Controlo Avançado

9
“Observabilidade de sistemas dinâmicos lineares”

J. A. M. Felippe de Souza

Aqui vamos introduzir o conceito de "*observabilidade*".

Ou seja, vamos lidar com a observação do sistema, isto é a saída $y(t)$ (*output*) do sistema.

Considere o sistema dinâmico *linear* já visto no Capítulo 7, eqs. (7.1) e (7.2) que aqui chamaremos de eqs. (9.1) e (9.2):

$$\begin{cases} x(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\,, \quad x(t_o) = x_o & (9.1) \\ y(t) = C(t)\,x(t) & (9.2) \end{cases}$$

onde, $A(t)$ é uma matriz $n \times n$
$B(t)$ é uma matriz $n \times p$
$C(t)$ é uma matriz $q \times n$

A saída $y(t)$ é dada por

$$y(t) = C(t)\cdot\Phi(t,t_o)\,x_o + \int_{t_o}^{t} C(t)\cdot\Phi(t,\tau)\cdot B(\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau$$

conforme vimos no Capítulo 7, Teorema 8.

Note que a saída $y(t)$ de um sistema depende de t, do estado no instante t, $x(t)$ e da entrada no instante t, $u(t)$.

Vamos portanto usar a notação

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$$

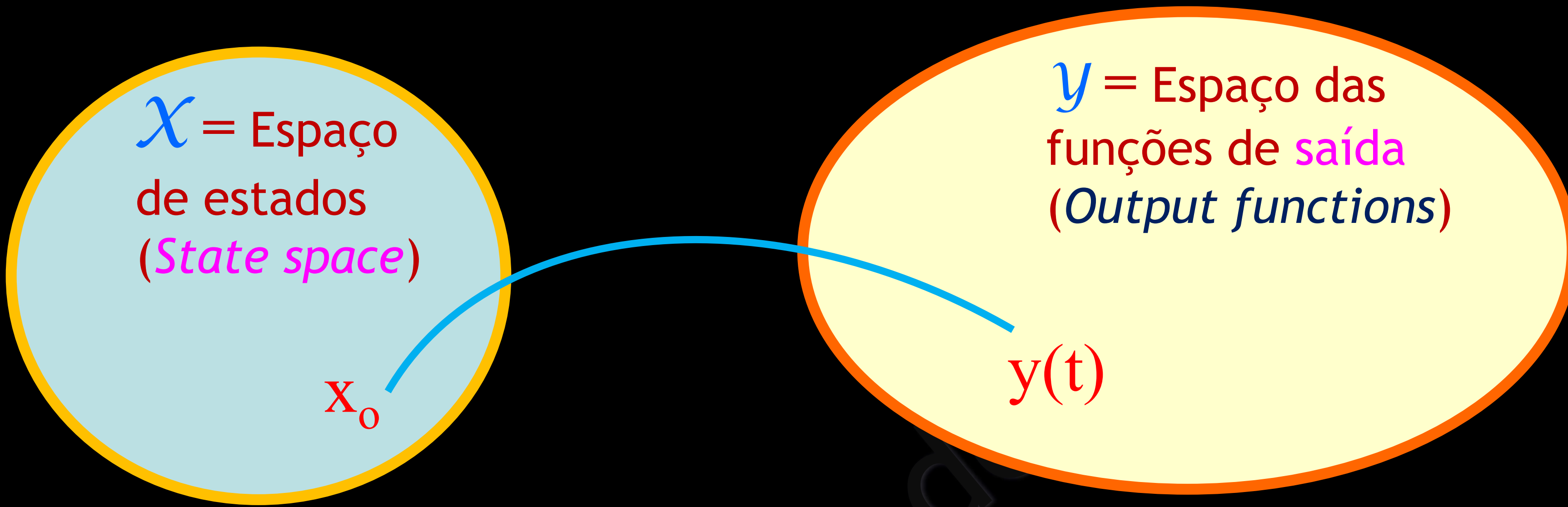
Definição 9.1 – Estados indistinguíveis

Dois estados x_1 e x_2 são indistinguíveis no intervalo $[t_o, t_1]$, $t_o < t_1$, se $\forall\ u(t) \in \mathcal{U}$ e para todo $t \in [t_o, t_1]$

$$\eta(t, \phi(t, t_o, x_1, u(\cdot)), u(t)) = \eta(t, \phi(t, t_o, x_2, u(\cdot)), u(t)) \qquad (9.3)$$

Isto é, a saída $y(t)$ do sistema quando x_1 é o *estado inicial* no instante t_o é a mesma saída $y(t)$ que para quando x_2 é o *estado inicial* no instante t_o.

Observabilidade de sistemas dinâmicos lineares



Definição 9.2 – O sistema é dito 'observável' se quaisquer dois estados $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ são distinguíveis, isto é,

não há estados indistinguíveis.

Isto é, todos os *estados* são 'distinguíveis', ou seja, o estado inicial $x_o \in \mathcal{X}$ do sistema, qualquer que ele seja, pode ser identificado através da saída $y(t)$ do sistema.

Para sistemas *lineares* é fácil de mostrar que (9.3) é equivalente a

$$\eta(t, \phi(t, t_o, x_1 - x_2, 0), 0) = 0 \qquad (9.4)$$

Definição 9.3 – O estado x_o é *não-observável* no intervalo $[t_o, t_1]$ se

$$\eta(t, \phi(t, t_o, x_o, 0), 0) = 0 \qquad \text{para todo } t \in [t_o, t_1]$$

Isto é, o estado x_o é *não-observável* se a saída $y(t)$ do sistema para a entrada $u(t) = 0$, $t \in [t_o, t_1]$ e o estado inicial x_o em t_o for

$$y(t) = 0, \quad t \in [t_o, t_1]$$

Observe que, pela expressão (9.4), se x_o é a diferença entre 2 estados indistinguíveis, então x_o é *não-observável*.

Vamos agora definir uma matriz $V(t)$ que vai permitir verificar a observabilidade do sistema.

Definição 9.4 –

$$V(t) = \begin{bmatrix} V_o(t) \\ V_1(t) \\ \vdots \\ V_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{cases} V_o(t) = C(t) \\ V_{k+1}(t) = V_k(t)\,A(t) + \dfrac{d}{dt} V_k(t)\,, \qquad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1 \end{cases}$$

Esta matriz $V(t)$ é comummente chamada de 'matriz observabilidade', e às vezes também é representada por $\mathcal{O}(t)$.

Teorema 9.1 –

O sistema é observável no intervalo $[t_o, t_1]$ se para algum $t_1 > t_o$ esta matriz $V(t)$ satisfaz

$$\text{rank}\left[\, V(t_1)\,\right] = n$$

Exemplo 9.1 – Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & -t \end{bmatrix}}^{A(t)} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B(t)} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}}_{C(t)} x \end{cases}$$

Calculando agora a matriz $V(t)$, temos que

$$V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \hline 0 & -2t \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \; V_o(t) \\ \} \; V_1(t) \end{matrix}$$

E claramente o

$\text{rank}\,(V(t)) = 1$ para $\forall t > 0$

e portanto este o sistema não é observável.

Se entretanto a matriz $C(t)$ for

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando novamente a matriz $V(t)$, para esta matriz $C(t)$ temos que

$$V(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hline t & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \; V_0(t) \\ \} \; V_1(t) \end{array}$$

Então, como agora o rank $\left(V(t)\right) = 2$ para $\forall t > 0$ este sistema se tornou observável.

Agora vamos considerar sistemas *lineares* e *invariantes no tempo* ou seja,

$$A(t) = A, \quad B(t) = B \quad \text{e} \quad C(t) = C$$

e veremos alguns resultados que permitem verificar observabilidade através das matrizes A e C.

Considere o sistema dinâmico *linear* das eqs. (9.1) e (9.2), agora *invariante no tempo* também

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u, \quad x(0) = x_o & (9.5) \\ y = C\,x & (9.6) \end{cases}$$

Definição 9.5 – *Subespaço não-observável* no intervalo $[t_o\,, t_1]$ se

$$\mathcal{O}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n\!:\ \eta(t, \phi(s, 0, x, 0), 0) = 0, \qquad \forall\ s \in [0\,, t]\}$$

Note que: $\mathcal{O}(t)$ é o conjunto dos estados *não-observáveis* em $[0\,, t]$.

Definição 9.6 –

$$\boxed{\mathcal{O} = \bigcap_{t\,\in\,[0\,,\,t_1]} \mathcal{O}(t)}$$

Note que: $\mathcal{O}$ é o conjunto dos estados *não-observáveis* em $[0\,, t]$ para algum t, $0 < t < t_1$

Teorema 9.2 –

O sistema é *observável* em $[0\,,t]$ se e somente se

$$\mathcal{O}(t) = \{\,0\,\}.$$

Teorema 9.3 –

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(t) = \bigcap_{t\,\in\,[0\,,\,t_1]} \mathcal{O}(t)$$ para qualquer $t > 0$.

Teorema 9.4 –

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} \ker\left(CA^{i-1}\right) = \{\,0\,\}}$$

se e somente se

$$\rho\,(V) = n$$

onde,

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Este teorema fornece um critério para verificar se o sistema é *observável*, da mesma forma que o Teorema 9.3, do Capítulo 8, nos fornecia um critério para verificar se o sistema é *controlável*.

O sistema é *observável* se, e somente se,

$$\text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{V} = n \qquad (9.7)$$

A eq. (9.7) acima é a condição do *rank*, é um resultado clássico em Controlo de Sistemas, um teste da '*observabilidade*' do sistema.

Novamente, a matriz V em (9.7) acima é comummente chamada de 'matriz *observabilidade*', e às vezes também é representada por $\mathscr{O}$.

Note que se o sistema tiver apenas uma saída, i.e., $y(\cdot)$ tem dimensão 1, então a matriz C será um *vetor linha* e consequentemente a matriz *observabilidade* V ou $\mathscr{O}$ será uma matriz $n \times n$ (*quadrada*).

Exemplo 1 – Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{A} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u(t) \\ y(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}}^{C} x(t) \end{cases}$$

Vemos, pela condição do *rank* (9.7), Teorema 9.4, que

$$\text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}}_{V \text{ ou } \mathscr{O}} = \text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & (2c_1 + c_2) \end{bmatrix}}_{V \text{ ou } \mathscr{O}}$$

$$\Rightarrow \quad \det \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}}_{V \text{ ou } \mathcal{F}} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & (2c_1 + c_2) \end{bmatrix}}_{V \text{ ou } \mathcal{F}} = 2c_1^2 \,,$$

Se $c_1 \neq 0$,
então

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}}_{V \text{ ou } \mathcal{F}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}}_{V \text{ ou } \mathcal{F}} = 2 \qquad = n$$

logo, neste caso o sistema é *observável*.

Caso contrário, se
$c_1 = 0$, então

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}}_{V \text{ ou } \mathcal{F}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}}_{V \text{ ou } \mathcal{F}} < 2 \qquad \neq n$$

neste caso o sistema não é *observável*.

Dois casos particulares são ilustrados abaixo:

i) $c_1 = 1$ e $c_2 = 0.$

Neste caso $y(t) = x_1(t)$ e o sistema é *observável*.

Isto é, $y(t)$ traz informações das duas componentes do estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para $t \in [t_o\ ,\ t_1]$.

ii) $c_1 = 0$ e $c_2 = 1.$

Neste caso $y(t) = x_2(t)$ e o sistema não é *observável*.

Isto é, existem estados indistinguíveis assim como estados *não-observáveis*.

Vamos olhar a cada um destes dois casos com mais detalhes.

i) $c_1 = 1$ e $c_2 = 0.$

Neste caso $y(t) = x_1(t)$ e o sistema é *observável*.

Na realidade,

$$y(t) = C\, e^{At}\, x_o =$$

$$= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}^{C} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}}^{e^{At}} \cdot x_o =$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \end{bmatrix} \cdot x_o =$$

$$= e^t\, x_{01} + 2te^t\, x_{02} =$$

$$= e^t\,(x_{01} + 2t\, x_{02}), \quad t > 0$$

ou seja,

$$y(t) = e^t x_{01} + 2te^t x_{02}$$

funções *linearmente independentes* L.I.

Portanto, todos os estados $x \neq 0$ são *observáveis*,

não há estados $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, que sejam *não-observável*,

$$\mathcal{O}(t) = \{\, 0 \,\}$$

("*Subespaço não-observável*")

ii) $c_1 = 0$ e $c_2 = 1.$

Neste caso $y(t) = x_2(t)$ e
o sistema não é *observável*.

Na realidade,

$$y(t) = C\, e^{At}\, x_o =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}}_{e^{At}} \cdot x_o =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & e^t \end{bmatrix} \cdot x_o =$$

$$= e^t\, x_{02}\,, \quad t > 0$$

$y(t)$ não traz informações de x_{01},
apenas de x_{02}.

Os estados

$$x_o = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_o' = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

são indistinguíveis.

Para ambos os casos quando $u(t) = 0$, a saída será

$$y(t) = 2\, e^t$$

O estado

$$\bar{x}_o = x_o - x_o' = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um estado *não-observável*.

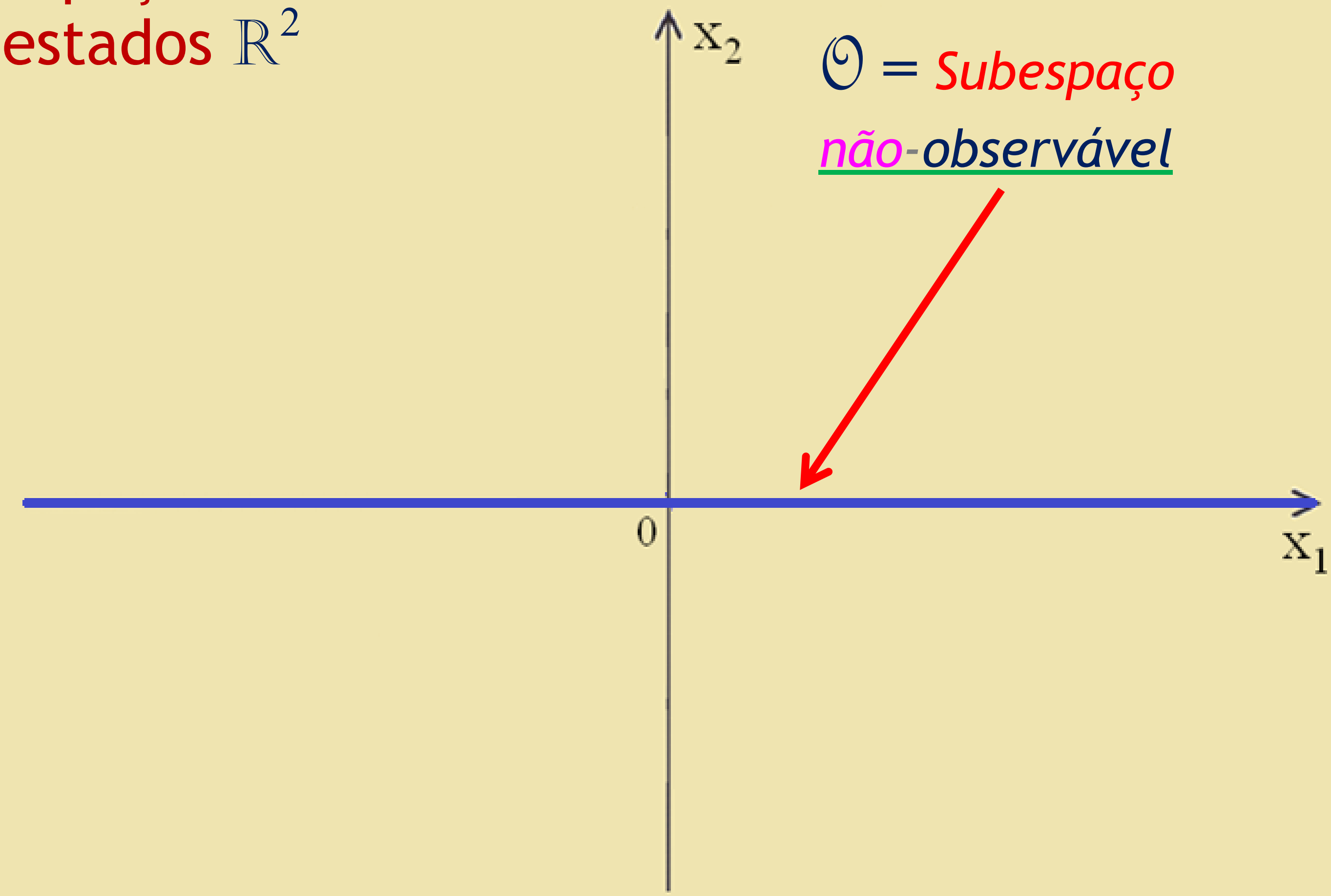
Para o estado inicial $\bar{x}_o$ e entrada $u(t) = 0$, temos que

$$y(t) = 0$$

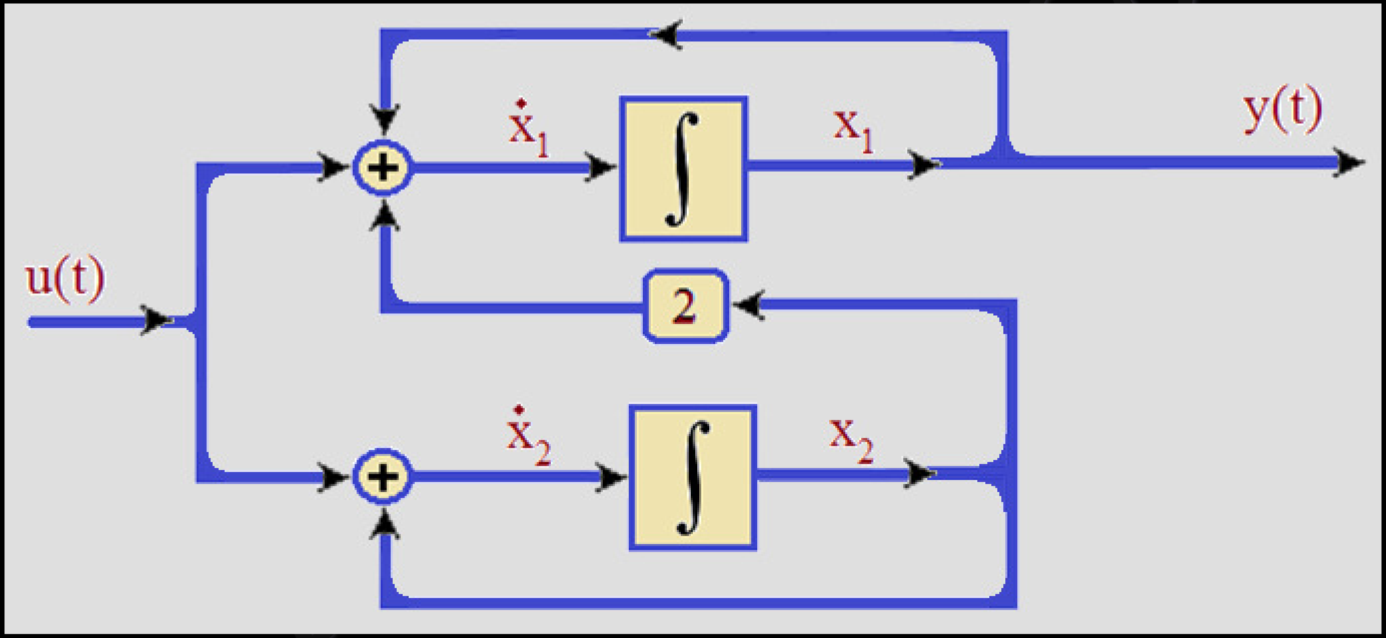
$$\mathcal{O} = \{ x = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2 : \; x_{02} = 0 \} = \text{eixo } x_1$$

(“*Subespaço não-observável*”)

Espaço de estados $\mathbb{R}^2$

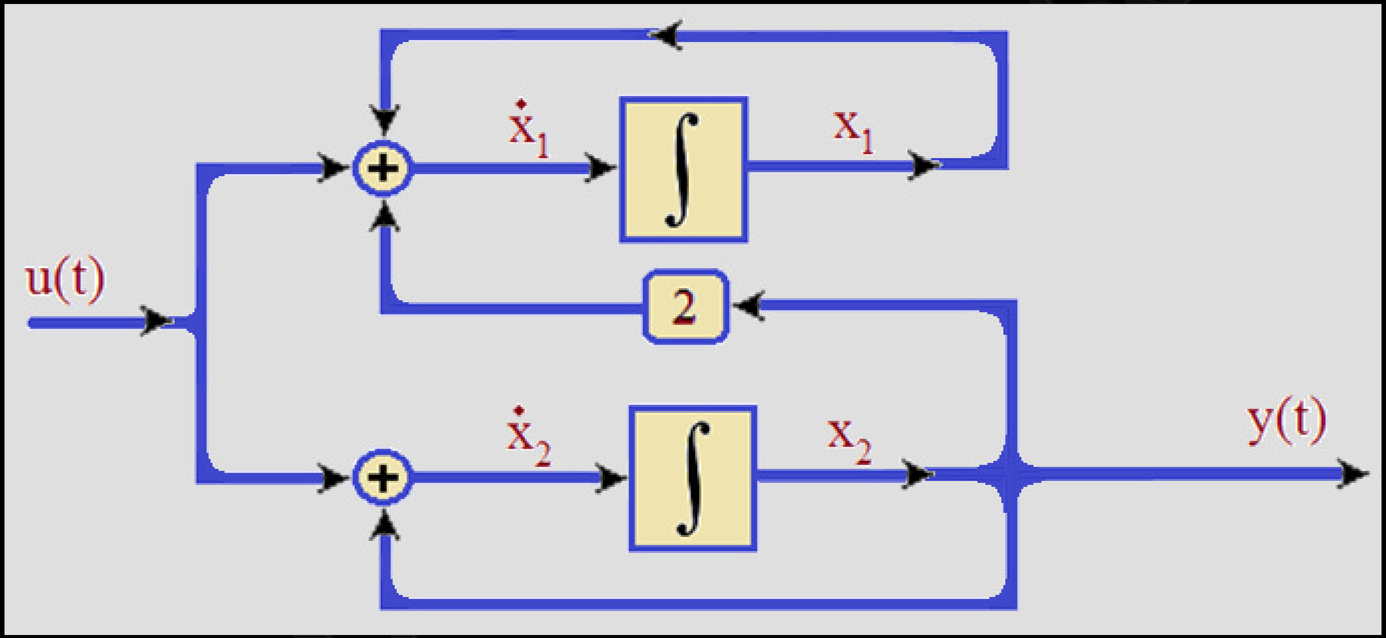


i) $c_1 = 1$ e $y(t) = x_1(t)$
$c_2 = 0$



$y(t)$ traz informações de ambos x_{01} e x_{02}.

ii) $c_1 = 0$ e $\quad y(t) = x_2(t)$
$c_2 = 1$



$y(t)$ não traz informações de x_{01}, apenas de x_{02}.

Exemplo 2: Considere o sistema de segunda ordem

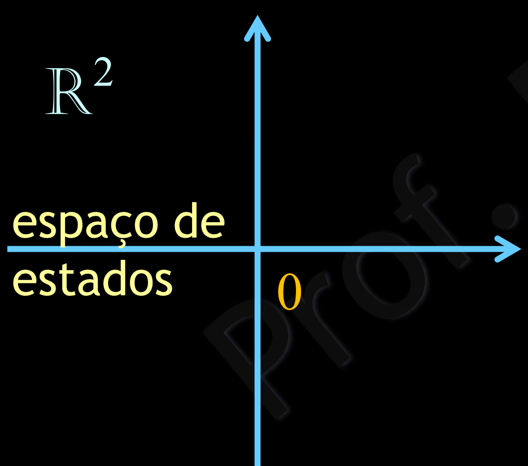
$$n = 2$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^{A} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{cases}$$

$$x(0) = x_o = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

Teste de *observabilidade*

(condição do *rank* (9.7), do Teorema 9.4):



$$\text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}}_{V \text{ ou } \mathscr{O}} = \text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{V \text{ ou } \mathscr{O}} = 1 < 2$$

$\neq n$

Logo, o sistema não é *observável*, não se pode identificar o estado inicial deste sistema para qualquer estado $x_o \in$ *Espaço* de estados $\mathbb{R}^2$. Vamos então achar o "*Subespaço não-observável*".

Usando (7.15), do Capítulo 7, quando a entrada $u(t) = 0$

$$x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ e^{t} - e^{2t} & e^{t} \end{bmatrix}}_{e^{At}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}}_{x_o} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot \underbrace{u(\tau)}_{0} \cdot d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t}\, x_{01} \\ \left(e^{t} - e^{2t}\right) x_{01} + e^{t}\, x_{02} \end{bmatrix} + \cancel{\int_0^t 0 \cdot d\tau} = 0 =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t}\, x_{01} \\ e^{t}\, x_{01} - e^{2t}\, x_{01} + e^{t}\, x_{02} \end{bmatrix}$$

A saída do sistema $y(t)$

$$y(t) = C\, e^{At}\, x_o =$$

$$= \overbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}}^{C} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} e^{2t}\, x_{01} \\ e^{t}\, x_{01} - e^{2t}\, x_{01} + e^{t}\, x_{02} \end{bmatrix}}^{x(t) \,=\, e^{At}\cdot x_o} =$$

$$= e^{t}\, x_{01} + e^{t}\, x_{02} =$$

$$= e^{t}\,(x_{01} + x_{02}), \quad t > 0$$

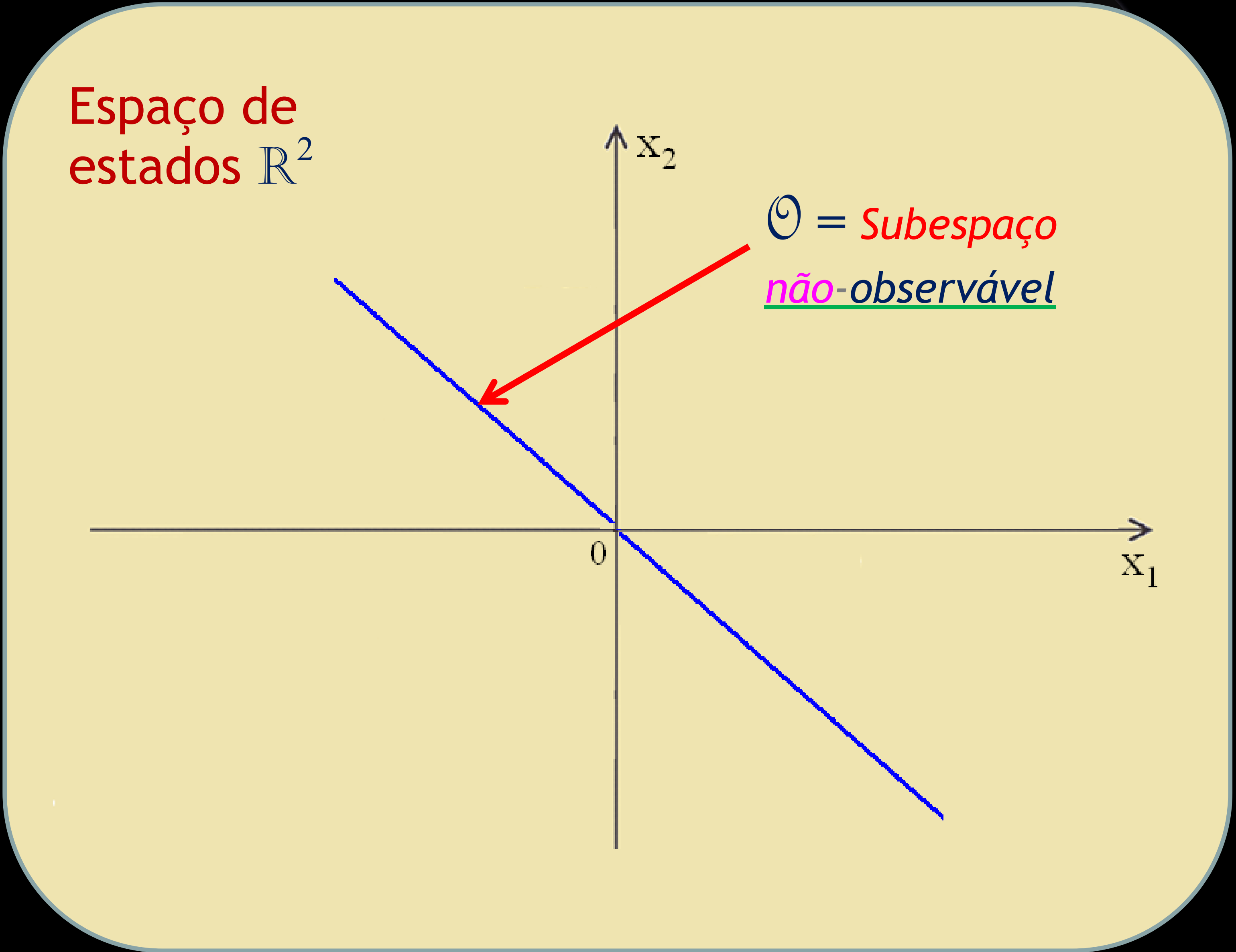
As informações que a saída $y(t)$ nos traz não é suficiente para identificar as componentes x_{01} e x_{02} separadamente.

O "*Subespaço não-observável*" é portanto:

$$\mathcal{O} = \{ x = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2 : x_{01} = -x_{02} \}.$$

$$\mathcal{O} = \{ x = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2 : x_{01} = -x_{02} \}.$$

("*Subespaço não-observável*")



Observe também que como a saída

$$y(t) = e^{t}\,(x_{01} + x_{02}), \qquad t > 0$$

então, quaisquer 2 estados x_0 e x_0' cuja soma das suas componentes

$$x_{01} \quad \text{e} \quad x_{02}$$

sejam as mesmas, são indistinguíveis.

Por exemplo, os estados x_o e x_o'

$$x_o = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_o' = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

são indistinguíveis.

Além disso, a diferença $(x_o - x_o)'$ é um estado *não-observável*.

$$\bar{x}_o = x_o - x_o' = \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \end{bmatrix} \in \mathcal{O}$$

UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Thank you!
Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt