Controlo Avançado

6

"Descrição na forma de estado"

J. A. M. Felippe de Souza

Descrição na forma de estado

A descrição entrada-saída só é válida quando o sistema é relaxado no estado inicial.

Se o sistema não é relaxado em t_o, então a equação

$$y_{[t_o\,,\,\infty)} = H \cdot u_{[t_o\,,\,\infty)}$$

não é válida, pois $y_{[t\ \ ,\,\infty)}$ irá depender das condições iniciais do sistema.

Definição 1 – O estado de um sistema em t_o é a quantidade de informação em t_o que, juntamente com $u_{[t\,,\,\infty)}$ determinam o comportamento do sistema para todo $t > t_o$.

Já vimos no capítulo 1 alguns exemplos da descrição de sistemas na forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\,(\,x(t)\,,\,u(t)\,,\,t\,), \qquad x\,(t_o) = x_o & (6.1) \\ y(t) = h\,(\,x(t)\,,\,u(t)\,,\,t\,). & (6.2) \end{cases}$$

A equação (3.10) é chamada de "*equação dinâmica*" do sistema e descreve a dinâmica do estado $x(t)$ para $t > t_o$.

Na maioria dos casos é possível escrever o sistema na forma (6.1)-(6.2).

Por exemplo, um sistema descrito por uma '*equação diferencial ordinária*' de 4ª ordem pode ser transformado para a forma (6.1)-(6.2), que é um sistema de 4 equações de primeira ordem, com a dimensão do estado igual a 4.

Se o sistema é linear, (6.1)-(6.2) podem ser reescritas como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), & x(t_o) = x_o \qquad (6.3) \\ y(t) = C(t)\,x(t) & \qquad (6.4) \end{cases}$$

Se o sistema é linear e invariante no tempo, obtemos $A(t) = A$, $B(t) = B$ e $C(t) = C$, e portanto,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), & x(t_o) = x_o \qquad (6.5) \\ y(t) = C\,x(t) & \qquad (6.6) \end{cases}$$

Neste caso nós podemos calcular a expressão de $G(s)$ = *função de transferência* (ou *matriz de transferência*) do sistema.

Tomando a Transformada de Laplace de (6.5) e (6.6),

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ Y(s) = C \cdot X(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) & (6.7) \\ Y(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} x(0) + C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) & (6.8) \end{cases}$$

Se o sistema está relaxado em $t_o = 0$, então

$$x(0) = x_o = 0 \qquad \text{e}$$

$$Y(s) = \underbrace{C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B}_{G(s)} \cdot U(s) \qquad (6.9)$$

$G(s)$ = *função de transferência* (ou *matriz de transferência*) do sistema

Sistemas Equivalentes

Definindo-se um novo estado para o sistema (6.5)-(6.6)

$$\bar{x} = P\,x$$

onde P é uma matriz inversível, obtemos

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\,\bar{x}(t) + \bar{B}\,u(t)\,, \qquad \bar{x}(t_o) = x_o & (6.10) \\ y(t) = \bar{C}\,\bar{x}(t) & (6.11) \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \boxed{\bar{A} = P\,A\,P^{-1}} & (6.12) \\ \boxed{\bar{B} = P\,B} & (6.13) \\ \boxed{\bar{C} = C\,P^{-1}} & (6.14) \end{cases}$$

Observe que (6.10)-(6.11) é uma outra forma de escrever o sistema (6.5)-(6.6) na qual o novo estado $\overline{x}(t)$ é uma combinação linear das componentes do estado original $x(t)$.

Estes sistemas são chamados "equivalentes".

Portanto, sistemas equivalentes são na verdade um só sistema com a definição das variáveis de estado diferentes (*um é combinação linear das componentes do outro*).

Se $\hat{A}$ é a *forma canónica de Jordan* de A, então fazendo $P = M^{-1}$, ou $P^{-1} = M$

$$\hat{A} = M^{-1} A M$$

onde M é a matriz

$$M = [\ v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_n\ ]$$

formada pelos *autovetores* e *autovetores generalizados* de A.

Se definirmos também

$$\hat{B} = M^{-1} \cdot B \qquad \text{e} \qquad \hat{C} = C \cdot M$$

então

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\,\hat{x}(t) + \hat{B}\,u(t) \\ y(t) = \hat{C}\,\hat{x}(t) \end{cases}$$

é um sistema equivalente a (6.5)-(6.6) onde

$$\hat{x}(t) = M^{-1}\,x(t).$$

e

$\hat{A}$ está na *forma canónica de Jordan* de A.

Exemplo 1 – Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^{A} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}^{b} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{c} x(t) \end{cases}$$

onde a matriz A é a do Exemplo 4, capítulo 3 (Diagonalização) e para o qual achamos $\hat{A}$, a *forma canónica de Jordan* de A.

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Para isto foi calculada a matriz M de *autovetores* e *autovetores generalizados* de A.

$$M = [\, v_1 \mid v_2 \mid v_3] = \left[\begin{array}{c|c|c} \overbrace{1}^{v_1} & \overbrace{1}^{v_2} & \overbrace{5}^{v_3} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 1 (continuação)

Observe que $\hat{A}$ satisfaz a equação (6.12) para $P = M^{-1}$, ou $P^{-1} = M$.

$$\hat{A} = M^{-1} A M$$

e agora, se calcularmos $\hat{b}$ e $\hat{c}$ usando (6.13) e (6.14),

$$\hat{b} = M^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \hat{c} = c \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e temos o sistema reescrito na forma

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\,\hat{x}(t) + \hat{b}\,u(t) \\ y(t) = \hat{c}\,\hat{x}(t) \end{cases}$$

onde $\hat{A}$ está na *forma canónica de Jordan*.

Exemplo 2 – Considere o sistema do Exemplo 5, capítulo 3 (Diagonalização)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + b\,u(t) \\ y(t) = c\,x(t) \end{cases}$$

onde $\hat{A}$, a *forma canónica de Jordan* de A já foi calculada, assim como $\hat{b}$ e $\hat{c}$, diretamente da *função de transferência* $Y(s)/U(s)$ do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Também foi calculado o polinómio característico de A e seus autovalores:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = (\lambda - 2)^3\,\lambda$$

autovalores de A $\begin{cases} \lambda_1 = 2, \text{ com multiplicidade } 3 \quad (n_1 = 3) \\ \lambda_2 = 0, \text{ com multiplicidade } 1 \quad (n_2 = 1) \end{cases}$

Exemplo 2 (continuação)

Observou-se que o autovalor $\lambda_1 = 2$, com multiplicidade 3 ($n_1 = 3$) não satisfaz a condição (3.1) do rank, logo, terá pelo menos um *bloco de Jordan*.

Portanto, vamos em busca de um *autovetor generalizado* v de ordem 3 para este autovalor $\lambda_1 = 2$. Para isto, temos que achar vetor v tal que $(A - 2 \cdot I)^3 \, v = 0$ e $(A - 2 \cdot I)^2 \, v \neq 0$. Ou seja, v tal que

$$(A - 2 \cdot I)^3 \, v = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 18 & 12 & -8 \end{bmatrix}}^{(A - 2 \cdot I)^3} v = 0$$

e

$$(A - 2 \cdot I)^2 \, v = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -9 & -1 & 4 \end{bmatrix}}^{(A - 2 \cdot I)^2} v \neq 0$$

Exemplo 2 (continuação)

Note que

$$v = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um vetor que satisfaz ambas estas duas condições, e portanto v é um *autovetor generalizado* de ordem 3.

Isso era previsível pois neste caso o número de cadeias $n_{cad} = 1$, já calculado com o uso da eq. (3.5) no Exemplo 5, capítulo 3.

Agora fazemos $v_3 = v$ e calculamos os *autovetores generalizados* v_2 de ordem 2 e v_1 de ordem 1 usando equações (3.4):

$$v_2 = (A - 2\cdot I)\, v_3$$

$$v_1 = (A - 2\cdot I)\, v_2$$

e assim obtemos a cadeia de 3 *autovetores generalizados* de $\lambda_1 = 2$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que o *autovetor generalizado* v_1 de ordem 1 é na verdade um *autovetor* de $\lambda_1 = 2$.

Exemplo 2 (continuação)

Para o outro autovalor de A, $\lambda_2 = 0$, pode-se facilmente calcular o *autovetor*

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo agora a matriz $M = [\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,|\, v_4 \,] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{v_1} & \overbrace{\quad}^{v_2} & \overbrace{\quad}^{v_3} & \overbrace{\quad}^{v_4} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} -2 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 17 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$,

tem-se que

$$\hat{A} = M^{-1} A M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que possui um *bloco de Jordan* de dimensão 3 correspondente ao autovalor triplo $\lambda_2 = 2$.

Exemplo 2 (continuação)

Isto ocorre porque o autovalor triplo $\lambda_2 = 2$ possui uma cadeia de 3 *autovetores generalizados*. Caso isso não fosse possível, $\lambda_2 = 2$ teria uma cadeia de 2 *autovetores generalizados* o que produziria um *bloco de Jordan* de dimensão 2 e outro de dimensão 1.

Para $\hat{b}$ e $\hat{c}$ temos:

$$\hat{b} = M^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} -10{,}5 \\ -3 \\ -1 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \qquad \hat{c} = c \cdot M = \begin{bmatrix} -7 & 22 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

e assim temos o sistema reescrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\,\hat{x}(t) + \hat{b}\,u(t) \\ y(t) = \hat{c}\,\hat{x}(t) \end{cases}$$

onde $\hat{A}$ está na <u>*forma canónica de Jordan*</u>.

Exemplo 2 (continuação)

Se entretanto tivéssemos escolhido

$$M = [\, v_4 \,|\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,] = \begin{array}{cccc} v_4 & v_1 & v_2 & v_3 \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 17 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

então obteríamos $\hat{A}$ com os blocos trocados:

$$\hat{A} = M^{-1} A M = \left[\begin{array}{c:ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad \hat{b} = M^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ -10{,}5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c} = c \cdot M = [\,1 \;\; -7 \;\; 22 \;\; 6\,]$$

FACULDADE ENGENHARIA

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt