Controlo Avançado

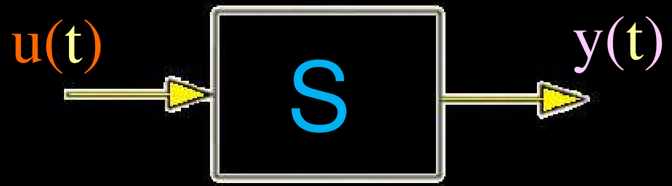
5

“Descrição entrada-saída”

J. A. M. Felippe de Souza

Descrição de Sistemas

Conforme a notação introduzida no capítulo 1, a função $u(\cdot)$ representa a entrada (ou as entradas) e a função $y(\cdot)$ representa a saída (ou as saídas) do sistema.



Também usaremos a notação $u_{[t_1\ ,\ t_o)}$ se a função $u(\cdot)$ é definida no intervalo $[t_o, t_1)$. Semelhantemente, se define $u_{[t_o\ ,\ \infty)}$, $u_{(-\infty\ ,\ t_o)}$, $y_{[t_o\ ,\ t_1)}$, etc.

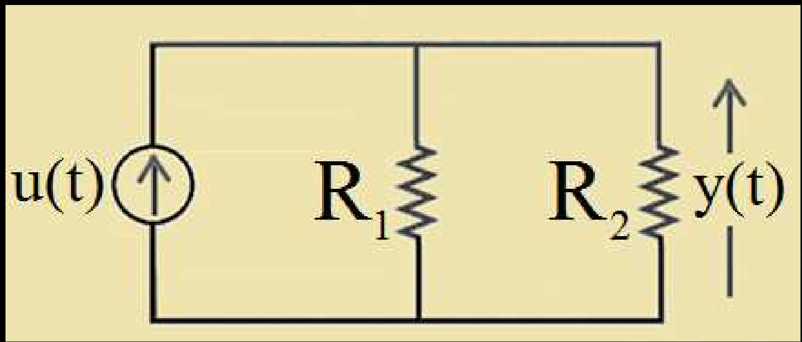
Neste capítulo 5 concentraremos na descrição entrada-saída ('*input*/*output*') e no capítulo seguinte (capítulo 6) na descrição em equações de estado ('*state equations*').

A descrição entrada-saída, também chamada I/O (input/*output*), é qualquer descrição do sistema que nos dá uma relação H entre a entrada $u(\cdot)$ e a saída $y(\cdot)$, isto é

$$y(\cdot) \;=\; H\cdot\, u(\cdot) \qquad (5.1)$$

É importante se assumir que o sistema está *em repouso* (ou *relaxado*) em $t = -\infty$ e portanto a saída $y(\cdot)$ é excitada apenas pela entrada $u_{(-\infty\ ,\ \infty)}$.

Um caso particular é quando $y(t)$, a saída no instante t, depende apenas da entrada no instante t, $u(t)$. Por exemplo



$$y(t) = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot u(t)$$

Neste caso H é a transformação linear $u(\cdot) \to [R_1R_2/(R_1 + R_2)]\, u(\cdot)$.

Este sistemas são chamados de '*sistemas sem-memória*' ou '*sistemas instantâneos*'.

Descrição entrada-saída

Para o caso de várias entradas e saídas,

$$u(t) = (u_1(t)\,,\, u_2(t)\,,\, \dots\,,\, u_m(t)\,)^T\,,$$

$$y(t) = (y_1(t)\,,\, y_2(t)\,,\, \dots\,,\, y_p(t)\,)^T \qquad \text{e}$$

$$y(\cdot)\; = \;H\cdot\, u(\cdot)$$

onde H é uma matriz $p \times m$ com elementos reais,

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{p1} & h_{p2} & \cdots & h_{pm} \end{bmatrix}_{p \times m}$$

No caso geral no entanto, os sistemas têm memória, isto é, $y(t)$, a saída no instante t, depende de $u_{(-\infty\,,\,\infty)}$.

Descrição entrada-saída

O sistema é dito *linear* se o operador H em (5.1) é um operador linear. Isto é, H satisfaz o *princípio da superposição* que consistem em duas propriedades:

i) $H(u + u') = Hu + Hu'$ (aditividade)

ii) $H(\alpha u) = \alpha Hu$ (homogeneidade)

para quaisquer entradas $u(\cdot)$, $u'(\cdot)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

O *princípio da superposição* significa que:

i) podemos superpor duas entradas $u(\cdot)$ e $u'(\cdot)$ obtendo a entrada $(u(\cdot) + u'(\cdot))$ e a saída $y(t)$ será a soma (ou superposição) das saídas que seriam obtidas se aplicássemos as entradas $u(\cdot)$ e $u'(\cdot)$ separadamente;

ii) além disso, se multiplicarmos uma entrada $u(\cdot)$ por α, então a saída $y(t)$ também ficará multiplicada por α.

Exemplo 1 – Suponha que um sistema de uma entrada $u(t)$ e uma saída $y(t)$ tenha a seguinte relação para todo t,

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{u^2(t)}{u(t-1)} & \text{se } u(t-1) \neq 0 \\ 0 & \text{se } u(t-1) = 0 \end{cases}$$

É fácil de verificar que esta relação de entrada-saída satisfaz a propriedade de *homogeneidade*, no entanto ela não satisfaz a propriedade de *aditividade*.

Função de Transferência

$$y(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(H\cdot\delta(t\,,\tau))}_{g(\cdot\,,\tau)} \cdot u(\tau)\cdot d\tau$$

onde

$g(\cdot\,,\tau)$ = resposta do sistema *em repouso* ao impulso aplicado no instante $t = \tau$.

$$y(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t\,,\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau \qquad (5.2)$$

Se o sistema tem m entradas e p saídas, (5.2) pode ser estendida para

$$y(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t\,,\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau \qquad (5.3)$$

onde $G(t\,,\,\tau) = [\, g_{ij}(t\,,\,\tau)\,]$ é uma matriz $p \times m$ cujo elemento $g_{ij}(t\,,\,\tau)$ é a $i^{\text{ésima}}$ resposta no instante t ao impulso aplicado no instante τ na $j^{\text{ésima}}$ entrada.

$$G(t\,,\,\tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t\,,\tau) & g_{12}(t\,,\tau) & \cdots & g_{1m}(t\,,\tau) \\ g_{21}(t\,,\tau) & g_{22}(t\,,\tau) & \cdots & g_{2m}(t\,,\tau) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{p1}(t\,,\tau) & g_{p2}(t\,,\tau) & \cdots & g_{pm}(t\,,\tau) \end{bmatrix}_{p \times m}$$

Definição 1 – O sistema é dito *causal* se $y(t)$, a saída no instante t, não depende da entrada aplicada depois do instante t. Isto é,

$$y(\cdot) = H \cdot u_{(-\infty\,,\,t]}$$

Portanto, sistemas *causais*, *lineares* e *em repouso* em $t = -\infty$ satisfazem

$$G(t\,,\,\tau) = 0 \qquad \forall\,\tau \ \text{ e } \ \forall\, t < \tau$$

Consequentemente,

$$y(\cdot) = \int_{-\infty}^{t} G(t\,,\,\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau \qquad (5.4)$$

Definição 2 – O sistema está *em repouso* em $t = t_o$ se $y_{[t_o\,,\,\infty)}$, a saída para $t \geq t_o$, depende apenas de $u_{[t_o\,,\,\infty)}$, a entrada aplicada depois do instante $t \geq t_o$. Isto é,

$$y_{[t_o\,,\,\infty)} = H\cdot\, u_{[t_o\,,\,\infty)} \qquad (5.5)$$

Exemplo 2 – Um sistema com retardo cuja relação entrada-saída é dada por

$$y(t) = u(t-a).$$

Isto é, a saída é a própria entrada atrasada de a unidades de tempo.

Este sistema estará *em repouso* em t_o se $u_{[t_o - a\ ,\ t_o]} = 0$

mesmo que

$$u_{(-\infty\ ,\ t_o - a)} \neq 0$$

Portanto, sistemas *em repouso* satisfazem (5.5) e por isso,

$$y(\cdot) = \int_{t_o}^{\infty} G(t\ ,\ \tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau \qquad (5.6)$$

Sistemas *causais*, *lineares* e *em repouso* em $t = t_o$ satisfazem

$$y(\cdot) = \int_{t_o}^{t} G(t\ ,\ \tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau \qquad (5.7)$$

Teorema 1 – Um sistema cuja relação de entrada-saída é dada por (5.3) está *em repouso* em t_o se e somente se $u_{[t_o\,,\,\infty)} = 0$ implica em $y_{[t_o\,,\,\infty)} = 0$.

Definição 3 – O sistema é dito *invariante no tempo* (ou *estacionário*) se as características do sistema não mudam com o tempo.

É fácil de mostrar que se o sistema é *invariante no tempo*, então

$$G(t\,,\,\tau) = G(t-\tau,\,0) = G(t-\tau) \tag{5.8}$$

Portanto, um sistema *linear*, *causal*, *em repouso* em $t = t_o$ e *invariante no tempo* satisfaz

$$y(\cdot) = \int_{t_o}^{t} G(t-\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau$$

Em particular, se o *instante inicial* é $t_o = 0$, então

$$y(\cdot) = \int_{0}^{t} G(t-\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau = \int_{0}^{t} G(\tau)\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau \tag{5.9}$$

que é chamada de '*integral de convolução*'.

Se tomarmos $Y(s)$, a Transformada de Laplace de $y(t)$,

$$Y(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty G(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau \right) \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty G(t-\tau) \cdot e^{-s(t-\tau)} dt \right) \cdot u(\tau) \cdot e^{-st} d\tau =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^\infty G(\nu) \cdot e^{-s\nu} d\nu \right)}_{G(s)} \cdot \underbrace{\left(\int_0^\infty u(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \right)}_{U(s)}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

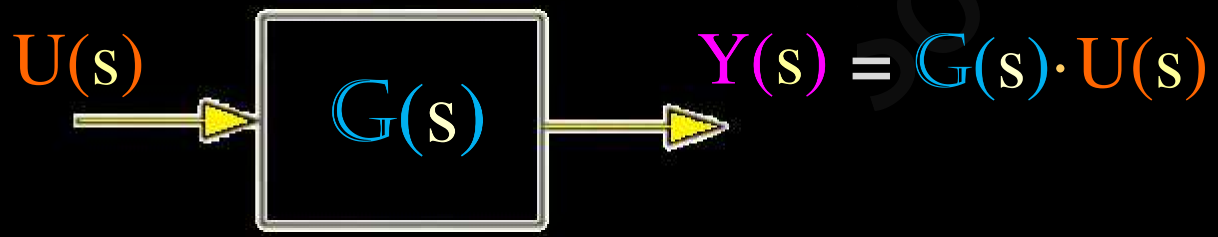
A Transformada de Laplace da *convolução* de 2 funções é o produto das Transformadas de Laplace dessas 2 funções.

$G(s)$ = Transformada de Laplace de $G(t)$ que é chamada de Função de Transferência do sistema

Observe que foi necessário assumir que o sistema é *invariante no tempo* assim como que está *em repouso* em $t_o = 0$.

Descrição entrada-saída

Portanto a <u>Função de Transferência</u> $G(s)$ nos dá uma relação entre as transformadas de Laplace $U(s)$ e $Y(s)$, respetivamente da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$, para sistemas *lineares*, *invariante no tempo*, e *em repouso* em $t_o = 0$.



Se o sistema tem apenas uma entrada $u(t)$ e uma saída $y(t)$, então $G(s)$ terá a forma de uma *função racional*:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \textit{quociente de 2 polinómios em } s$$

No entanto, se o sistema tiver m entradas e p saídas, $G(s)$ será uma matriz $p \times m$ de *funções racionais*.

Ou seja,

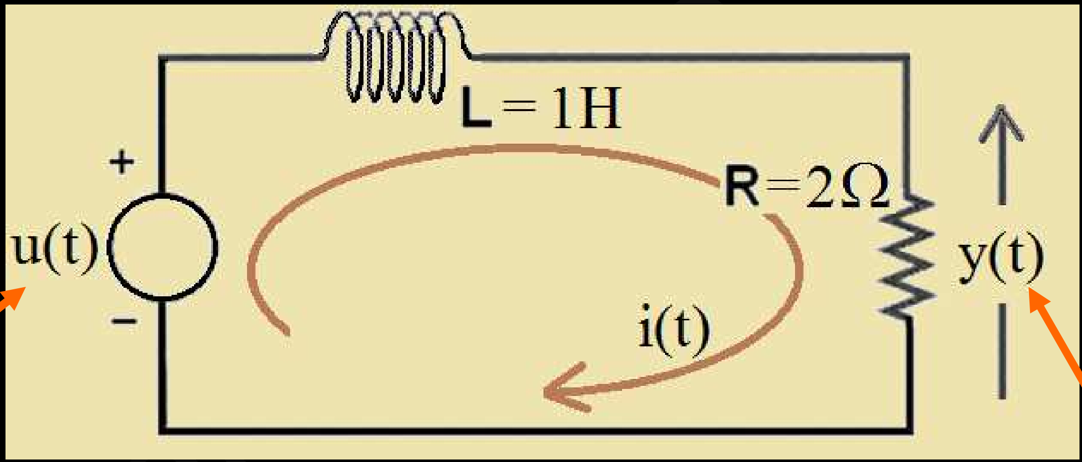
$$\mathbb{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbb{G}_{11}(s) & \mathbb{G}_{12}(t\,,\tau) & \cdots & \mathbb{G}_{1m}(s) \\ \mathbb{G}_{21}(s) & \mathbb{G}_{22}(t\,,\tau) & \cdots & \mathbb{G}_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbb{G}_{p1}(s) & \mathbb{G}_{p2}(s) & \cdots & \mathbb{G}_{pm}(s) \end{bmatrix}_{p \times m}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{N_{11}(s)}{D_{11}(s)} & \frac{N_{12}(s)}{D_{12}(s)} & \cdots & \frac{N_{1m}(s)}{D_{1m}(s)} \\ \frac{N_{21}(s)}{D_{21}(s)} & \frac{N_{22}(s)}{D_{22}(s)} & \cdots & \frac{N_{2m}(s)}{D_{2m}(s)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{N_{p1}(s)}{D_{p1}(s)} & \frac{N_{p2}(s)}{D_{p2}(s)} & \cdots & \frac{N_{pm}(s)}{D_{pm}(s)} \end{bmatrix}_{p \times m}$$

Exemplo 3 – Tomando o Exemplo 1 do Capítulo 1 (Circuito Elétrico) e assumindo $\underbrace{i(0) = 0}_{}$, temos

(*em repouso* em $t = 0$)

$$s\,I(s) - \underbrace{\cancel{i(0)}}_{=0} + 2 \cdot I(s) = U(s)$$



$u(t)$ = controlo (input)

= fonte de tensão

$y(t)$ = saída (output)

= tensão na resistência

Exemplo 3 (continuação)

e como $y(t) = 2i(t)$, então $Y(s) = 2 \cdot I(s)$, ou seja, $I(s) = (½) \cdot Y(s)$, logo,

$$\left(\frac{s}{2} + 1\right) \cdot Y(s) = U(s)$$

o que nos dá,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{2}{s + 2}$$

Função de Transferência
do sistema

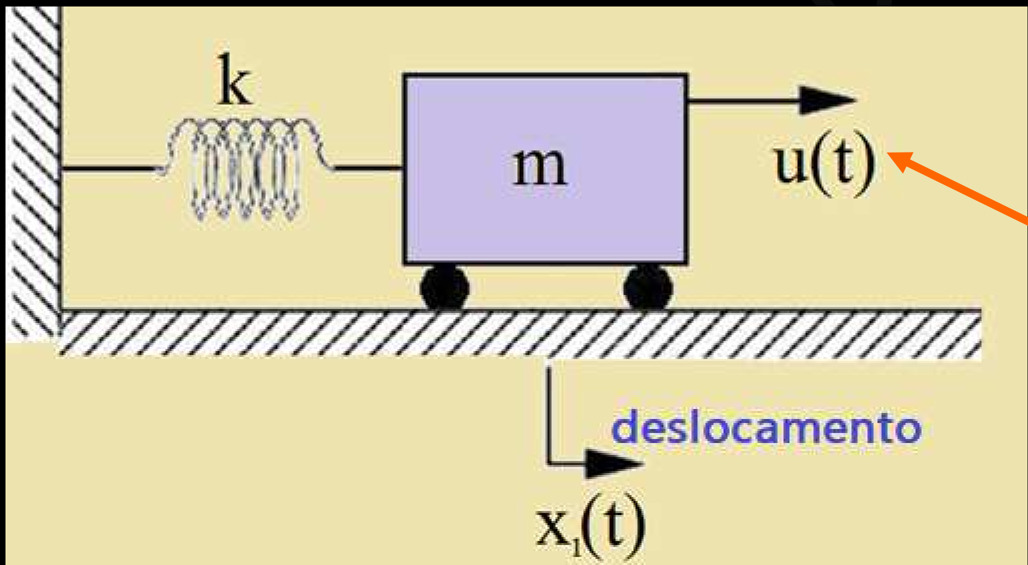
Exemplo 4 – Tomando o Exemplo 3 do Capítulo 1 (Sistema massa-mola) e assumindo estar *em repouso* em $t = 0$, isto é

$$x_1(0) = 0 \quad (\textit{posição} \text{ do carro} = 0),$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \quad (\textit{velocidade} \text{ do carro} = 0),$$

então,

$$m s^2 X_1(s) - s\,\overset{=0}{\cancel{\dot{x}_1(0)}} - \overset{=0}{\cancel{x_1(0)}} = -kX_1(s) + U(s)$$



$u(t)$ = controlo (input) = força aplicada ao carro

Exemplo 4 (continuação)

e como, $y(t) = x_1(t) =$ *posição* do carro no instante t, temos

$$(m s^2 + k)\,Y(s) = U(s)$$

Logo,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{m s^2 + k} \Rightarrow G(s) = \frac{1/m}{s^2 + (k/m)}$$

Função de Transferência
do sistema

Observe que o *polinómio* do denominador não tem o termo do 1º grau.
Isto se dá ao facto que o *atrito* nas rodas do carro de massa m foi desprezado.

Exemplo 4 (continuação)

Considerando um coeficiente de atrito viscoso μ a equação diferencial fica modificada para

$$m x_1(t) = -\mu x_1(t) - k x_1(t) + u(t)$$

e portanto,

$$(m s^2 + \mu s + k) \cdot Y(s) = U(s)$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/m}{s^2 + (\mu/m)s + (k/m)}$$

Função de Transferência do sistema

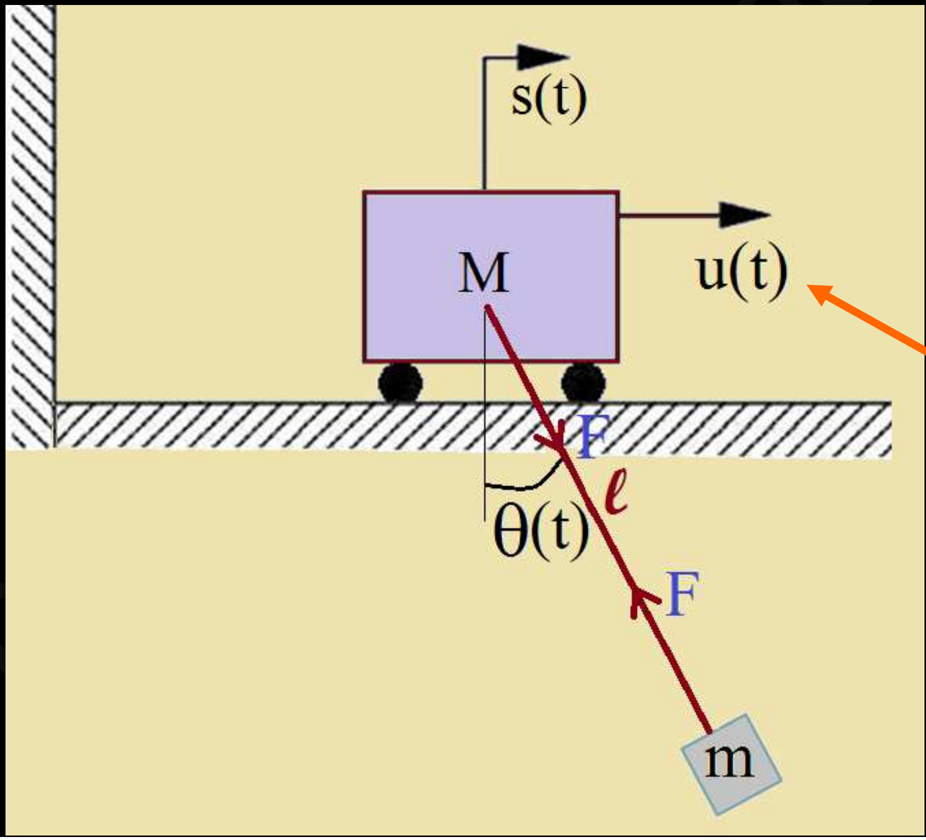
Exemplo 5 – Tomando o Exemplo 4 do Capítulo 1 (Sistema carro com pêndulo) e assumindo estar *em repouso* em $t = 0$, isto é

$s(0) = 0$ (*posição* do carro $= 0$ em $t = 0$),

$\dot{s}(0) = 0$ (*velocidade* do carro $= 0$ em $t = 0$),

$\theta(0) = 0$ (*posição angular* do pêndulo $= 0$ em $t = 0$),

$\dot{\theta}(0) = 0$ (*velocidade angular* do pêndulo $= 0$ em $t = 0$),



$u(t)$ = controlo (input) = força aplicada ao carro

Exemplo 5 (continuação) De (1.14) temos

$$M\,\ell\,s^2\cdot\Theta(s) \;+\; (m+M)\,g\,\Theta(s) \;=\; -U(s)$$

$$M\,s^2\,S(s) \;-\; m\,g\cdot\Theta(s) \;=\; U(s)$$

Como $y_1(t) = s(t) =$ *posição* do carro e $y_1(t) = \theta(t) =$ *posição angular* do pêndulo,

$$M\,s^2\cdot Y_1(s) \;-\; m\,g\cdot Y_2(s) \;=\; U(s)$$

$$\left[M\,\ell\,s^2 \;+\; (m+M)\,g\right]\,Y_2(s) \;=\; -U(s)$$

Logo,

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_1(s)}{U(s)} \\[2ex] \dfrac{Y_2(s)}{U(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1/M)\,s^2 - (g/M\,\ell)}{s^4 + \left[(m+M)\,g/M\,\ell\right]s^2} \\[4ex] \dfrac{(1/M\,\ell)}{s^2 + \dfrac{(m+M)\,g}{M\,\ell}} \end{bmatrix}$$

Matriz de Transferência do sistema

Exemplo 6 — Tomando o Exemplo 5 do Capítulo 1 (Tanque de mistura) e assumindo estar *em repouso* em $t = 0$, isto é

$x_1(0) = 0$ (*volume* do líquido no tanque em torno de $\overline{V} = 0$, $V(0) - \overline{V} = 0$, para $t = 0$),

$x_2(0) = 0$ (*concentração* do líquido no tanque em torno de $\overline{c} = 0$, $c(0) - \overline{c} = 0$, para $t = 0$)

Controlo (*input*):

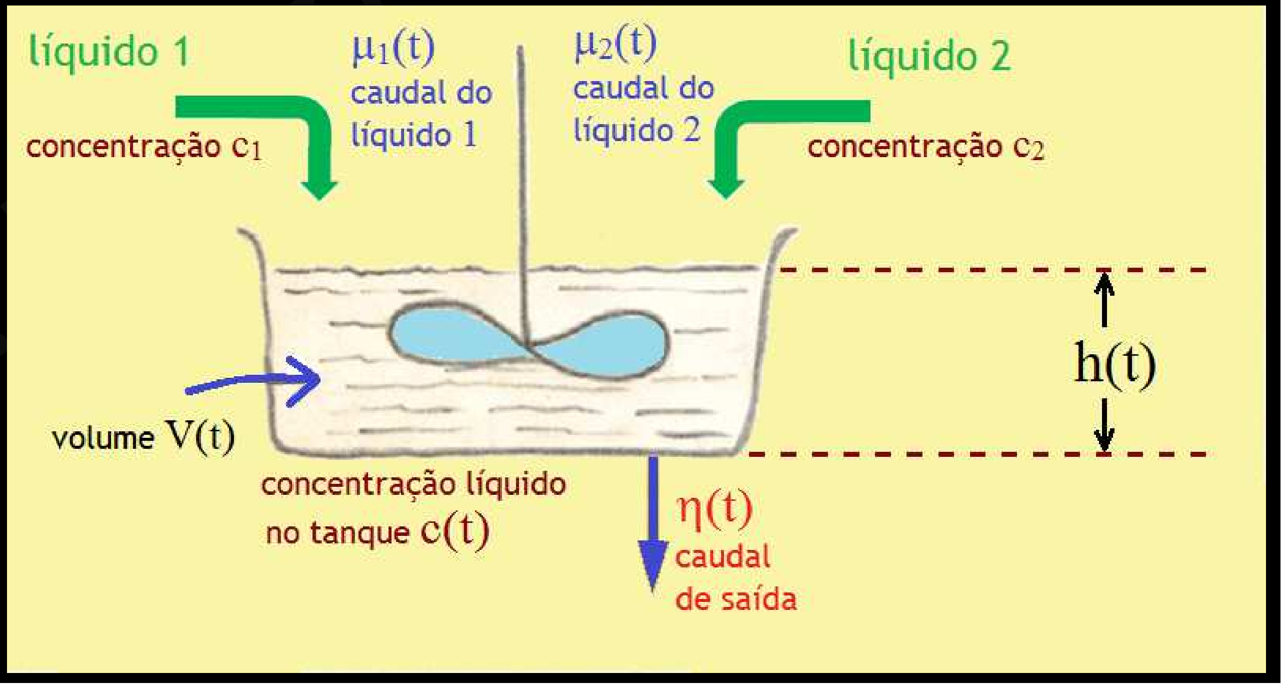
$u_{1,2}(t)$ = fluxo (ou caudal) do líquido em torno de $\overline{\mu}_{1,2}(t)$

Saída (*output*):

$y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$

$y_1(t)$ = pequenas variações do fluxo ou caudal $\eta(t)$ no regime estacionário $\overline{\eta}$.

$y_2(t) = x_2(t)$ (*definido acima*)



Exemplo 6 (continuação)

Logo, como este sistema tem 2 entradas ($u_1(t)$ e $u_2(t)$) e 2 saídas ($y_1(t)$ e $y_2(t)$), a Matriz de Transferência $G(s)$ terá dimensão 2×2.

Não é difícil de verificar que $G(s)$ tem a expressão dada abaixo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_1(s)}{U_1(s)} & \dfrac{Y_1(s)}{U_2(s)} \\[2ex] \dfrac{Y_2(s)}{U_1(s)} & \dfrac{Y_2(s)}{U_2(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\dfrac{1}{2\theta}\right)}{\left(s - \dfrac{1}{2\theta}\right)} & \dfrac{\left(\dfrac{1}{2\theta}\right)}{\left(s - \dfrac{1}{2\theta}\right)} \\[4ex] \dfrac{\left(\dfrac{c_1 - \bar{c}}{\bar{V}}\right)}{\left(s - \dfrac{1}{\theta}\right)} & \dfrac{\left(\dfrac{c_2 - \bar{c}}{\bar{V}}\right)}{\left(s - \dfrac{1}{\theta}\right)} \end{bmatrix}$$

Matriz de Transferência do sistema

Definição 4 –

i) $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é um *polo* de uma *função racional* $r(s) = N(s)/D(s)$ se $|r(\lambda)| \to \infty$.

ii) $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é um *zero* de uma *função racional* $r(s) = N(s)/D(s)$ se $r(\lambda) = 0$.

Definição 5 – $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é um *polo* da *matriz racional* $\mathbb{G}(s)$ se λ é um *polo* de pelo menos um elemento de $\mathbb{G}(s)$.

Podemos então observar que:

- No Exemplo 4, o sistema não possui *zeros* e os *polos* são as 2 raízes do *polinómio* $p(s) = s^2 + (k/m)$ ou $p(s) = s^2 + (\mu/m)s + (k/m)$.

- No Exemplo 5, os *polos* do sistema são $s = \pm j\cdot[(m+M)g/M\ell]^{1/2}$ e $s = 0$ (duplo) e os *zeros* são $s = \pm j\cdot[-g/\ell]^{1/2}$.

- No Exemplo 6, não há *zeros* e os *polos* do sistema são $s = 1/\theta$ e $s = 1/2\theta$.

Exemplo 7 – Considere o sistema que possui a seguinte Função de Transferência

$$G(s) = \frac{s-2}{s^2-5s+6} = \frac{s-2}{(s-2)(s-3)}$$

$\lambda = 3$ é um *polo*. No entanto, $\lambda = 2$ não é nem *zero* nem *polo*, pois $G(2) = -1$ que é $\neq 0$ e $|G(2)| = 1$ que é $\neq \infty$.

Na realidade $G(s)$ pode ser reescrita como

$$G(s) = \frac{\cancel{s-2}}{\cancel{(s-2)}(s-3)} = \frac{1}{(s-3)}$$

Se nós assumirmos que cada elemento $N_{ij}(s)/D_{ij}(s)$ de $G(s)$ é irredutível (isto é, não tem fatores comuns), então as raízes de $D_{ij}(s)$ são os *polos* de $G(s)$.

É comum também se assumir que $D_{ij}(s)$ é mónico. Isto é, o coeficiente do termo de mais alto grau é 1. As Funções de Transferência dos Exemplos 4, 5, 6 e 7 acima estão nesta forma, isto é, todos $D_{ij}(s)$ são mónicos.

FACULDADE ENGENHARIA

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt