Controlo Avançado

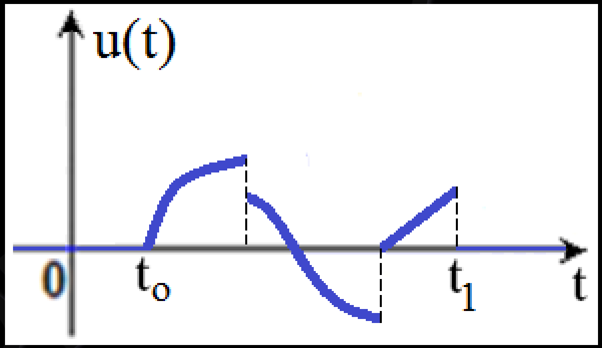
8
"Controlabilidade de sistemas dinâmicos lineares"

J. A. M. Felippe de Souza

Primeiramente introduziremos o conceito de "*controlabilidade*".

Definição 8.1 – $\mathscr{U}$ ou $\mathscr{U}_{[t_o\,,\,t_1]}$ espaço das funções *contínuas em intervalos* definidas em $[t_o\,,\,t_1]$.

Exemplo de uma função $u(\cdot) \in \mathscr{U}_{[t_o\,,\,t_1]}$



Definição 8.2 –

Um estado x_o é dito 'controlável' para x_1 no intervalo de tempo $t_o > 0$, se $\exists\ t_1 > t_o$ e um controlo $u(\cdot) \in \mathscr{U}$ tal que a expressão

$$x_1 = \phi(t_1\,, t_o\,, x_o\,, u(\cdot)) \tag{8.1}$$

é satisfeita.

Considere o sistema dinâmico *linear* já visto no Capítulo 7, eq. (7.1) que aqui chamaremos de eq. (8.2):

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \qquad x(0) = x_o \qquad (8.2)$$

onde,

$A(t)$ é uma matriz $n \times n$

$B(t)$ é uma matriz $n \times p$

cuja solução é dada por:

$$\boxed{\phi(t, t_o, x_o, u(\cdot)) = \Phi(t, t_o)\, x_o + \int_{t_o}^{t} \Phi(t, \tau)\cdot B(\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau} \qquad (8.3)$$

conforme vimos no Capítulo 7, Teorema 8.

Definição 8.3 – O sistema é dito 'controlável' se qualquer estado $x_o \in \mathbb{R}^n$ é 'controlável' para qualquer estado $x_1 \in \mathbb{R}^n$ em qualquer instante de tempo $t > 0$.

Vamos agora definir uma matriz $U(t)$ que vai permitir verificar a <u>controlabilidade</u> do sistema.

Definição 8.4 –

$$U(t) = \left[U_o(t) \;\middle|\; U_1(t) \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; U_{n-1}(t) \right]$$

onde

$$\begin{cases} U_o(t) = B(t) \\ U_{k+1}(t) = -A(t)\, U_k(t) + \dfrac{d}{dt} U_k(t) , \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Esta matriz $U(t)$ é comummente chamada de 'matriz controlabilidade', às vezes também é representada por $\mathscr{C}(t)$.

Teorema 8.1 –

O sistema é controlável se para algum $t_1 > t_o$ esta matriz $U(t)$ satisfaz

$$\text{rank}\left[\, U(t_1) \,\right] = n$$

Exemplo 8.1 – Considere o sistema

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}}_{A(t)} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B(t)} u$$

Calculando a matriz $U(t)$, temos que

$$U(t) = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}_{U_o(t)} & \underbrace{\begin{matrix} -1 \\ -t \\ -t^2 \end{matrix}}_{U_1(t)} & \underbrace{\begin{matrix} 2t \\ t^2-1 \\ t^4-2t \end{matrix}}_{U_2(t)} \end{bmatrix}$$

e observa-se que o rank $U(t) = 3$ para $\forall t > 0$ e portanto este sistema é controlável.

Definição 8.5 –

$$W_t = \int_o^t \Phi(0,\tau)\cdot B(\tau)\cdot B^T(\tau)\cdot \Phi^T(0,\tau)\cdot d\tau \qquad (8.4)$$

Esta matriz W_t acima permite calcular o controlo $u(\cdot)$ que ira conduzir o sistema do estado inicial $x_o = 0$ para um estado final x_f desejado em t_f segundos, se o sistema for controlável.

Teorema 8.2 –

Se o sistema é controlável, então W_t é inversível e o controlo $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ dado por

$$u(t) = B^T(t)\cdot\Phi^T(0,t)\cdot W_{t_f}^{-1}\cdot\Phi(0,t)\cdot x_f \qquad (8.5)$$

conduz o sistema de $x_o = 0$ em $t_o = 0$ para x_f em t_f.

Agora vamos considerar sistemas *lineares* e *invariantes no tempo* ou seja,

$$A(t) = A \quad \text{e} \quad B(t) = B$$

e veremos alguns resultados que permitem verificar controlabilidade através das matrizes A e B.

Considere o sistema dinâmico *linear* da eq. (8.2), agora *invariante no tempo* também

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B \cdot u(t), \qquad x(0) = x_o \tag{8.6}$$

onde:

A é uma matriz $n \times n$

B é uma matriz $n \times p$

cuja solução é dada por:

$$\boxed{\phi(t, 0, x_o, u(\cdot)) = e^{At} x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot u(\tau) \cdot d\tau} \tag{8.7}$$

conforme vimos no Capítulo 7, eq. (7.10)

Definição 8.6 – O sistema é dito 'controlável' se qualquer estado $x_o \in \mathbb{R}^n$ é 'controlável' para qualquer estado $x_1 \in \mathbb{R}^n$ em qualquer instante de tempo $t > 0$.

Definição 8.7 – $\mathcal{R}(t) = \{\, \phi(t, 0, 0, u(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{U} \,\}$ (8.8)

$\mathcal{C}(t) = \{\, x_o \in \mathbb{R}^n : \exists\, u(\cdot) \in \mathcal{U} \;:\; \phi(t, 0, x_o, u(\cdot)) = 0 \,\}$ (8.9)

Note que:

$\mathcal{R}(t)$ é o conjunto dos estados alcançáveis de zero no *intervalo de tempo* t

$\mathcal{C}(t)$ é o conjunto dos estados controláveis para zero no *intervalo de tempo* t

Definição 8.8 – $\boxed{\mathcal{R} = \bigcup_{t \in [t_o, \infty]} \mathcal{R}(t)}$ e $\boxed{\mathcal{C} = \bigcup_{t \in [t_o, \infty]} \mathcal{C}(t)}$

Note que:

$\mathcal{R}$ é o conjunto dos estados alcançáveis da origem em algum *tempo* $t > 0$

$\mathcal{C}$ é o conjunto dos estados controláveis p/ a origem em algum *tempo* $t > 0$

Definição 8.9 –

$$\boxed{W_t = \int_o^t e^{A\tau} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T\tau} \cdot d\tau} \qquad (8.10)$$

É fácil de verificar que W_t é uma matriz simétrica e

$$W_t = x^T \cdot W_t \cdot x \geq 0, \qquad \forall\, t > 0$$

Teorema 8.3 –

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(t) = \mathcal{C} = \mathcal{C}(t) = Im(W_t), \qquad \text{para } \forall\, t > 0$$

Corolário: O sistema é '*controlável*' se e somente se

$$Im\,(W_t) = \mathbb{R}^n.$$

Teorema 8.4 –

A $Im\,(W_t) = \mathbb{R}^n$ se e somente se

$$\rho\,(U) = n$$

onde,

$$U = [\, B \;\; AB \;\; \ldots \;\; A^{n-1} B \,]$$

ou seja,

O sistema é controlável se, e somente se,

$$\text{rank}\ \underbrace{\left[\, B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B \,\right]}_{U} = n \qquad (8.11)$$

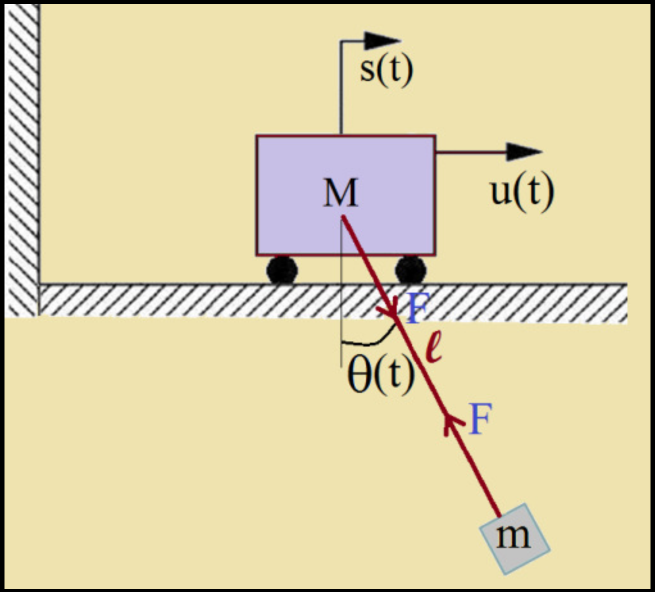
A condição (8.11) acima, condição do *rank* para controlabilidade, é um resultado clássico em Controlo de Sistemas, nos fornece um teste da 'controlabilidade' do sistema.

A matriz U em (8.11) acima, comummente chamada de 'matriz controlabilidade', às vezes também é representada por $\mathscr{C}$.

Note que se a entrada $u(\cdot)$ do sistema tem dimensão 1, então a matriz B será um *vetor coluna* e consequentemente a 'matriz controlabilidade' U ou $\mathscr{C}$ será uma matriz $n \times n$ (*quadrada*).

Exemplo 8.2 – Retornando ao sistema de quarta ordem do Exemplo 4 do Capítulo 1 (*Sistema Carro com pêndulo*) temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$$



onde, $n = 4$, e

$$a_1 = \frac{mg}{M} \qquad a_2 = -\frac{(m+M)\cdot g}{M\ell} \qquad b_1 = 1/M \qquad b_2 = -1/M\ell$$

Note que

$$a_1 \neq 0, \ a_2 \neq 0, \ b_1 \neq 0, \ b_2 \neq 0$$

Vamos verificar a '<u>controlabilidade</u>' do sistema.

A <u>condição do *rank*</u> para <u>controlabilidade</u> (8.11), Teorema 8.4, neste caso é:

$$\text{rank}\ \underbrace{[\,B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B\,]}_{\mathbf{U} \text{ ou } \mathscr{C}} = 4$$

Calculando,

$$\text{rank}\ \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & a_1b_2 \\ b_1 & 0 & a_1b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2b_2 \\ b_2 & 0 & a_2b_2 & 0 \end{bmatrix}}^{[\,B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B\,]} = 4$$

uma vez que o determinante desta matriz é

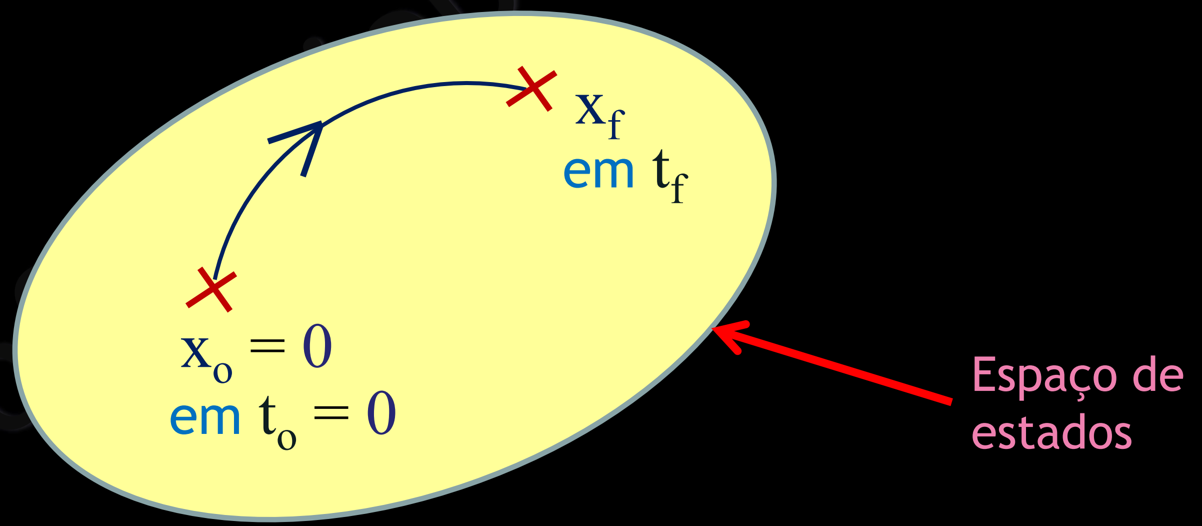
$$b_2^2 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0.$$

Portanto, este sistema é <u>controlável</u>.

Teorema 8.5 –
Se o sistema é controlável, então W_t é inversível e o controlo $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ dado por

$$\boxed{u(t) = B^T \cdot e^{A^T(t_f - t)} \cdot W_{t_f}^{-1} \cdot x_f} \qquad (8.12)$$

conduz o sistema de $x_o = 0$ em $t_o = 0$ para x_f em t_f.



Para calcular o estado $x(t)$, usamos a eq. (7.15), do Capítulo 7, que aqui vai se chamar de eq. (8.13)

$$x(t) = e^{At} \cdot x_o + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \qquad (8.13)$$

Agora vamos definir a matriz $\widetilde{W}_t$ para ser usada no cálculo do controlo $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ (Teorema 8.6, que veremos a seguir) de forma semelhante à definição da matriz W_t usada no cálculo do controlo $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ (Teorema 8.5)

Definição 8.10 –

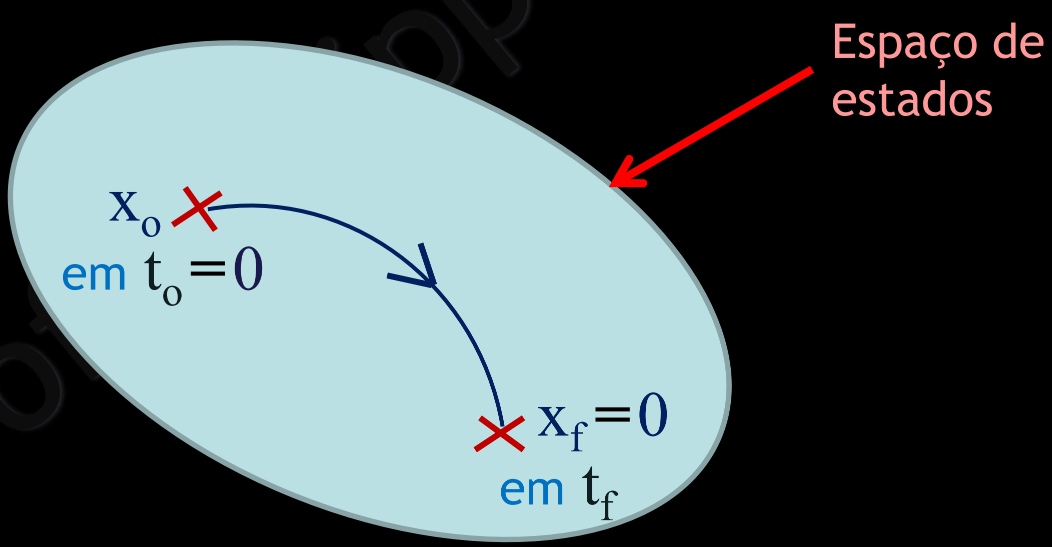
$$\boxed{\widetilde{W}_t = \int_o^t e^{-A\tau} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{-A^T\tau} \cdot d\tau} \qquad (8.14)$$

Teorema 8.6 –

Se o sistema é controlável, então $\widetilde{W}_t$ é inversível e o controlo $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ dado por

$$\boxed{u(t) = -B^T \cdot e^{-A^T t}\, \widetilde{W}_{t_f}^{-1} \cdot x_o} \qquad (8.15)$$

conduz o sistema de x_o em $t_o = 0$ para $x_f = 0$ em t_f.

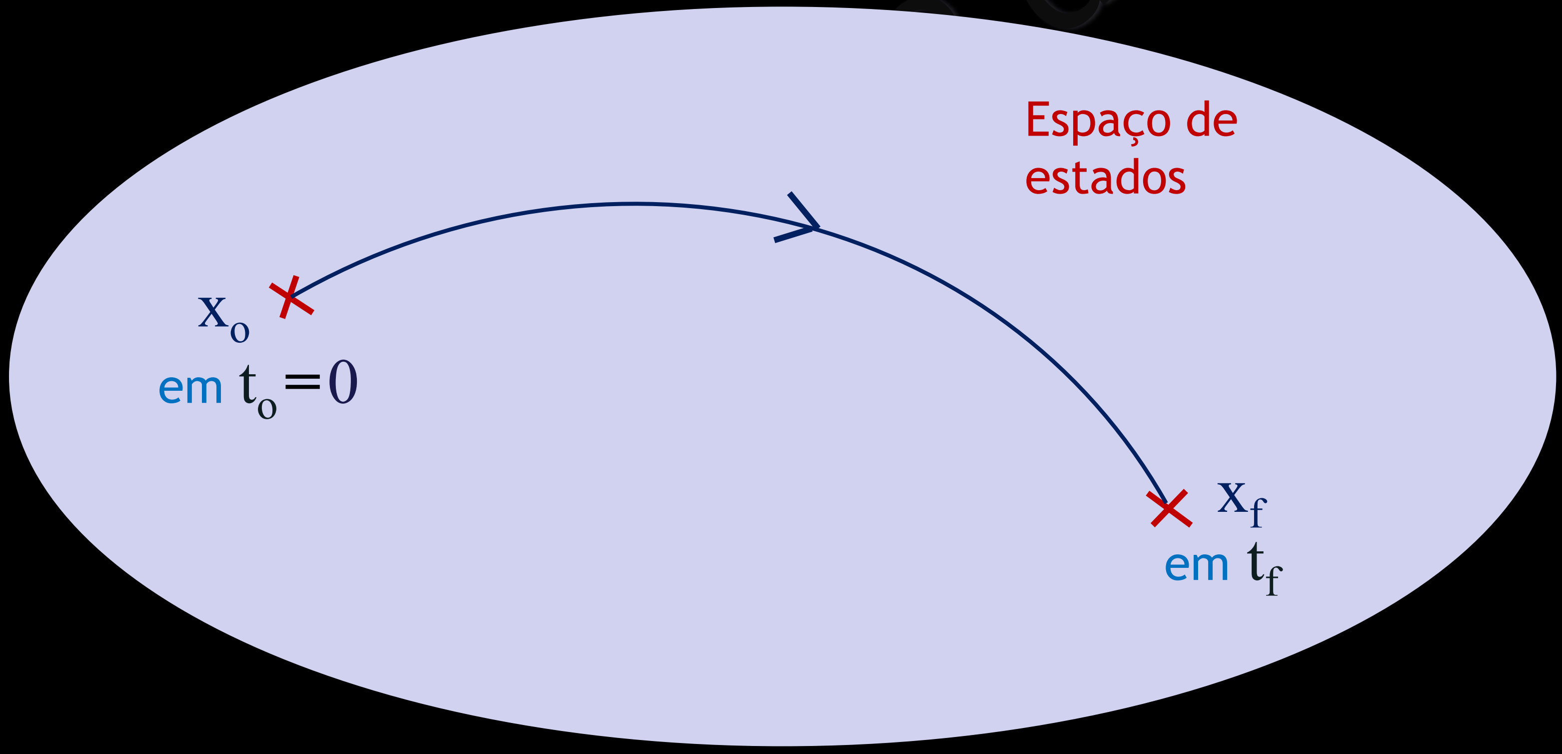


Teorema 8.7 –

Se o sistema é controlável, então W_t e $\widetilde{W}_t$ são inversíveis e o controlo $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ dado por

$$\boxed{u(t) = B^T \cdot e^{-A^T t} \cdot \left(e^{A^T t_f} \cdot W_{t_f}^{-1} \cdot x_f - \widetilde{W}_{t_f}^{-1} \cdot x_o \right)} \qquad (8.16)$$

conduz o sistema do estado inicial x_o em $t_o = 0$ para o estado final x_f em t_f.



Exemplo 8.3 – Considere o sistema

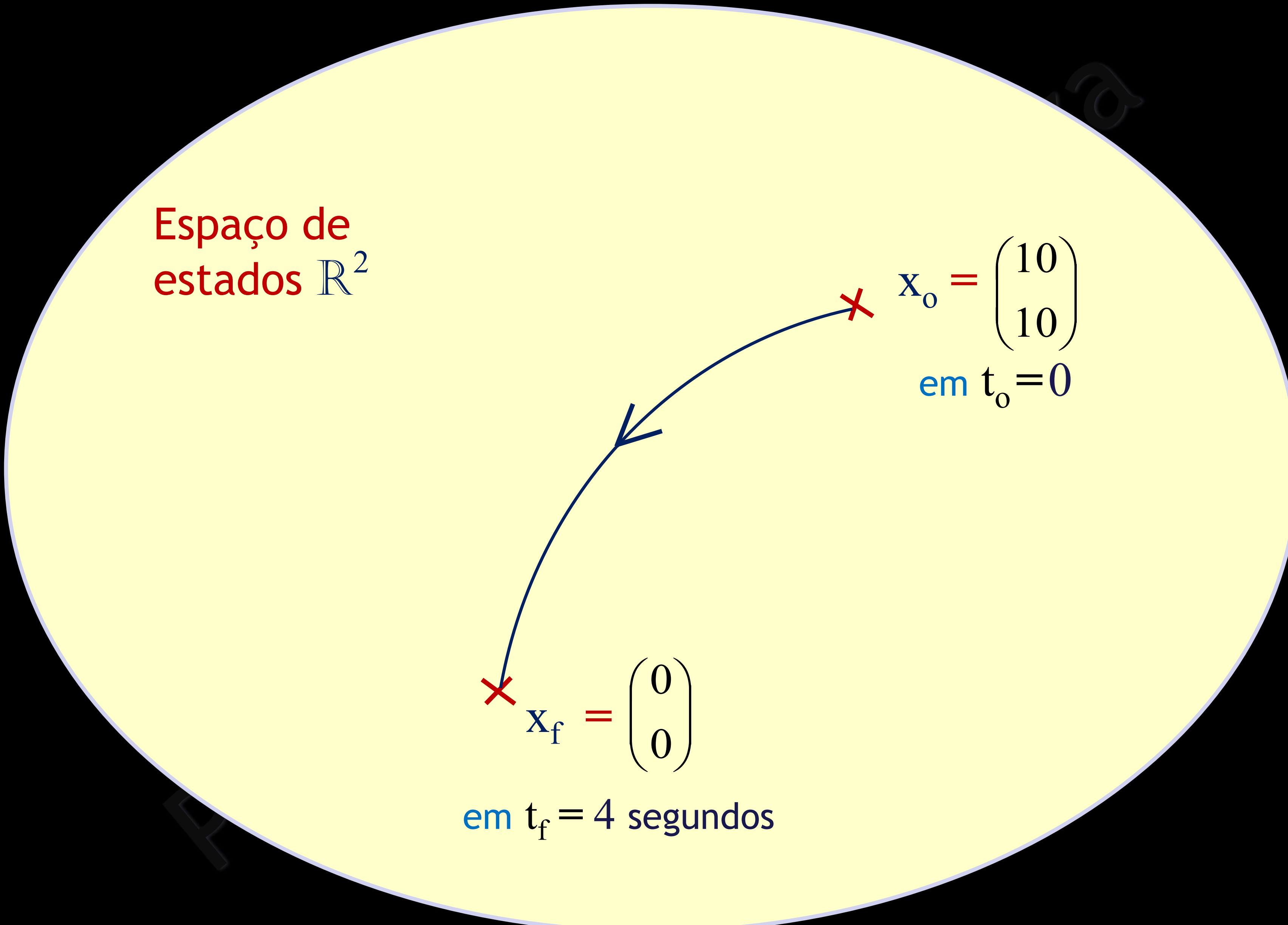
$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u \qquad x(0) = x_o = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Primeiramente vemos, pela condição do *rank* (8.11), Teorema 8.4, que

$$\text{rank} \underbrace{[\, B \quad AB \,]}_{U \text{ ou } \mathscr{C}} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 = n$$

logo, o sistema é controlável.

Achar o controlo $u(\cdot)$ que leve o sistema do estado inicial $x_o = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$ para a origem (i.e., para o 'repouso'): $x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ em $t_f = 4$ segundos.


Espaço de estados $\mathbb{R}^2$
$x_o = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$
em $t_o = 0$
$x_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
em $t_f = 4$ segundos

$$\tilde{W}_4 = \int_0^4 \overbrace{\begin{bmatrix} e^{\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{\tau} \end{bmatrix}}^{e^{-A\tau}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}}^{B^T} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} e^{\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{\tau} \end{bmatrix}}^{e^{-A^T\tau}} \cdot d\tau =$$

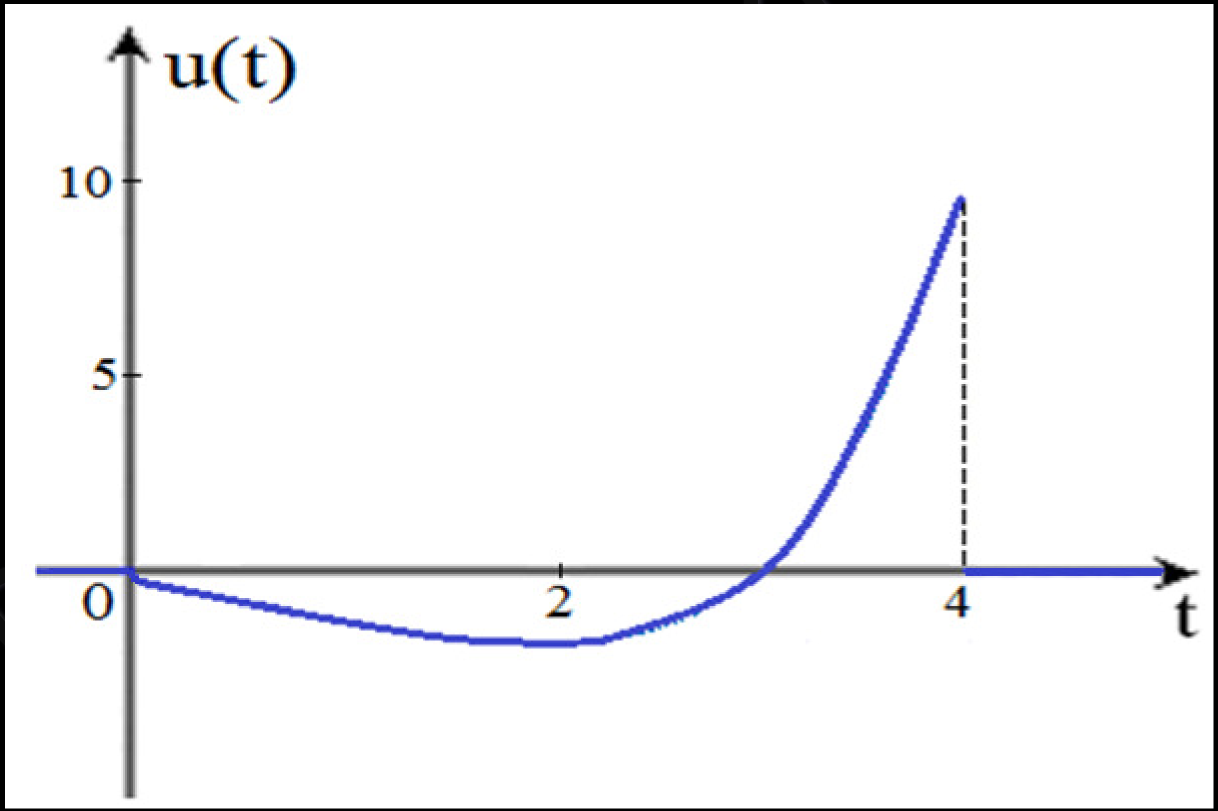
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{e^4-1}{4} & \dfrac{e^6-1}{3} \\ \dfrac{e^6-1}{3} & \dfrac{e^8-1}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 13,4 & 134,1 \\ 134,1 & 1.490,0 \end{bmatrix}}$$

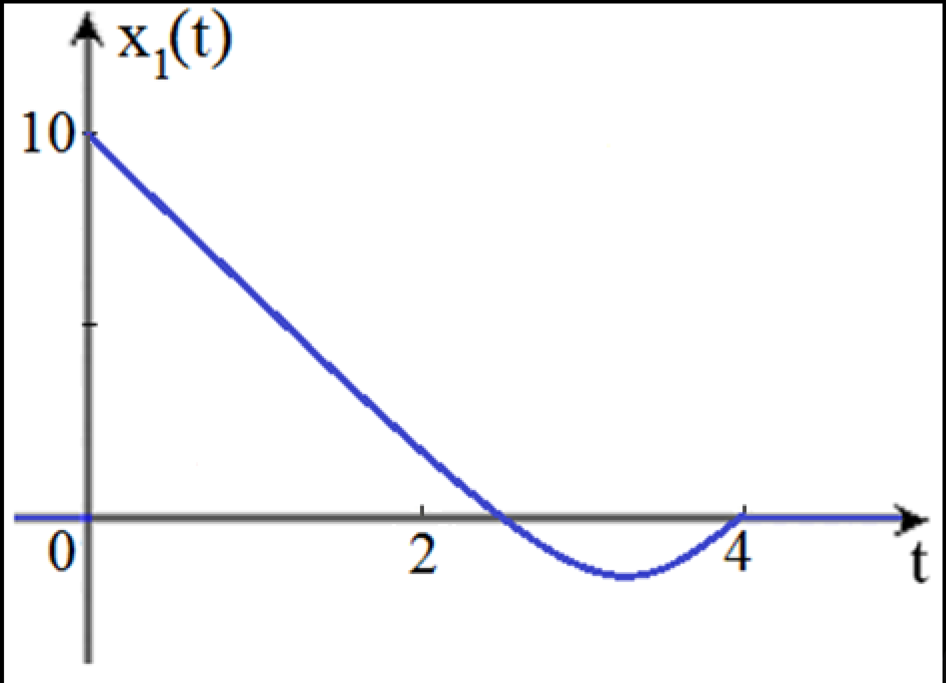
$\tilde{W}_4$

$$\tilde{W}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0,7561 & -0,0681 \\ -0,0681 & 0,0068 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -\underbrace{\begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{B^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}}_{e^{-At}} \cdot \widetilde{W}_4^{\,-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}}_{x_o} =$$

$$= -3{,}44\, e^{t/2} + 0{,}6127\, e^{t}, \qquad t > 0$$

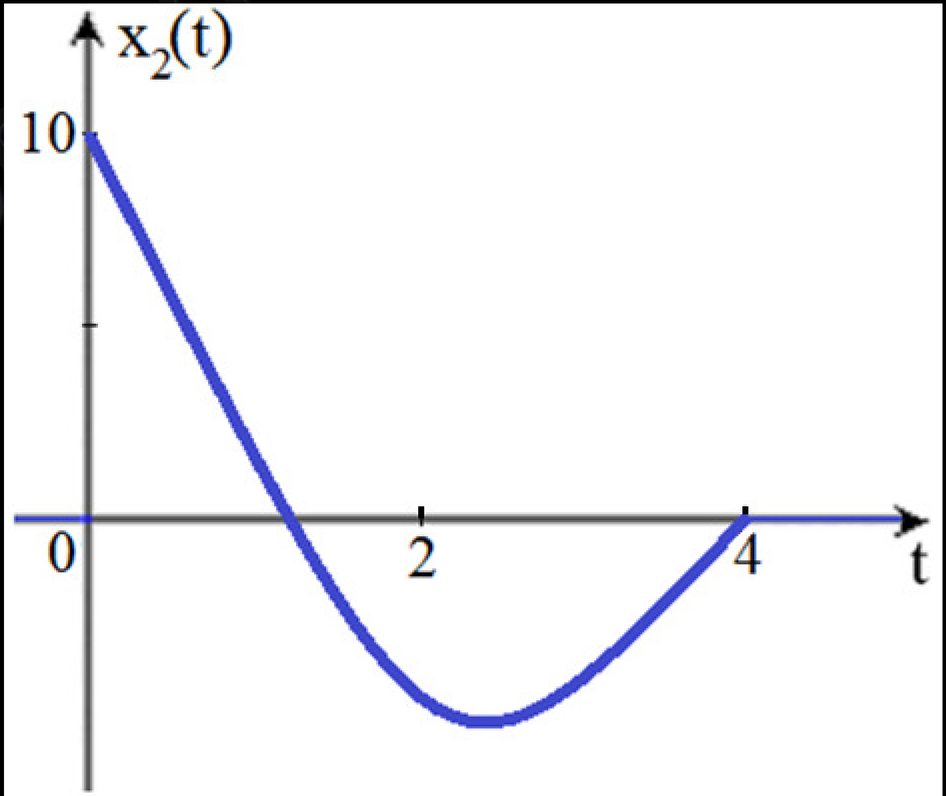




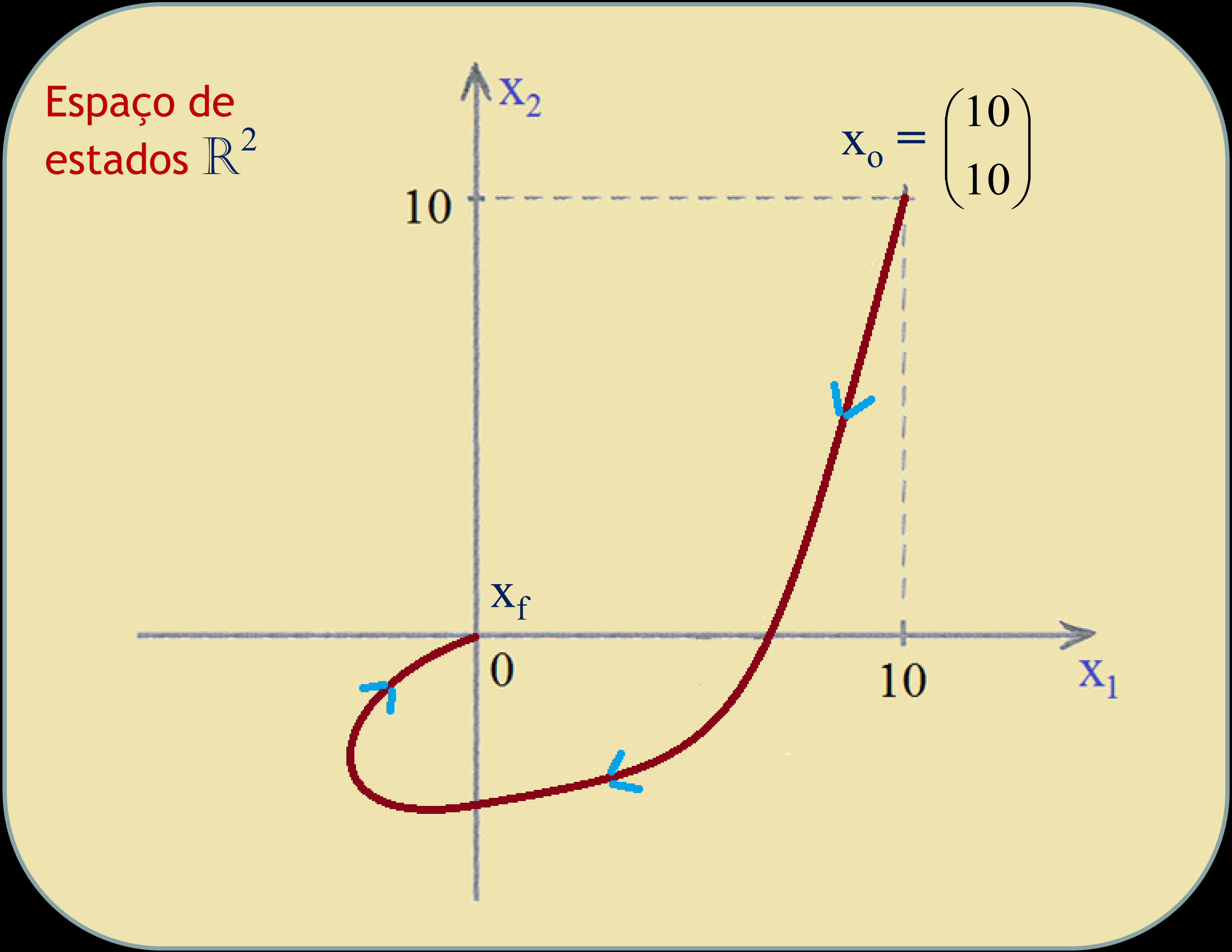
e com este $u(t)$ pode-se então calcular o estado

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

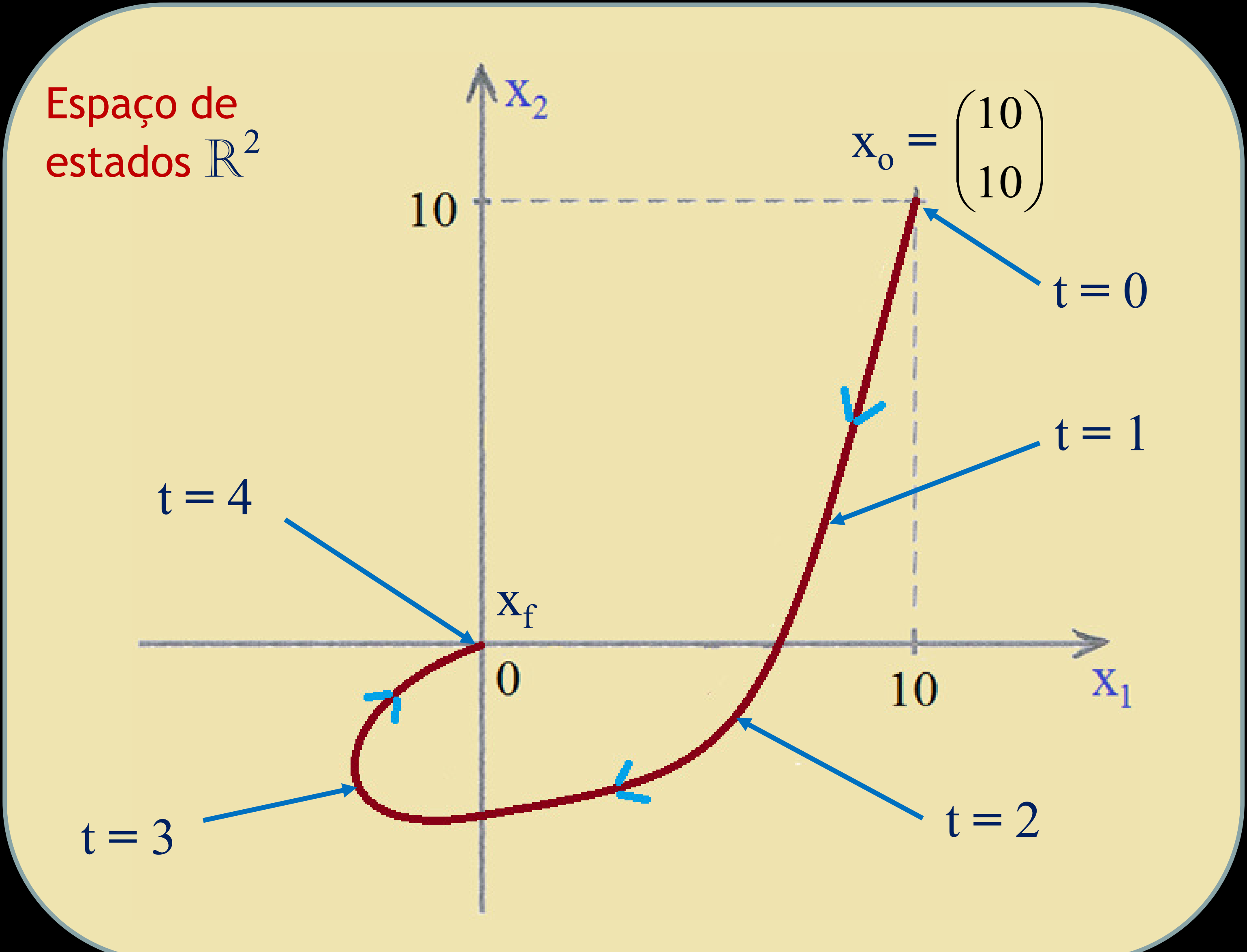
usando (8.13).



Agora pode-se fazer um esboço da *trajetória* do estado $x(t)$ no *espaço de estados* $\mathbb{R}^n$, que neste caso é o $\mathbb{R}^2$, para $t_f = 4$.



Agora pode-se fazer um esboço da *trajetória* do estado $x(t)$ no *espaço de estados* $\mathbb{R}^n$, que neste caso é o $\mathbb{R}^2$, para $t_f = 4$.



Exemplo 8.4 – Considere o mesmo sistema do exemplo anterior (Exemplo 8.3). Suponha agora que queremos achar um controlo $u'(t)$ que faça o mesmo em $t = 2$ segundos apenas.

Ou seja, para o sistema

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u \qquad x(0) = x_o = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

que já sabemos que é controlável.

Achar o controlo $u(\cdot)$ que leve o sistema do estado inicial $x_o = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$ para a origem (i.e., para o 'repouso') $x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ em $t_f = 2$ segundos.

Os cálculos são semelhantes aos do Exemplo 8.3, mas utilizando agora $\widetilde{W}_2$ ao invés de $\widetilde{W}_4$.

$$\widetilde{W}_2 = \int_0^2 \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{\tau} \end{bmatrix}}_{e^{-A\tau}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{B^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{\tau} \end{bmatrix}}_{e^{-A\tau}} \cdot d\tau =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1,6 & 6,33 \\ 6,33 & 27,0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{W}_2}$$

e portanto,

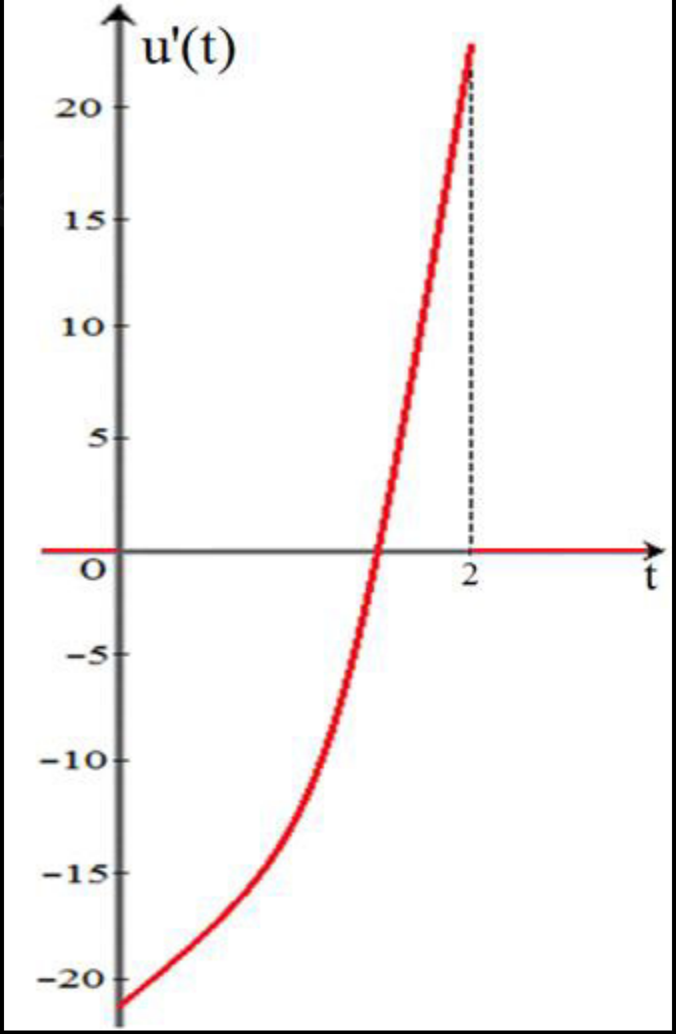
$$\widetilde{W}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 8,623 & -2,02 \\ -2,02 & 0,511 \end{bmatrix}$$

logo,

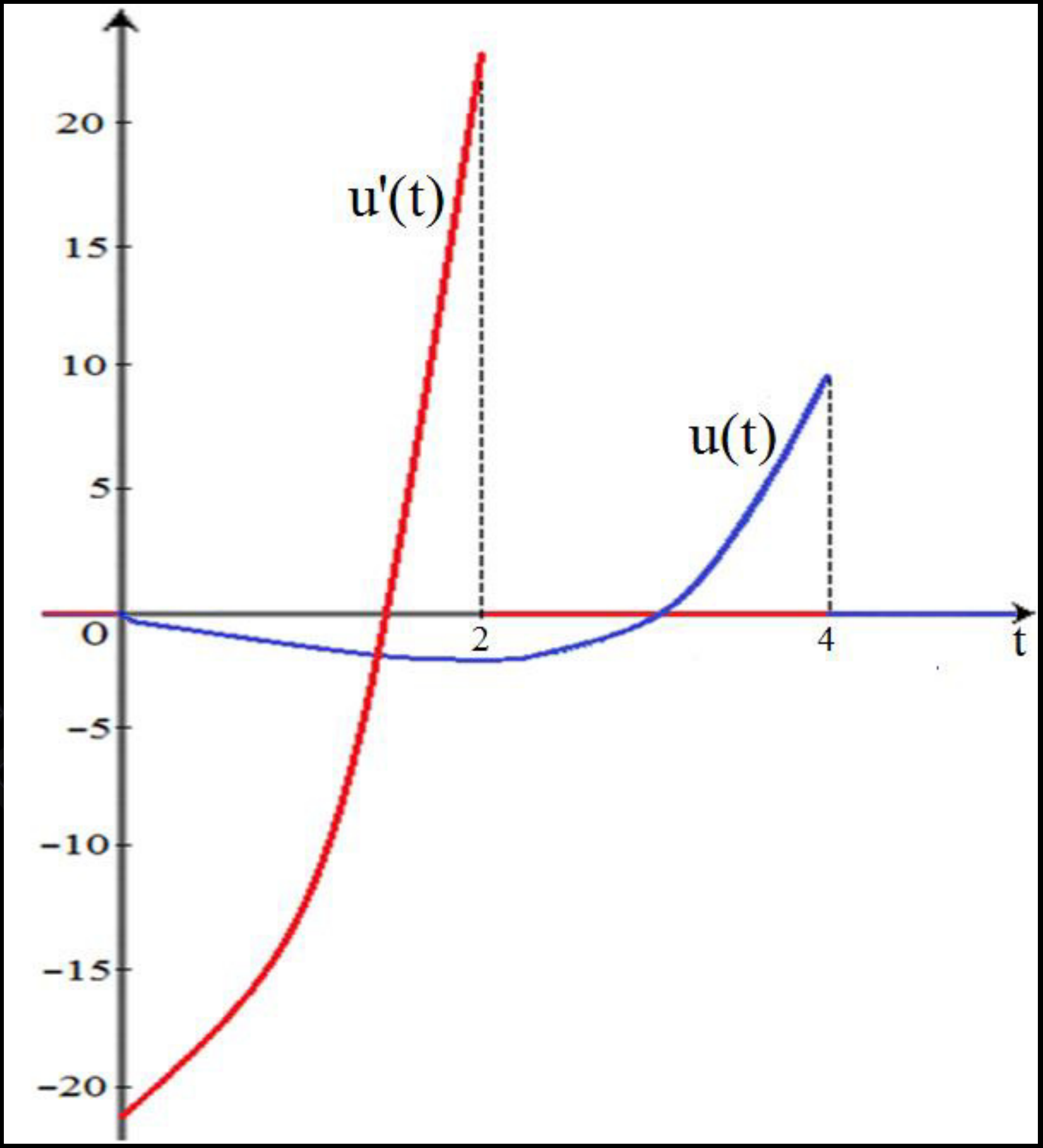
$$u'(t) = -\underbrace{\begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{B^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}}_{e^{-At}} \cdot \widetilde{W}_2^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}}_{x_o} =$$

$$= -33{,}33\, e^{t/2} + 15{,}25\, e^{t}, \qquad t > 0$$

Nitidamente $u'(t)$ é um controlo que exige um esforço maior (ou *mais energia*) na entrada do sistema pois tem que desempenhar em apenas 2 segundos a mesma tarefa que $u(t)$ do Exemplo 8.3 leva 4 segundos.



O gráfico ao lado permite comparar o controlo $u'(t)$ (*deste* Exemplo 8.4) com o controlo $u(t)$ do Exemplo 8.3.

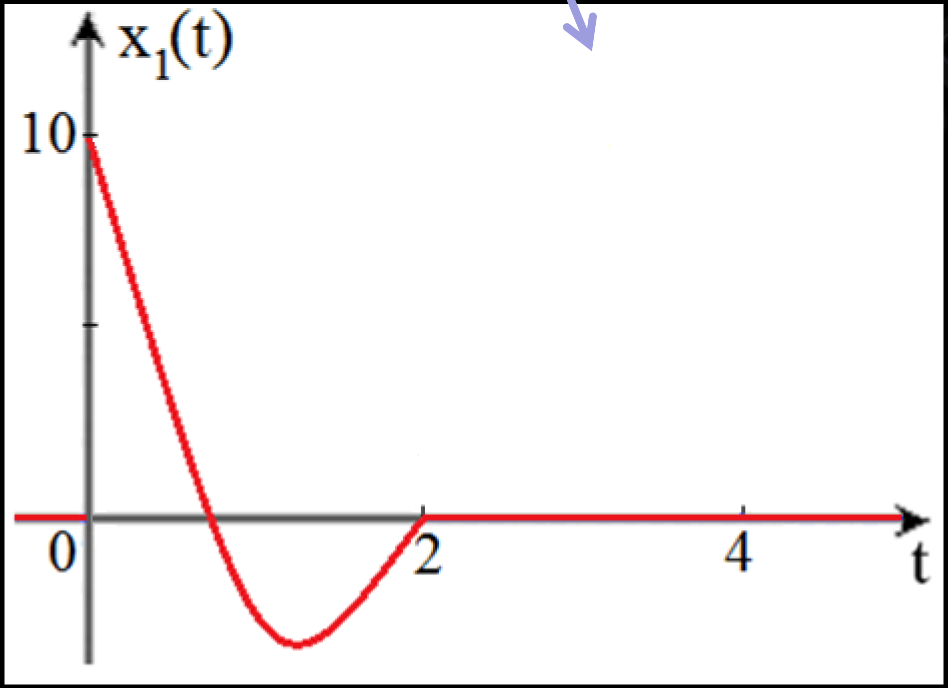


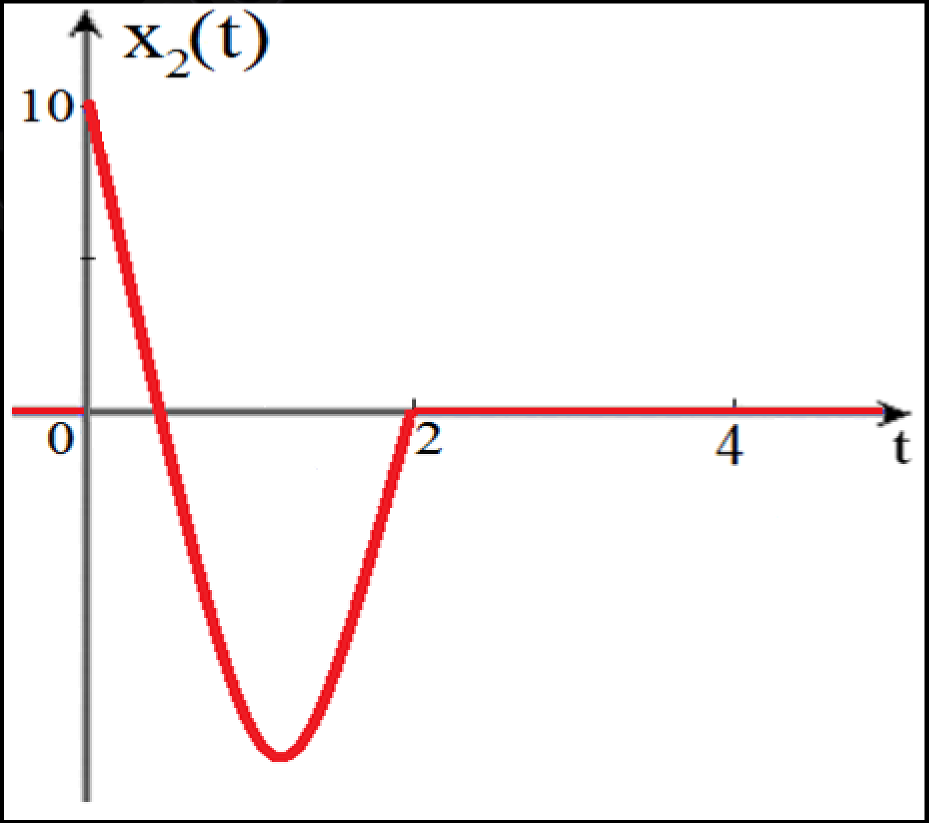
Com este controlo $u'(t)$ pode-se então calcular o estado usando (8.13).

Estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ deste

Exemplo 8.4, $t_f = 2$ segundos

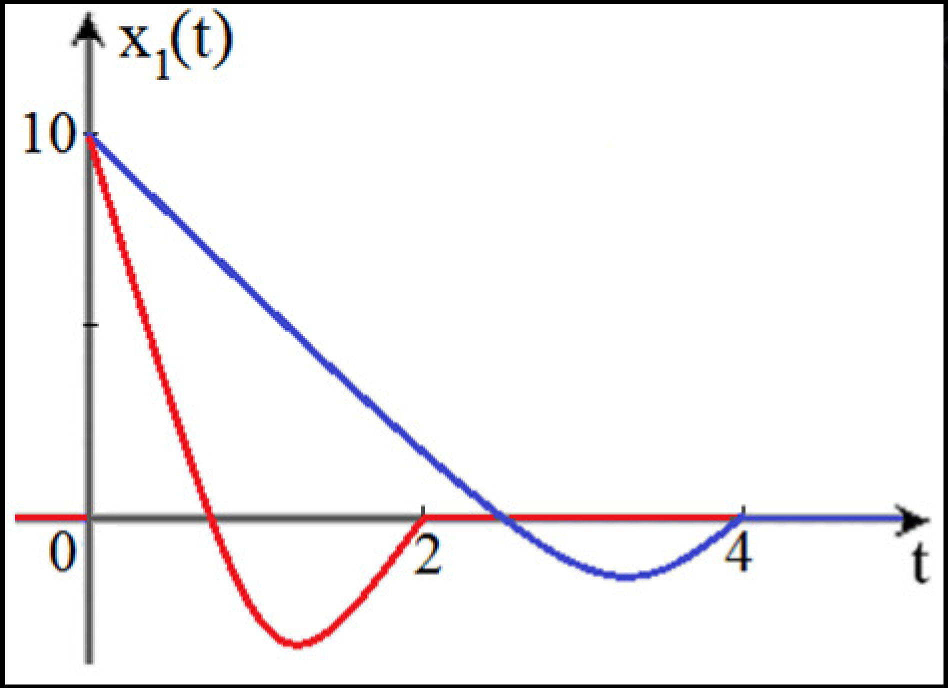
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

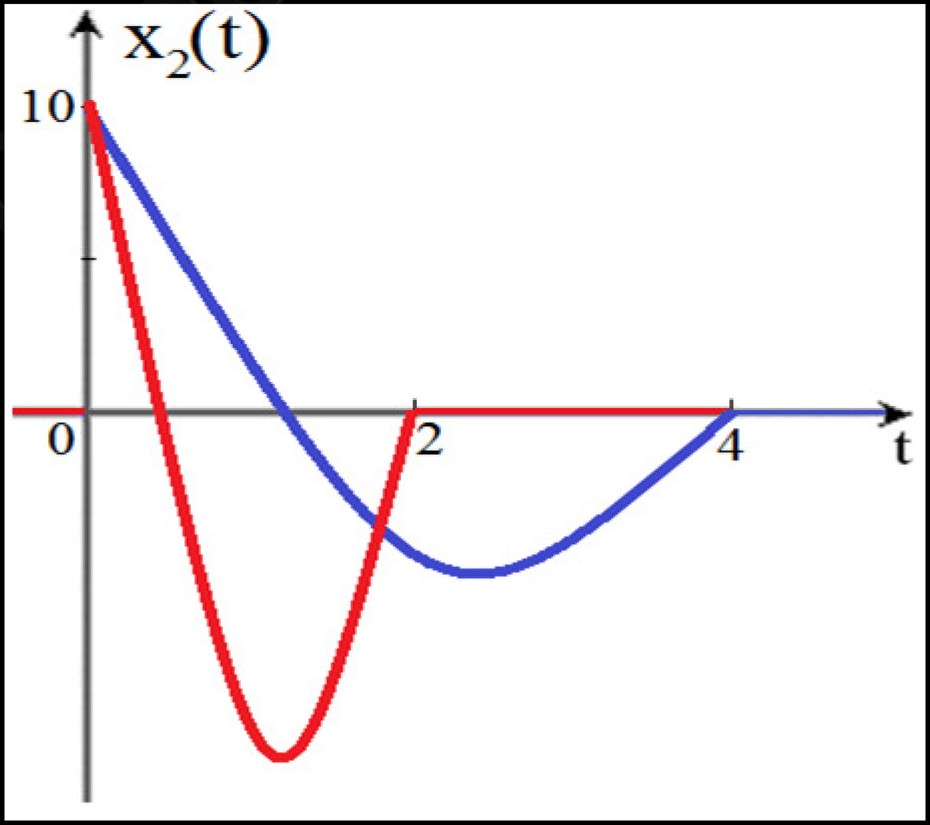




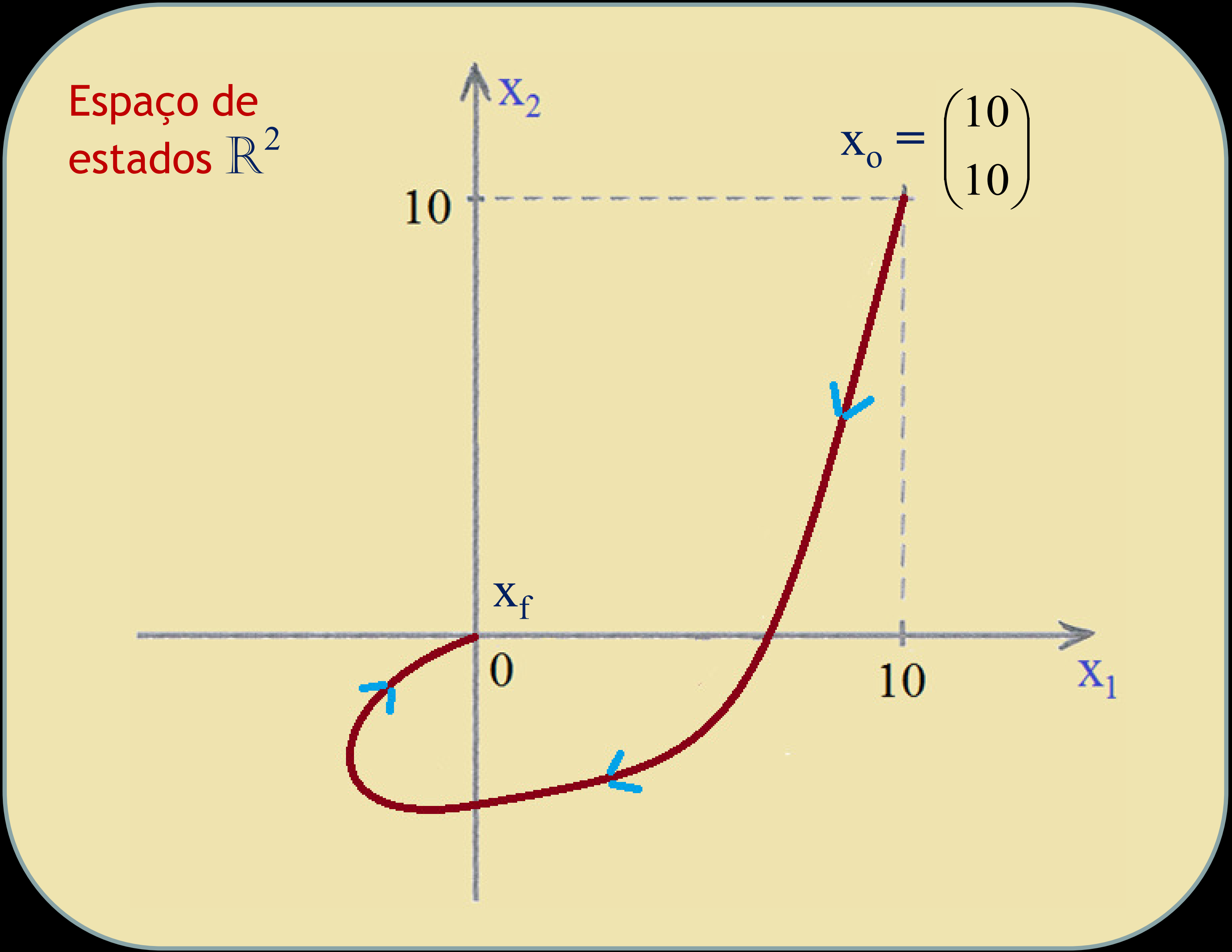
Comparando os estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do Exemplo 8.4 [vermelho], onde $t_f = 2$ segundos, com os do Exemplo 8.3 [azul], onde $t_f = 4$ segundos.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

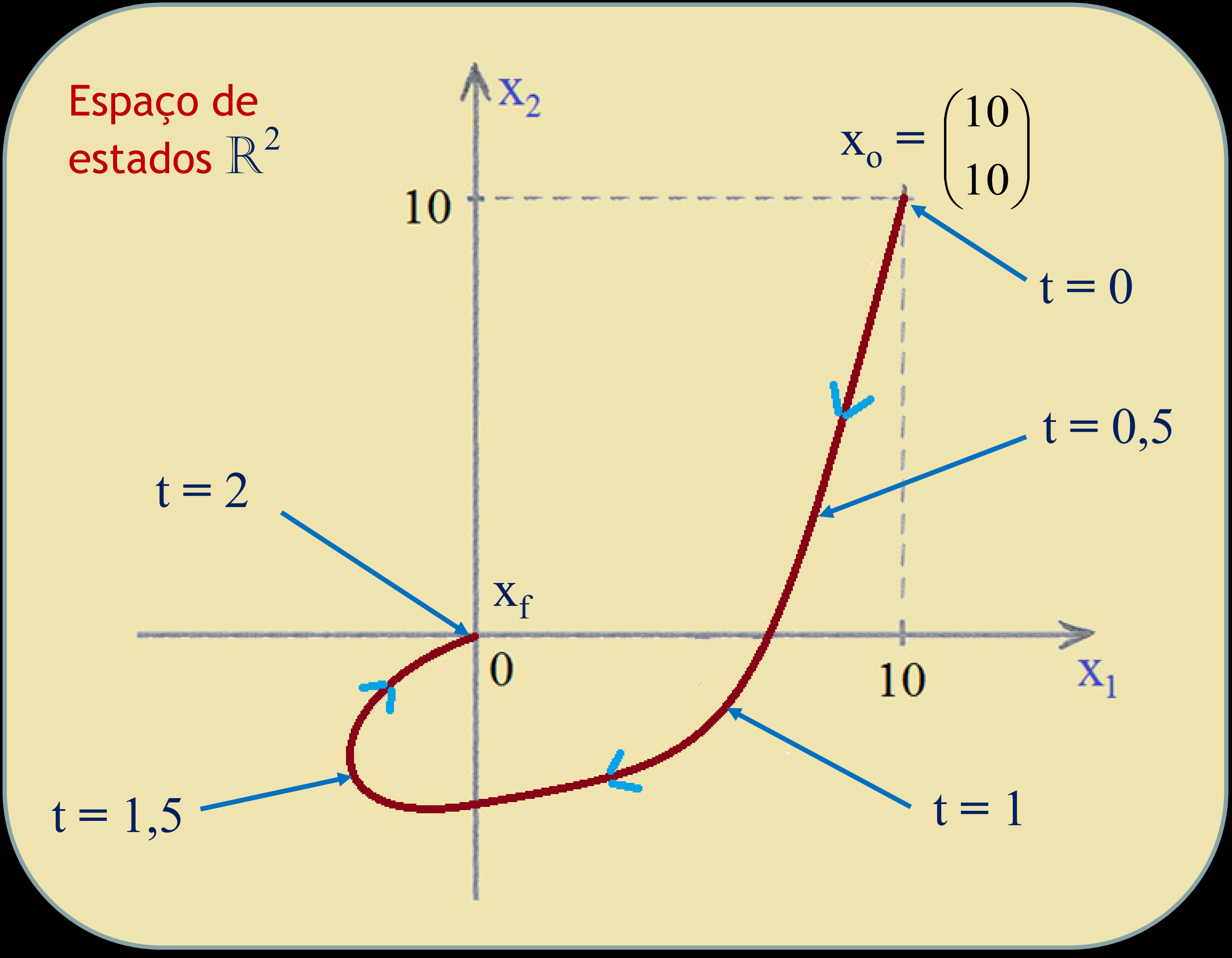




E o esboço da *trajetória* do estado $x(t)$ no *espaço de estados* $\mathbb{R}^2$ para este caso em que $t_f = 2$ é semelhante ao caso anterior para $t_f = 4$.



E o esboço da *trajetória* do estado $\mathrm{x}(t)$ no *espaço de estados* $\mathbb{R}^2$ para este caso em que $t_f = 2$ é semelhante ao caso anterior para $t_f = 4$.



Pelo Teorema 8.3, o conjunto de '*estados alcançáveis*' $\mathcal{R}$ e o conjunto de '*estados controláveis*' $\mathcal{C}$ são o mesmo, isto é,

$$\mathcal{R} = \mathcal{C}$$

Além disso, $\mathcal{R}$, ou $\mathcal{C}$, formam um *espaço linear*, a *Imagem de* W_t:

$$\mathcal{R} = \mathcal{C} = Im(W_t) \qquad \text{para qualquer } \forall t > 0$$

Quando a condição do *rank* para controlabilidade (8.11), Teorema 8.4, é satisfeita, então $\mathcal{R}$, ou $\mathcal{C}$, são o *espaço de estados* $\mathbb{R}^n$.

Entretanto, quando a condição de controlabilidade não é satisfeita, então $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$ são um subespaço do *espaço de estados* $\mathbb{R}^n$, o qual chamamos de

"*Subespaço controlável*"

Exemplo 8.5 – Considere o sistema de segunda ordem

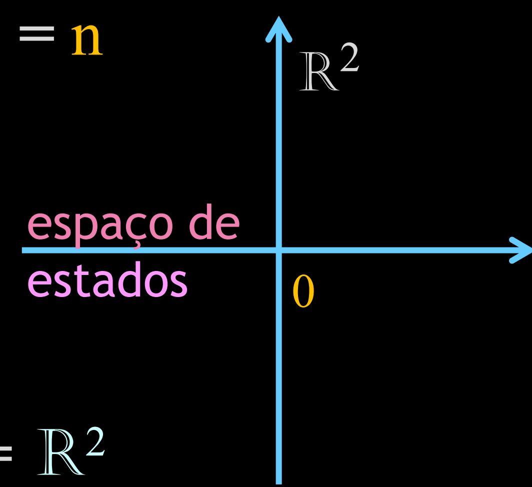
$$n = 2$$

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u \qquad x(0) = x_o = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

Fazendo o teste de controlabilidade (condição do *rank* (8.11), do Teorema 8.4):

$$\text{rank} \underbrace{[\, B \quad AB \,]}_{U \text{ ou } \mathscr{C}} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \rightarrow = n$$

Logo, o sistema é *controlável* e pode ser conduzido para qualquer estado $x \in \mathbb{R}^2$ (espaço de *estados*) usando-se as fórmulas dos Teoremas 8.5, 8.6 e 8.7.



$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$$

Exemplo 8.6 – Considere o sistema de segunda ordem

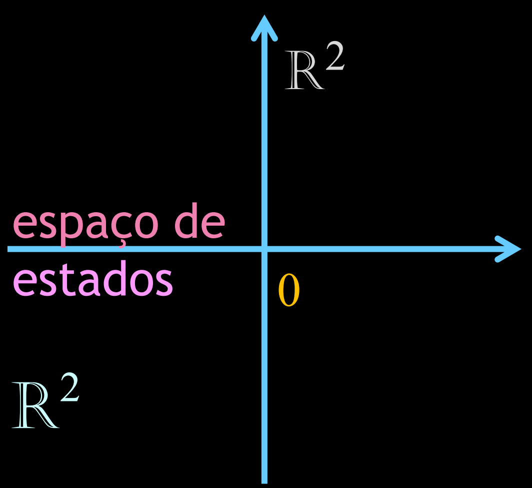
$$n = 2$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad x(0) = x_o = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

Teste de controlabilidade (condição do *rank* (8.11), do Teorema 8.4):

$$\text{rank}\,\underbrace{[\,B \quad AB\,]}_{U \text{ ou } \mathscr{C}} = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \neq n$$

Logo, o sistema *NÃO* é *controlável*, não se pode conduzir este sistema para qualquer estado $x \in \mathbb{R}^2$ (*espaço de estados*), mas pode-se achar o "*Subespaço controlável*".



$$\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^2$$

Usando a eq. (8.13), com $x_o = 0$, obtemos

$$x(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2(t-\tau)} & 0 \\ e^{2(t-\tau)} - e^{3(t-\tau)} & e^{3(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2(t-\tau)} \\ e^{2(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

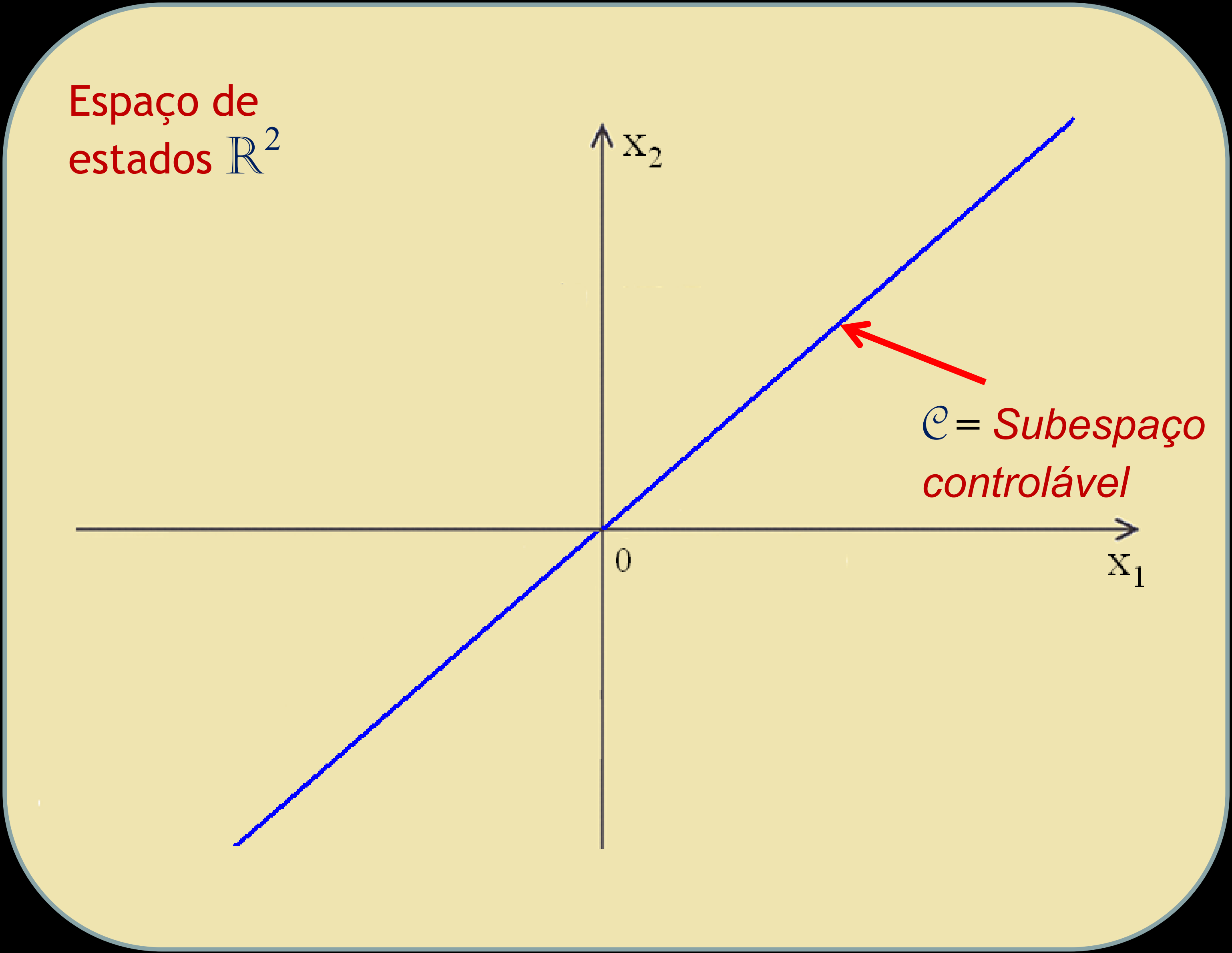
$$= \begin{bmatrix} \int_0^t e^{2(t-\tau)} \cdot u(\tau) \cdot d\tau \\ \int_0^t e^{2(t-\tau)} \cdot u(\tau) \cdot d\tau \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1(t) \\ \leftarrow x_2(t) \end{matrix}$$

temos que $x_1(t) = x_2(t), \ \forall\, t > 0.$

Portanto o "*Subespaço controlável*" é

$$\mathcal{C} = \{\, x = (x_1\,,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x_1 = x_2 \,\}.$$

$$\mathcal{C} = \{\ x = (x_1\ ,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 = x_2\ \}.$$



FACULDADE ENGENHARIA
Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Thank you!
Obrigado!

Felippe de Souza
felippe@ubi.pt