que as conexões a serem feitas na *simulação analógica* também são mais simples.

Exemplo 2 – Considere novamente o sistema do Exemplo 2 do capítulo 10

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathbf{d} = 0$$

A equação característica do sistema é:

$$\Delta(s) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = (s-1)(s+2) = s^2 + s - 2$$

Logo,

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = -2$$

Exemplo 2 (continuação):

Usando (11.10) e (11.11), obtém-se as matrizes \tilde{A} e \tilde{c} , que são A e c na *forma dual da companheira*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que se calcularmos a *equação característica* do sistema através de \tilde{A} obtém-se o mesmo resultado já encontrado com A e \bar{A} (*forma companheira*, Exercício 2 do capítulo 10). Ou seja,

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(sI - \tilde{A}) = \det \begin{bmatrix} s & -2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2)$$

isto é,

$$\Delta(s) = \tilde{\Delta}(s) = \bar{\Delta}(s)$$

como era de se esperar pois A , \bar{A} e \tilde{A} são todas matrizes similares. São matrizes de representações diferentes do mesmo sistema.

Exemplo 2 (continuação):

Usando (11.5), temos

$$V = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

portanto

$$\rho(V) = \rho \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 2 \quad \longrightarrow \quad \text{o sistema é observável}$$

Além disso, usando (11.5) com \tilde{A} e \tilde{c} obtemos \tilde{V}

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{c}\tilde{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matriz triangular inferior

Exemplo 2 (continuação):

logo, invertendo V e \tilde{V} , obtemos

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz
triangular
superior

Calculando e_0 e e_1 usando as equações em (11.20),

$$\begin{cases} e_0 = 1 \\ e_1 = -\alpha_1 \cdot e_0 = -1 \end{cases}$$

podemos então calcular \tilde{V} usando (11.19)

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

de facto, é o mesmo \tilde{V} já encontrado aqui mais acima.

Exemplo 2 (continuação):

e calculamos também \tilde{V}^{-1} usando (11.21),

$$\tilde{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

também de facto, o mesmo \tilde{V}^{-1} já encontrado aqui mais acima.

Portanto, agora já podemos calcular **P** e **Q**, usando (11.6) e (11.7), respectivamente

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \tilde{V}^{-1} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 (continuação):

Observe entretanto que este mesmo \mathbf{P} também poderia ser obtido usando as equações em (11.12)

$$\begin{cases} \mathbf{p}_2 = \mathbf{c} = [1 & 1] \\ \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{p}_2 = \mathbf{cA} + \alpha_1 \mathbf{c} = [3 & -1] \end{cases}$$

e então da eq. (11.13) temos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que de facto é o mesmo \mathbf{P} obtido acima usando (11.7), isto é, $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{v}$.

Por outro lado, da eq. (11.3) temos

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 \\ -0,25 & 0,75 \end{bmatrix}$$

que de facto corresponde ao \mathbf{Q} obtido acima usando (11.6), isto é, $\mathbf{Q} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$.

Exemplo 2 (continuação):

Agora usando (11.14) e (11.15) obtemos as *forma dual das companheiras* de A , b e c

$$\tilde{A} = P A P^{-1} = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = c \cdot P^{-1} = c \cdot Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

os mesmos \tilde{A} e \tilde{c} obtidos acima usando (11.10) e (11.11).

$$\tilde{b} = [\beta_2 \ \beta_1] = P \cdot b = Q^{-1} b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \beta_2 \\ \leftarrow \beta_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 3 \end{cases}$$

Novamente, P ou Q foi útil apenas para se encontrar \tilde{b} .

Exemplo 2 (continuação)

O sistema completo na *forma dual da companheira* é portanto dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{c}}} \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right. \quad \leftarrow \tilde{\mathbf{d}} = 0$$

e, agora que temos α_1 e α_2 assim como β_1 e β_2 , podemos facilmente obter a *função de transferência* do sistema usando (11.9).

$$G(s) = \frac{\beta_1 s + \beta_2}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} = \frac{s + 3}{s^2 + s - 2}$$

Exemplo 2 (continuação):

Note que esta *função de transferência* poderia igualmente ter sido obtida usando

$$G(s) = \mathbf{c} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$= \bar{\mathbf{c}} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{b}}$$

$$= \tilde{\mathbf{c}} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{b}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{s + 3}{s^2 + s - 2}$$

$\Delta(s)$



Exemplo 2 (continuação):

Novamente, pode-se comparar a *forma dual da companheira* deste Exemplo com a *forma companheira* do Exemplo 2, capítulo 10, para verificar as relações em (11.16), (11.17) e (11.18):

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^T,$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{c}}^T,$$

e

$$\tilde{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{b}}^T.$$

Observações finais:

A *forma dual da companheira* é também chamada de “*forma observável*” pois os sistemas nesta forma são sempre *observáveis*.

Pelos **Teoremas 2 e 3** acima pode-se verificar que:

se o sistema *não é observável*, *não* é possível coloca-lo na *forma dual da companheira*, embora sempre poderemos encontrar

\tilde{A} , a matriz A na *forma dual da companheira* e

$$\tilde{c} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

Por outro lado,

o sistema pode estar na *forma dual da companheira* e **NÃO** ser *controlável*.



Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Thank you!
Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt