# Controlo Avançado

# 7
# “Solução de um sistema linear”

J. A. M. Felippe de Souza

**Definição 1 –** $G(t,\tau)$ matriz cujos elementos $g_{ij}(t,\tau)$ são as respostas na i^ésima^ saída ao impulso aplicado na j^ésima^ entrada.

Se a matriz $G(t,\tau)$ é conhecida, então podemos achar $y(\cdot)$ através da equação (5.3), que repetimos abaixo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau \qquad (5.3)$$

Se o sistema é *linear*, *causal*, *invariante no tempo* e *relaxado* em $t_o$, então

$$G(t,\tau) = G(t-\tau)$$

e

$$\boxed{y(t) = \int_{t_o}^{t} G(t-\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau}$$

# Solução de um sistema linear

Se além disso o sistema for relaxado em $t_o = 0$, então podemos usar a função de transferência $G(s)$, onde

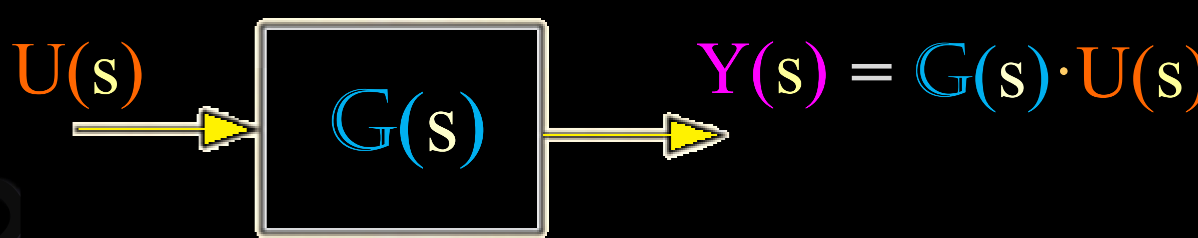
$$G(s) = \mathscr{L}[G(t)]$$

e assim achar $y(\cdot)$ como

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

onde

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$$



Agora iremos achar uma expressão para a equação dinâmica (6.3)-(6.4), que aqui passaremos a chamar de (7.1)-(7.2), isto é

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\,, \quad x(t_o) = x_o & (7.1) \\ y(t) = C(t)\,x(t) & (7.2) \end{cases}$$

A solução $x(t)$ irá depender de $t$, $t_o$, $x_o$ e $u(\cdot)$.

Sendo assim usaremos a notação

$$x(t) = \phi(t, t_o, x_o, u(\cdot))$$

para representar a solução de (7.1) quando $x(t_o) = x_o$ e a entrada $u(\cdot)$ é aplicada em $[t_o\,, \infty]$.

## Solução do Sistema Homogéneo

Considere o *sistema homogéneo*

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) \qquad (7.3)$$

### Teorema 1

O conjunto de soluções de (7.3) forma um '*espaço vetorial*' de dimensão $n$.

### Exemplo 1

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}}_{A(t)} \cdot x(t)$$

$A(t)$ é uma matriz $2x2$ e portanto o estado $x(t)$ tem $2$ componentes.

Pelo Teorema 1 acima pode-se achar 2 soluções L.I.

Uma possibilidade é escolher:

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

Observe que ambos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções do *sistema homogéneo* e além disso eles são L.I. no espaço da funções $x(\cdot)$.

Exemplo 2

$$\dot{x}(t) = 0 \cdot x(t)$$

onde $0$ é a matriz $n \times n$ de zeros

Pelo Teorema 1 pode-se encontrar $n$ soluções L.I.

De facto, qualquer vetor do $\mathbb{R}^n$ é uma solução deste *sistema homogéneo* e a combinação linear de qualquer conjunto de $n$ elementos do $\mathbb{R}^n$ que seja L.I. nos dá todas as soluções deste *sistema homogéneo*.

Por exemplo, se $n = 2$, então quaisquer $2$ elementos do $\mathbb{R}^2$ que sejam L.I. nos dá todas as soluções deste *sistema homogéneo*.

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A = 0} \cdot x(t)$$

Claramente,

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são duas soluções L.I. do *sistema*.

Logo,

$$x(t) = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{x_1(t)} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{x_2(t)} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

representa todas as *combinações lineares* possíveis de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (i.e., representa o $\mathbb{R}^2$).

Portanto, $x(t)$ expressa todas as soluções deste *sistema*.

Definição 1 – Matriz Fundamental $\Psi(t)$ do *sistema homogéneo* (7.3)

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t)$$

é qualquer matriz $n \times n$ cujas colunas são soluções L.I. de (7.3)

Exemplo 3

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}$$

é uma possível Matriz Fundamental para o *sistema* $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ do Exemplo 1.

Outra Matriz Fundamental possível seria:

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & (4 + t^2) \end{bmatrix}$$

No entanto, a matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2t^2 & -t^2 \end{bmatrix}$$

não é Matriz Fundamental porque embora suas colunas sejam soluções do *sistema homogéneo* (7.3), elas não são L.I.

por outro lado

$$\Psi(t) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1(t) & x_2(t) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

é uma possível Matriz Fundamental para o *sistema* $\dot{x}(t) = 0 \cdot x(t)$ do Exemplo 2 quando $n = 2$.

Na verdade, qualquer matriz $2$x$2$, cujos elementos $\psi_{ij} \in \mathbb{R}$ (i.e., sejam *números reais*), com $2$ colunas L.I., é uma Matriz Fundamental deste sistema.

Equivalentemente, qualquer matriz $\Psi(t)$ $2$x$2$ tal que

$$\det \{ \Psi(t) \} \neq 0$$

é uma Matriz Fundamental do *sistema homogéneo* $\dot{x}(t) = 0 \cdot x(t)$ do Exemplo 2 quando $n = 2$.

Para o caso em que $0$ é a matriz $n \times n$ de zeros, qualquer matriz $\Psi(t)$ $n \times n$ com $n$ colunas L.I., é uma Matriz Fundamental deste sistema. Ou, equivalentemente, qualquer matriz $\Psi(t)$ $n \times n$ tal que $\det \{ \Psi(t) \} \neq 0$ é uma Matriz Fundamental do sistema.

É fácil de verificar que se $\Psi(t)$ é uma Matriz Fundamental do sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) \tag{7.3}$$

então $\Psi(t)$ satisfaz

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\,\Psi(t) \tag{7.4}$$

e $\Psi(t_o)$ é uma matriz de coeficientes reais não singular, isto é

$$\det \Psi(t_o) \neq 0 \tag{7.5}$$

Na realidade temos os seguintes resultados:

Teorema 2 – $\Psi(t)$ é uma Matriz Fundamental de (7.3) se e somente se $\Psi(t)$ satisfaz (7.4) para todo $t$ e (7.5) para algum $t_o$

Teorema 3 – Se $\Psi(t)$ é Matriz Fundamental, então $\Psi(t_o)$ é não singular para todo $t_o \in (-\infty, \infty)$.

Com o resultado do Teorema 3 sabe-se que:

$$\Psi^{-1}(t_o) \text{ existe para todo } t_o$$

Portanto, pode-se definir a Matriz de Transição do sistema $\Phi(t, t_o)$

Definição 2 – Matriz de Transição $\Phi(t, t_o)$ do *sistema homogéneo* (7.3)

$$\Phi(t, t_o) = \Psi(t)\,\Psi^{-1}(t_o) \qquad \text{para todo } t_o \in (-\infty, \infty).$$

Teorema 4 – A Matriz de Transição $\Phi(t, t_o)$ do *sistema homogéneo* (7.3)

i) é única;

ii) depende apenas de $A(t)$;

iii) não depende da escolha da Matriz Fundamental $\Psi(t)$

Este resultado segue do facto que 2 Matrizes Fundamentais de (7.3) quaisquer $\Psi(t)$ e $\Psi'(t)$ satisfazem

$$\Psi(t) = \Psi'(t)\,P \qquad \text{para algum } P \text{ inversível.}$$

Propriedades da Matriz de Transição $\Phi(t, t_o)$ de (7.3)

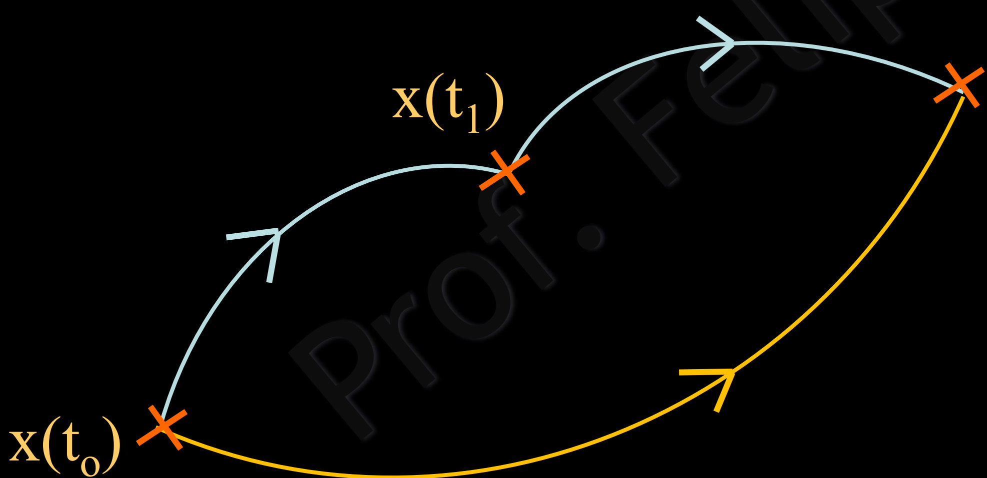
i) $\Phi(t, t) = I$ ;

ii) $\Phi^{-1}(t, t_o) = \Psi(t_o)\,\Psi^{-1}(t) = \Phi(t_o, t)$ ;

iii) $\Phi(t_2, t_o) = \Phi(t_2, t_1) \cdot \Phi(t_1, t_o)$ para todo $t, t_o, t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$.

A interpretação da propriedade (iii) é que

$$\phi(t_2, t_o, x_o, 0) = \phi(t_2, t_1, \underbrace{\phi(t_1, t_o, x_o, 0)}_{x(t_1)}, 0)$$




$$x(t_2) = \Phi(t_2, t_o) \cdot x_o$$
$$= \Phi(t_2, t_1) \cdot \underbrace{\Phi(t_1, t_o) \cdot x_o}_{x(t_1)}$$

Exemplo 4 – Tomando novamente o sistema $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ do Exemplo 3, onde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix},$$

qualquer que seja a Matriz Fundamental $\Psi(t)$ escolhida, a Matriz de Transição $\Phi(t, t_o)$ será dado por

$$\Phi(t, t_o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(t^2 - t_o^2\right) & 1 \end{bmatrix}$$

---

Teorema 5 – A Matriz de Transição $\Phi(t, t_o)$ de (7.3) é a única solução de

$$\dot{\Phi}(t, t_o) = A(t)\cdot\Phi(t, t_o)\ , \qquad \Phi(t, t_o) = I \tag{7.6}$$

Teorema 6 –

$$\phi(t, t_o, x_o, 0) = \Phi(t, t_o)\, x_o$$

Portanto a Matriz de Transição $\Phi(t\,,t_o)$ de (7.3) governa a evolução de $x(t)$ quando $x(t_o) = x_o$.

Ou seja, a Matriz de Transição $\Phi(t\,,t_o)$ de (7.3) governa o estado do sistema (7.1) quando $u(\cdot) = 0$.

**Teorema 7 –** Se $A(t)$ e ( $\int_{t_o}^{t} A(\tau)\cdot d\tau$ ) comutam, então a única solução de (7.6) é dada por

$$\Phi(t\,,t_o) \;=\; e^{\int_{t_o}^{t} A(\tau)\cdot d\tau} \qquad (7.7)$$

Este teorema diz que se

$$A(t)\cdot\left(\int_{t_o}^{t} A(\tau)\cdot d\tau\right) \;=\; \left(\int_{t_o}^{t} A(\tau)\cdot d\tau\right)\cdot A(t) \qquad (7.8)$$

então $\Phi(t\,,t_o)$ dada por (7.7) é a Matriz de Transição de (7.3).

Observação importante – Quando $A(t)$ é uma *matriz diagonal*, ou quando $A(t) = A$ ($A$ constante, independente de $t$), então a equação (7.8) é satisfeita.

## Solução da Equação Dinâmica

**Teorema 8** – A solução da equação dinâmica (7.1) é dada por

$$x(t) = \phi(t, t_o, x_o, u(\cdot)) = \Phi(t, t_o)\, x_o + \int_{t_o}^{t} \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

onde $\Phi(t, t_o)$ é a Matriz de Transição de (7.3), ou seja, $\Phi(t, t_o)$ é a única solução de (7.6).

Se $u(t) = 0$ temos:

$$x(t) = \phi(t, t_o, x_o, 0) = \Phi(t, t_o) \cdot x_o$$ ( já visto no Teorema 6 )

Se $x_o = 0$ temos:

$$x(t) = \phi(t, t_o, 0, u(\cdot)) = \int_{t_o}^{t} \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Portanto,

$$x(t) = \phi(t, t_o, x_o, u(\cdot)) = \underbrace{\phi(t, t_o, x_o, 0)}_{\text{transiente ou resposta livre}} + \underbrace{\phi(t, t_o, 0, u(\cdot))}_{\text{regime estacionário ou resposta forçada}}$$

Corolário A saída $y(t)$ em (7.2) é dada por

$$y(t) = C(t)\cdot\Phi(t, t_o)\, x_o + \int_{t_o}^{t} C(t)\cdot\Phi(t,\tau)\cdot B(\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau$$

Se $x_o = 0$, temos que:

$$y(t) = \int_{t_o}^{t} \underbrace{[\, C(t)\cdot\Phi(t,\tau)\cdot B(\tau)\,]}_{G(t,\tau)\ \text{definido em (5.7)}}\cdot u(\tau)\cdot d\tau$$

## Solução de Sistemas Invariantes no Tempo

Para sistemas *invariantes no tempo*

$$A(t) = A \ , \qquad B(t) = B \qquad \text{e} \qquad C(t) = C$$

conforme vimos em (5.14) e (5.15)

Neste caso uma possível Matriz Fundamental $\Psi(t)$ é dada por

$$\boxed{\Psi(t) = e^{At}}$$

Este resultado segue do Teorema 2 uma vez que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A \cdot e^{At} \qquad \text{e} \qquad e^{At_o}$$

são *não singulares* para $t = 0$.

Portanto, a Matriz de Transição para sistemas invariantes no tempo tem a forma

$$\Phi(t,t_o) = e^{At}\cdot(e^{At_o})^{-1} = e^{A(t-t_o)} = \Phi(t-t_o)$$

Aliás, este resultado também poderia ser obtido pelo Teorema 7 juntamente com a observação que o segue. Logo,

$$\phi(t,t_o,x_o,u(\cdot)) = e^{A(t-t_o)}\cdot x_o + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-\tau)}\cdot B\cdot u(\tau)\cdot d\tau \qquad (7.9)$$

Se $t_o = 0$, a solução do sistema linear invariante no tempo é então dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t,0,x_o,u(\cdot)) = e^{At}\cdot x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\cdot B\cdot u(\tau)\cdot d\tau & (7.10) \\ y(t) = Ce^{At}\cdot x_o + C\cdot\int_0^t e^{A(t-\tau)}\cdot B\cdot u(\tau)\cdot d\tau & (7.11) \end{cases}$$

# Solução de um sistema linear

Se $x_o = 0$, a solução do sistema linear invariante no tempo é então dada por:

$$y(t) = \int_0^t \underbrace{C \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot B}_{G(t,\tau) = G(t-\tau)} \cdot u(\tau) \cdot d\tau \qquad (7.12)$$

= matriz resposta ao impulso, dada por (7.8)

Tomando a Transformada de Laplace de (7.10) e (7.11),

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} x_o + (sI - A)^{-1} B \cdot U(s) \\ Y(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} x_o + C \cdot (sI - A)^{-1} B \cdot U(s) \end{cases}$$

Quando $x_o = 0$, temos a 'Matriz de Transferência' $\mathbb{G}(s)$

$$Y(s) = \underbrace{C \cdot (sI - A)^{-1} B}_{\mathbb{G}(s)} \cdot U(s)$$

conforme já havia sido obtida em (6.9).

Em resumo,

A solução do sistema linear invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, \quad x(t_o) = x_o & (7.13) \\ y(t) = C\,x(t) & (7.14) \end{cases}$$

é dada por

$$\begin{cases} x(t) = e^{At} \cdot x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau & (7.15) \\ y(t) = C \cdot e^{At} \cdot x_o + C \cdot \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau & (7.16) \end{cases}$$

[note que as equações (7.15) e (7.16) acima são as mesmas que (7.10) e (7.11)]

Exemplo 5 – Sistema homogéneo de 1ª ordem

$$\begin{cases} \dot{x} = a\,x, \qquad x(0) = x_o \\ y = c\,x \end{cases}$$

onde:

$a$ e $c$ são constantes,

isto é, são matrizes $1x1$

$1$ saída (*output*)

Solução:

Como é bastante conhecida, da resolução de *equações diferenciais homogéneas* e de 1ª ordem.

$$\begin{cases} x(t) = x_o\, e^{at} \\ y(t) = c\, x_o\, e^{at} \end{cases}$$

## Exemplo 6 – Sistema homogéneo de ordem $n$

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x, \quad x(0) = x_o \\ y = C\,x \end{cases}$$

onde:

$A$ é uma matriz $n \times n$

$C$ é uma matriz $q \times n$

$q$ saídas (*outputs*)

Solução:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}\,x_o \\ y(t) = C\,e^{At}\,x_o \end{cases}$$

que nitidamente é uma *generalização* do *sistema* de 1ª ordem do Exemplo 5.

## Exemplo 7 – Sistema de 1ª ordem

$$\begin{cases} \dot{x} = a\,x + b\,u, \quad x(0) = x_o \\ y = c\,x \end{cases}$$

onde:
$a$, $b$ e $c$ são constantes,
isto é, são matrizes $1 \times 1$

1 entrada (*input*) e 1 saída (*output*)

Solução:

Também bastante conhecida da resolução de *equações diferenciais* de 1ª ordem.

$$\begin{cases} x(t) = x_o \cdot e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} \cdot b \cdot u(\tau) \cdot d\tau \,, \quad x(0) = x_o \\ y(t) = c\,x_o\,e^{at} + c \cdot \int_0^t e^{a(t-\tau)} \cdot b \cdot u(\tau) \cdot d\tau \end{cases}$$

Exemplo 8 – Sistema de ordem n

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u, \quad x(0) = x_o \\ y = C\,x \end{cases}$$

onde:

A é uma matriz n x n

B é uma matriz n x p

C é uma matriz q x n

p entradas (*inputs*) e q saídas (*outputs*)

Solução:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At} \cdot x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \\ y(t) = C\,e^{At} \cdot x_o + \int_0^t C\,e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \end{cases}$$

que nitidamente é uma *generalização* do *sistema* de 1ª ordem do Exemplo 7.

## Exemplo 9 – Sistema de 2ª ordem

$$\begin{cases} \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x \end{cases}$$

$$x(0) = x_o = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$D = 0$

$u(t) =$ degrau unitário

Exemplo 9 (continuação)

Logo, o *sistema homogéneo* é dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x$$

cuja solução é dada por:

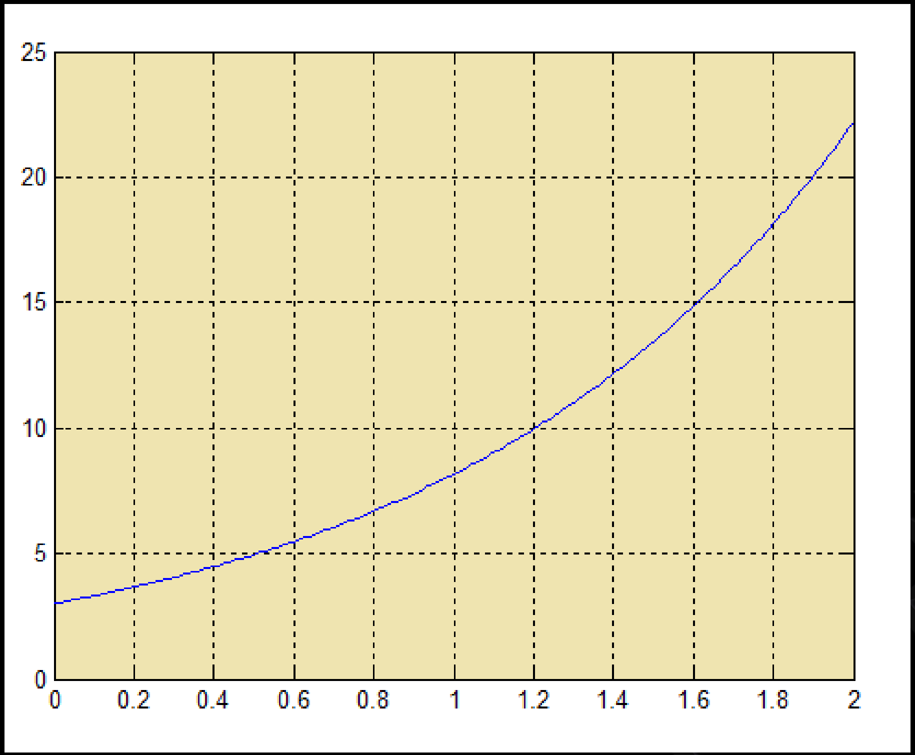
$$x(t) = e^{At} \cdot x_o = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ \frac{1}{3}\left(e^{t} - e^{-2t}\right) & e^{-2t} \end{bmatrix}}_{e^{At}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{x_o}$$

ou seja,

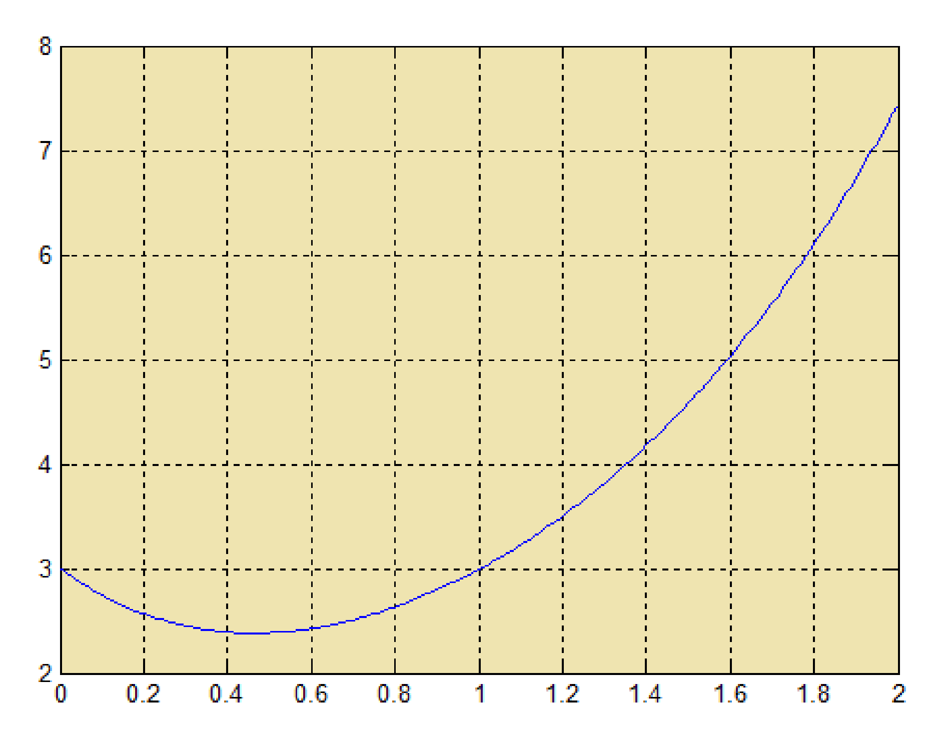
$$x(t) = e^{At} \cdot x_o = \begin{pmatrix} 3e^{t} \\ e^{t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1(t) \\ \leftarrow x_2(t) \end{matrix}$$

## Exemplo 9 (continuação)

$x_1(t)$




$x_2(t)$



Exemplo 9 (continuação)

Note que, para $t = 0$,

$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

que era o valor esperado pois este era o *estado inicial* $x_o$.

e a saída, $y = C\,x$, para o *sistema homogéneo*, é dada por

$$y(t) = \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3e^{t} \\ e^{t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}}_{x(t)}}$$

$$= \boxed{e^{t} + 2e^{-2t}}$$

Exemplo 9 (continuação) Para o *sistema não homogéneo*, isto é, com entrada $u(t)$:

$$x(t) = \underbrace{e^{At}\cdot x_o}_{} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}\cdot B\cdot u(\tau)\cdot d\tau}_{}$$

$$= \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix} + \int_o^t \begin{bmatrix} e^{(t-\tau)} & 0 \\ \frac{1}{3}\left(e^{(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right) & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(\tau)d\tau$$

$$= \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix} + \int_o^t \begin{pmatrix} e^{(t-\tau)}u(\tau) \\ \frac{1}{3}\left(e^{(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right)u(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_o^t e^{(t-\tau)}u(\tau)d\tau \\ \int_o^t \frac{1}{3}\left(e^{(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right)u(\tau)d\tau \end{pmatrix}$$

$u(t) =$ degrau unitário

i.e., $u(t) = 1$

$$= \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_o^t e^{(t-\tau)}d\tau \\ \int_o^t \frac{1}{3}\left(e^{(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 (continuação)

ou seja,

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3e^{t} \\ e^{t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t} - 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{e^{t}}{3} + \frac{e^{-2t}}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^{t} - 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{4e^{t}}{3} + \frac{13e^{-2t}}{6} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1(t) \\ \leftarrow x_2(t) \end{matrix}$$

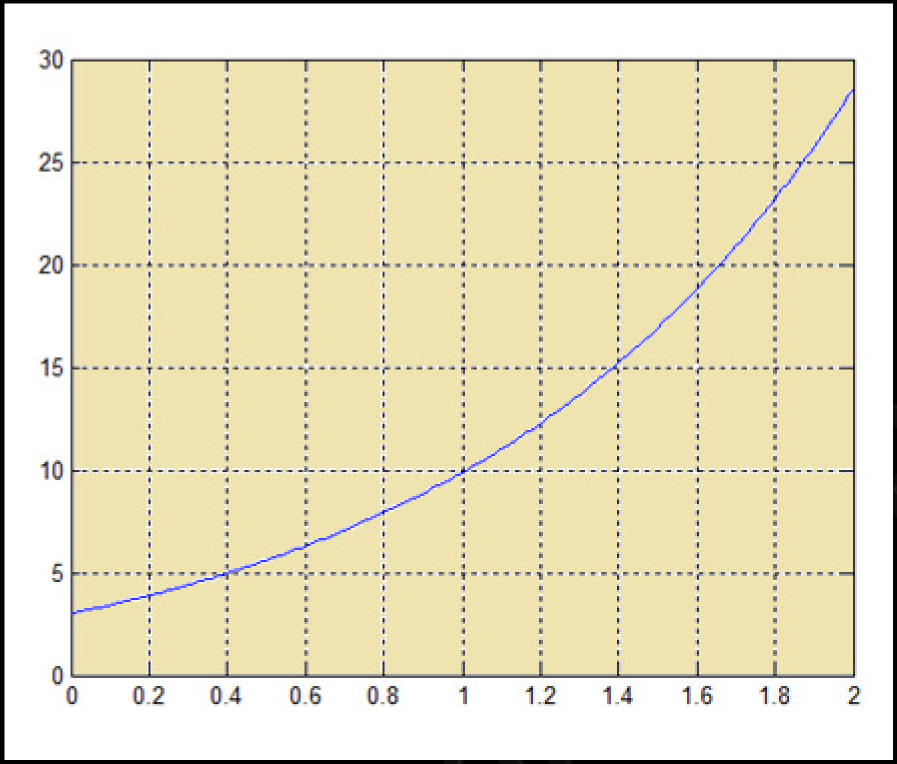
Note que, novamente, para $t = 0$,

$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

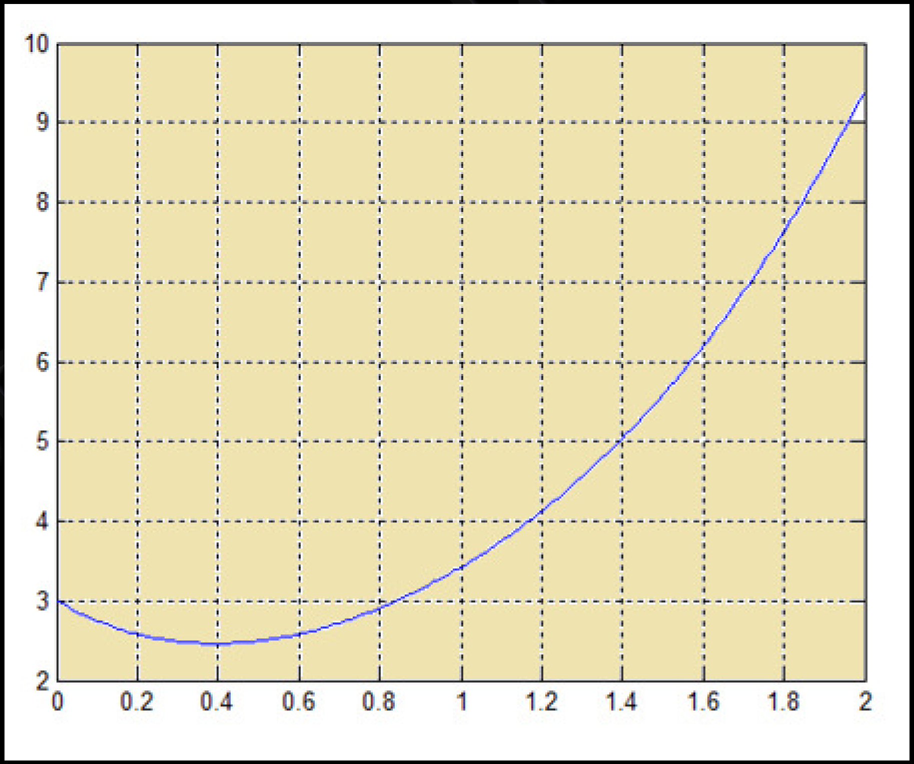
que era o valor esperado pois este era o *estado inicial* $x_o$.

Exemplo 9 (continuação)

$x_1(t)$




$x_2(t)$



Exemplo 9 (continuação)

e a saída, $y = C\,x$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4e^{t} - 1 \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{4e^{t}}{3} + \dfrac{13e^{-2t}}{6} \end{pmatrix}}_{x(t)}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{4e^{t}}{3} + \frac{13e^{-2t}}{6}$$

UNIVERSIDADE
BEIRA INTERIOR

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

# Thank you!
# Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt