

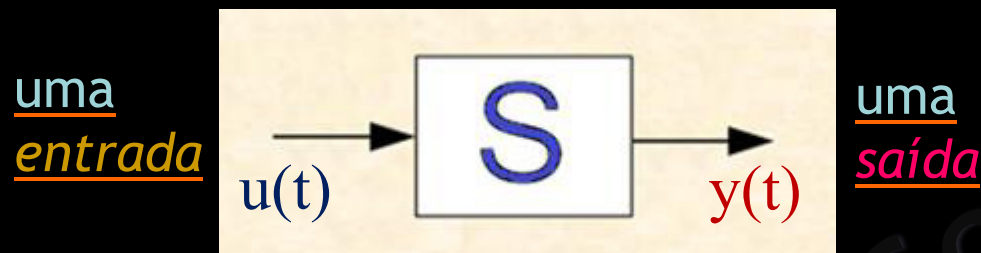
# Controlo Avançado

10

“Forma companheira”

J. A. M. Felippe de Souza

Considere um sistema de uma entrada e uma saída.



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (10.1)$$

$\leftarrow \mathbf{d} = 0$

Já vimos no capítulo 6, (6.12)-(6.14) que se  $\mathbf{P}$  é inversível e

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{P} \mathbf{b}$$

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{P}^{-1}$$

então o sistema

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{b}} u(t), & \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \bar{\mathbf{c}} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (10.2)$$

$\leftarrow \bar{\mathbf{d}} = 0$

é equivalente a (10.1).

Cada componente  $\bar{x}_i(t)$  do novo estado  $\bar{x}(t)$  é uma combinação linear das componentes  $x_i(t)$  do estado original do sistema.

O novo estado  $\bar{x}(t)$  satisfaz

$$\bar{x} = P x$$

**Definição 1** – Aqui vamos por vezes utilizar a inversa de  $P$ , ou seja  $P^{-1}$ , como sendo  $Q$ .

$$P = Q^{-1} \quad \text{e} \quad Q = P^{-1} \quad (10.3)$$

Se  $U$  for a matriz definida em (8.5), capítulo 8

$$U = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] \quad (10.4)$$

e  $\bar{U}$  for a matriz

$$\bar{U} = [\bar{b} \quad \bar{A}\bar{b} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{b}] \quad (10.5)$$

então

$$\bar{U} = P \cdot \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = P \cdot U = Q^{-1} \cdot U$$

o que permite concluir:

**Teorema 1** – O sistema (10.1) é controlável se e somente se sistema (10.2) é controlável.

Note que como o sistema só tem uma entrada,  $b$  é um vetor coluna e portanto  $U$  é uma matriz quadrada.

**Teorema 2** – Se (10.1) é controlável, então  $U$  e  $\bar{U}$  são inversíveis e

$$P = \bar{U} \cdot U^{-1} \quad (10.6)$$

$$Q = U \cdot \bar{U}^{-1} \quad (10.7)$$

**Teorema 3** – Se o sistema (10.1) é controlável, então ele pode ser transformado num sistema equivalente da forma:

## Forma companheira

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{b}}} \cdot u(t) \\
 y(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \cdots & \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{c}}} \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) \quad \leftarrow \bar{d} = 0
 \end{aligned} \tag{10.8}$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , são os coeficientes do *polinómio característico* de  $\mathbf{A}$

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

Além disso, a *função de transferência* do sistema tem a forma

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \quad (10.9)$$

Portanto,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , que aparecem em  $\bar{C}$  são os coeficientes do *numerador* da *função de transferência* do sistema.

**Definição 2** – A matriz  $\bar{A}$  conforme aparece no sistema (10.8), e repetida abaixo em (10.10), é chamada de a “*forma companheira*” de  $A$  (‘*companion form*’ of  $A$ ).

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

**Definição 3** – Semelhantemente, o sistema (10.8) é dito estar na “*forma companheira*” (‘*companion form*’).

Note que um **sistema** pode ser escrito na “**forma companheira**” (10.8) diretamente da **função de transferência** do **sistema** na forma (10.9), onde o **polinômio característico** no denominador é mônico, isto é, tem o coeficiente do termo de mais alto grau ( $s^n$ ) igual a 1.

Neste **capítulo** e nos próximos usaremos a barra em  $\bar{A}$ ,  $\bar{b}$  e  $\bar{c}$  exclusivamente para denotar estas três matrizes na forma como aparecem no **sistema** (10.8), isto é, na **forma companheira**, ou seja,  $\bar{A}$  dado por em (10.10) acima,  $\bar{b}$  e  $\bar{c}$  dado por (10.11) abaixo.

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{c} = [\beta_n \quad \beta_{n-1} \quad \beta_{n-2} \quad \cdots \quad \beta_2 \quad \beta_1] \quad (10.11)$$

Demonstração do **Teorema 3** –

Observe que se o sistema (10.1) é ‘controlável’, então as colunas de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

são L.I., logo, os *vetores coluna*

$$\{ \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_n \}$$

definidos por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_n = \mathbf{b} \\ \mathbf{q}_{n-1} = \mathbf{A}\mathbf{q}_n + \alpha_1 \mathbf{q}_n = \mathbf{A}\mathbf{b} + \alpha_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{q}_{n-2} = \mathbf{A}\mathbf{q}_{n-1} + \alpha_2 \mathbf{q}_n = \mathbf{A}^2\mathbf{b} + \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{b} + \alpha_2 \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_1 = \mathbf{A}\mathbf{q}_2 + \alpha_{n-1} \mathbf{q}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} + \alpha_1 \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} + \dots + \alpha_{n-1} \cdot \mathbf{b} \end{array} \right. \quad (10.12)$$

também são L.I.

A representação de  $A$  na base  $\{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n\}$  é  $\bar{A}$

Pelos Teorema 4 e 6, capítulo 2,

$$Aq_1 = A^n b + \alpha_1 A^{n-1} b + \dots + \alpha_{n-1} A b + \underbrace{(\alpha_n I - \alpha_n I) b}_{=0}$$

$$= \Delta(A) \cdot b - \alpha_n I b$$

$$= -\alpha_n \cdot b$$

$$= -\alpha_n \cdot q_n = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_n \end{bmatrix}$$

$$Aq_2 = q_1 - \alpha_{n-1} \cdot q_n = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$Aq_n = q_{n-1} - \alpha_1 \cdot q_n = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

A representação de  $\mathbf{b}$  nesta mesma base é

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, se nós definirmos

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_n] = \mathbf{P}^{-1} \quad (10.13)$$

e  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{x}$ , ou seja  $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}}$

obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}}_{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b}}_{\bar{\mathbf{b}}} u \\ \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{c} \mathbf{Q}}_{\bar{\mathbf{c}}} \mathbf{x} \end{array} \right.$$

Logo, temos a seguinte relação:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} \\ \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b} \end{array} \right\} \quad (10.14)$$

e  $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{Q}$ , logo, os valores  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  podem ser obtidos usando

$$\bar{\mathbf{c}} = [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \dots \ \beta_2 \ \beta_1] = \mathbf{c} \cdot \mathbf{Q} \quad (10.15)$$

É fácil de verificar que:

$$\begin{aligned} G(s) &= \bar{\mathbf{c}} (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{b}} = \\ &= [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \dots \ \beta_2 \ \beta_1] \cdot \begin{bmatrix} s & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s & -1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_2 & (s + \alpha_1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \end{aligned}$$

que é a *função de transferência* (10.9) do sistema.

Note que  $\bar{U}$ , definido em (10.5) é expresso como:

$$\bar{U} = [\bar{b} \quad \bar{A}\bar{b} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{b}] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & & & & & & 1 \\ & 0 & & & & & 1 \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & \dots & \\ 1 & & & & & & & & e_1 \\ & e_1 & & & & & & & \vdots \\ & & e_2 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & e_{n-2} & & & & \\ & & & & & e_{n-1} & & & \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

matriz  
triangular  
inferior

onde

$$\begin{cases} e_0 = 1 \\ e_k = -\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i+1} \cdot e_{k-i-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (10.17)$$

Além disso,

$$\bar{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \vdots & \dots & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & & & \\ \alpha_1 & 1 & & & & \\ 1 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

onde

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$$

são os coeficientes do *polinômio característico* de  $A$ .

matriz  
triangular  
superior

## Exemplo 1 – Transforme o sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

←  $d = 0$

na **forma** equivalente com  $\bar{\mathbf{A}}$  sendo na **forma companheira**.  
Ache a **função de transferência** do sistema.

$$\Delta(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -3 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda + 2$$

Logo,

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = -9$$

$$\alpha_3 = 2$$

**Exemplo 1** (continuação): Usando (10.4), temos

$$U = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

portanto

$$\rho(U) = \rho \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} = 3 \quad \longrightarrow \quad \text{o sistema é controlável}$$

Além disso, usando (10.10) e (10.11), obtém-se as matrizes  $\bar{A}$  e  $\bar{b}$ , que são  $A$  e  $b$  na *forma companheira*

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 1** (continuação)  
e portanto, de (10.5)

$$\bar{U} = [\bar{b} \quad \bar{A}\bar{b} \quad \bar{A}^2\bar{b}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

matriz  
triangular  
inferior

logo, invertendo  $\bar{U}$ , obtemos

$$\bar{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz  
triangular  
superior

Alternativamente, como temos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , podemos obter este mesmo  $\bar{U}^{-1}$  já encontrado acima usando (10.18),

$$\bar{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz  
triangular  
superior

**Exemplo 1** (continuação):

Agora podemos calcular  $e_0$ ,  $e_1$  e  $e_2$ , usando (10.17),

$$e_0 = 1$$

$$e_1 = -\alpha_1 \cdot e_0 = 0$$

$$e_2 = -\alpha_1 \cdot e_1 - \alpha_2 \cdot e_0 = 9$$

e assim podemos obter este mesmo  $\bar{U}$  já encontrado acima usando (10.16),

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 1 & e_1 \\ 1 & e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

matriz  
triangular  
inferior

Portanto, agora podemos calcular  $Q$ , usando (10.7),

$$Q = U \cdot \bar{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 1** (continuação):

Observe entretanto que este mesmo  $Q$  pode ser obtido da seguinte maneira: primeiramente, achar os vetores coluna  $q_3$ ,  $q_2$  e  $q_1$  usando (10.12)

$$\left\{ \begin{array}{l} q_3 = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ q_2 = A \cdot q_3 + \alpha_1 \cdot q_3 = Ab + \alpha_1 \cdot b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \\ q_1 = A \cdot q_2 + \alpha_2 \cdot q_3 = A^2 b + \alpha_1 \cdot Ab + \alpha_2 \cdot b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

e a seguir, usando (10.13)

$$Q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3] = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

que é o mesmo  $Q$  obtido acima usando (10.7), isto é,  $Q = U \cdot \bar{U}^{-1}$

**Exemplo 1** (continuação):

Agora, tendo  $Q$ , já podemos achar  $\bar{c}$ , ou seja,  $c$  na *forma companheira*, usando (10.15)

$$\begin{aligned}\bar{c} &= [\beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1] = c \cdot Q \\ &= [3 \quad 2 \quad 1]\end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \beta_3 = 3 \\ \beta_2 = 2 \\ \beta_1 = 1 \end{cases}$$

Observe também que, tendo  $Q$  pode-se calcular  $P = Q^{-1}$ , em (10.3).

$$P = Q^{-1} = \bar{U} \cdot U^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 5/8 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 1 (continuação):

O sistema completo na *forma companheira* é então dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{b}}} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right.$$

$\bar{\mathbf{d}} = 0$

**Exemplo 1** (continuação):

Observe que, agora que temos  $Q$ , também podemos calcular  $\bar{A}$  e  $\bar{b}$  utilizando (10.14), obtendo as mesmas matrizes que já tínhamos achado acima usando (10.10) e (10.11).

$$\bar{A} = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

As mesmas matrizes  $\bar{A}$  e  $\bar{b}$  já encontradas aqui mais acima.

$$\bar{b} = Q^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fica assim claro que o cálculo da matriz  $Q$  acima foi importante para se encontrar  $\bar{c}$ . Por outro lado, a matriz  $Q$  fornece uma forma alternativa para encontrar  $\bar{A}$  e  $\bar{b}$ .

**Exemplo 1** (continuação):

Agora usando (10.9), a *função de transferência* do sistema é

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 - 9s + 2}$$

Note que esta *função de transferência* também poderia ter sido obtida usando

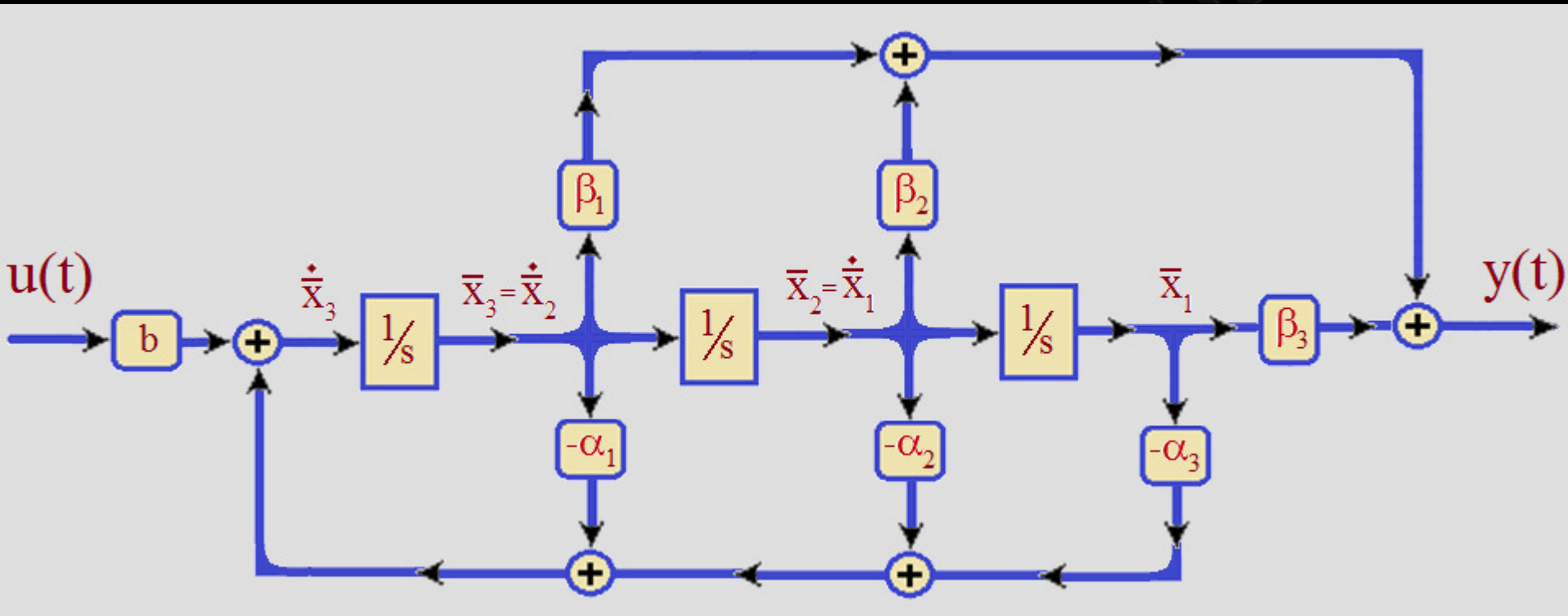
$$G(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b$$

ou

$$\begin{aligned} G(s) &= \bar{c} \cdot (sI - \bar{A})^{-1} \cdot \bar{b} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & -9 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 - 9s + 2} \end{aligned}$$

## Exemplo 1 (continuação):

O diagrama de blocos para a *simulação analógica* deste sistema depois de transformado para a *forma companheira* é:



que é mais simples que a *simulação analógica* deste mesmo sistema na forma original.

Uma das **vantagens** da representação de um **sistema** na **forma companheira** deve-se ao facto que o número de **coeficientes** com valor = 'zero' é igual ou superior a  $(n^2 - n)$ , e o número máximo de **coeficientes**  $\neq$  'zero' ou 'um' não ultrapassam  $n$ .

No caso geral pode-se ter até  $(n^2 + 2n)$  **coeficientes**  $\neq$  'zero' ou 'um' e por isso serem necessários um **igual número** de amplificadores/atenuadores para os representar na **simulação analógica**.

Em resumo, o **diagrama de blocos** de um **sistema** na **forma companheira** é bem mais simples, o que significa que as conexões a serem feitas na **simulação analógica** também são mais simples.

**Exemplo 2** – Considere o sistema de 2ª ordem abaixo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$\mathbf{d} = 0$

A equação característica do sistema é:

$$\Delta(s) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = (s-1)(s+2) = s^2 + s - 2$$

Logo,

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = -2$$

## Exemplo 2 (continuação):

Usando (10.10) e (10.11), obtém-se as matrizes  $\bar{A}$  e  $\bar{b}$ , que são  $A$  e  $b$  na *forma companheira*

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que se calcularmos a *equação característica* do **sistema** através de  $\bar{A}$ , obtém-se o mesmo resultado já encontrado com  $A$ . Ou seja,

$$\bar{\Delta}(s) = \det(sI - \bar{A}) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 + s - 2 = (s - 1)(s + 2)$$

isto é,

$$\Delta(s) = \bar{\Delta}(s)$$

como era de se esperar pois  $A$  e  $\bar{A}$  são matrizes similares.  
São matrizes de representações diferentes do mesmo **sistema**.

Exemplo 2 (continuação):

Usando (10.5), temos

$$\mathbf{U} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

portanto

$$\rho(\mathbf{U}) = \rho \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \quad \longrightarrow \quad \text{o sistema é controlável}$$

Além disso, usando (10.5) com  $\bar{\mathbf{A}}$  e  $\bar{\mathbf{b}}$  obtemos  $\bar{\mathbf{U}}$

$$\bar{\mathbf{U}} = [\bar{\mathbf{b}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{b}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matriz  
triangular  
inferior

**Exemplo 2** (continuação):

logo, invertendo  $\mathbf{U}$  e  $\bar{\mathbf{U}}$ , obtemos

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{U}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz  
triangular  
superior

Calculando  $e_0$  e  $e_1$  usando as equações em (10.17),

$$\begin{cases} e_0 = 1 \\ e_1 = -\alpha_1 \cdot e_0 = -1 \end{cases}$$

podemos então calcular  $\bar{\mathbf{U}}$  usando (10.16)

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

de facto, é o  
mesmo  $\bar{\mathbf{U}}$  já  
encontrado  
aqui mais  
acima.

**Exemplo 2** (continuação):

e calculamos também  $\bar{U}^{-1}$  usando (10.18),

$$\bar{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

também de facto, o mesmo  $\bar{U}^{-1}$  já encontrado aqui mais acima.

Portanto, agora já podemos calcular  $P$  e  $Q$ , usando (10.6) e (10.7), respectivamente

$$P = \bar{U} \cdot U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q = U \cdot \bar{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 2** (continuação):

Observe entretanto que este mesmo  $Q$  também poderia ser obtido usando as equações em (10.12)

$$\begin{cases} q_2 = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ q_1 = A \cdot q_2 + \alpha_1 \cdot q_2 = Ab + \alpha_1 \cdot b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

e então da eq. (10.13) temos

$$Q = [q_1 \ q_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que de facto é o mesmo  $Q$  obtido acima usando (10.7), isto é,  $Q = U \cdot \bar{U}^{-1}$ .

Por outro lado, da eq. (10.3) temos

$$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

que de facto corresponde ao  $P$  obtido acima usando (10.6), isto é,  $P = \bar{U} \cdot U^{-1}$ .

## Exemplo 2 (continuação):

Agora usando (10.14) e (10.15) obtemos as *formas companheiras* de  $A$ ,  $b$  e  $c$

$$\bar{A} = Q^{-1} A Q = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = Q^{-1} b = P b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

os mesmos  $\bar{A}$  e  $\bar{b}$  obtidos acima usando (10.10) e (10.11).

$$\bar{c} = [\beta_2 \quad \beta_1] = c \cdot Q = c \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\beta_2$

$\beta_1$

$$\begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 3 \end{cases}$$

Novamente,  $P$  ou  $Q$  foi útil para se encontrar  $\bar{c}$  apenas.

## Exemplo 2 (continuação):

O sistema completo na *forma companheira* é portanto dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{b}}} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right. \quad \leftarrow \bar{\mathbf{d}} = 0$$

E, agora que temos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  assim como  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , podemos facilmente obter a *função de transferência* do sistema usando (10.9).

$$G(s) = \frac{\beta_1 s + \beta_2}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} = \frac{s + 3}{s^2 + s - 2}$$

**Exemplo 2** (continuação):

Note que esta *função de transferência* poderia igualmente ter sido obtida usando

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \mathbf{c} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} \\
 &= \bar{\mathbf{c}} \cdot (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{b}} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}}_{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \\
 &= \frac{s + 3}{s^2 + s - 2} \leftarrow \Delta(s)
 \end{aligned}$$

### Caso $d \neq 0$

ocorre quando  $G(s)$  possui o grau do numerador igual ao grau do denominador.

Considere agora o sistema de uma entrada, uma saída e  $d \neq 0$ .

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) + d u(t) \end{cases} \quad (10.19)$$

Se  $\mathbf{P}$  é inversível e

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{P} \mathbf{b}$$

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{P}^{-1}$$

$$\bar{d} = d$$

então o sistema

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{b}} u(t), & \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \bar{\mathbf{c}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{d} u(t) \end{cases} \quad (10.20)$$

é equivalente a (10.19).

**Definição 4** – Semelhantemente ao sistema (10.8), o sistema (10.20) é dito estar na “*forma companheira*” (*‘companion form’*).

Além disso, a *função de transferência* do sistema tem a forma

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} + d \\
 &= \frac{\gamma_0 s^n + \gamma_1 s^{n-1} + \gamma_2 s^{n-2} + \dots + \gamma_{n-1} s + \gamma_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n}
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = d \\ \gamma_i = \beta_i + d \cdot \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \tag{10.22}$$

Por outro lado,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , os coeficientes de  $\bar{c}$ , são:

$$\beta_i = \gamma_i - d \cdot \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{10.23}$$

Note que no caso de  $d = 0$ , as equações em (10.22) tornam-se:

$$\gamma_0 = 0$$

$$\gamma_i = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e a equação (10.23) torna-se:

$$\beta_i = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ou seja, a equação (10.21) torna-se a mesma que a (10.9), a qual repetimos abaixo

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \quad (10.9)$$

Logo, as equações em (10.22) e (10.23) para  $d \neq 0$ , também valem para  $d = 0$ , e são portanto uma generalização, valem para qualquer  $d \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3** – Considere o sistema de 2ª ordem abaixo que é o mesmo que do **Exemplo 2** mas com  $d = 2$ .

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} u(t) \end{cases}$$

A equação característica do sistema  $\Delta(s)$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $e_o$ ,  $e_1$ ,  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}^{-1}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  são os mesmos já calculados no **Exemplo 2**.

Usando (10.22) podemos achar  $\gamma_o$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

$$\begin{cases} \gamma_o = d = 2 \\ \gamma_1 = \beta_1 + d \cdot \alpha_1 = 3 \\ \gamma_2 = \beta_2 + d \cdot \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Logo, o sistema completo na *forma companheira* é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{b}}} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{d}}} u(t) \end{array} \right.$$

e a *função de transferência* do sistema, usando (10.22), é:

$$G(s) = \frac{\gamma_0 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_2}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} = \frac{2s^2 + 3s - 1}{s^2 + s - 2}$$

### Observações finais:

A *forma companheira* é também chamada de “*forma controlável*” pois os sistemas nesta forma são sempre *controláveis*.

Pelos Teoremas 2 e 3 acima pode-se verificar que:

se o sistema *não* é *controlável*, *não* é possível colocá-lo na *forma companheira*, embora sempre poderemos encontrar

$\bar{A}$  = matriz  $A$  na *forma companheira*

e também, obviamente

$$\bar{b} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$$

Por outro lado,

o sistema pode estar na *forma companheira* e **NÃO** ser *observável*.



Departamento de  
Engenharia Eletromecânica

Thank you!  
Obrigado!

Felippe de Souza

[felippe@ubi.pt](mailto:felippe@ubi.pt)