Controlo Avançado

4
“Função de matriz”

J. A. M. Felippe de Souza

Primeiramente vamos definir "*polinómio de matriz*".

Definição: Polinómio de matriz (*quadrada*)

Seja $p(\lambda)$ um polinómio em λ de grau n (finito), podemos definir $p(A)$.

Por exemplo:

Se $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 5$ $\Rightarrow$ $p(A) = A^4 - 2A^3 + 5I$

Note que se A é uma matriz quadrada, então A^2, A^3 , etc. estão bem definidas.

Além disso, $A^o = I$, e $A^1 = A$, como é óbvio.

A seguir vamos ver alguns resultados importantes com relação à "*polinómio de matriz*":

Teorema 1: Se

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad p(A) = \begin{bmatrix} p(A_1) & 0 \\ 0 & p(A_2) \end{bmatrix}$$

Exemplo 1: Pelo **Teorema 1** acima, qualquer matriz diagonal $\hat{A}$, o *polinómio de matriz* $p(\hat{A})$ se escreve como:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad p(\hat{A}) = \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Teorema 2 – Se $\hat{A}$ é a *forma canónica de Jordan* de A, e M é a matriz definida na eq. (3.7) no capítulo 3, 'Diagonalização', então

i) $A^k = M \cdot \hat{A}^k \cdot M^{-1}$

ii) $p(A) = M \cdot p(\hat{A}) \cdot M^{-1}$

iii) $p(A) = 0 \iff p(\hat{A}) = 0$

Além disso, se $\hat{A}_{ij}$ é um *bloco de Jordan* de dimensões n_{ij} x n_{ij} definido na eq. (3.8) no mesmo capítulo 3, 'Diagonalização', então

iv) $$(\hat{A}_{ij} - \lambda_i I)^k \begin{cases} = 0, & \forall k \geq n_{ij} \\ \neq 0, & \forall k < n_{ij} \end{cases}$$

Definição: $\bar{n}_i$, o índice do autovalor λ_i

$\bar{n}_i$ = maior ordem dos blocos $\hat{A}$ associados a λ_i

Definição: $\psi(\lambda)$, o polinómio mínimo de A

$$\boxed{\psi(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i}}$$

Nota: $\psi(\lambda)$ tem grau

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{m} \bar{n}_i \leq n$$

onde

n = grau do polinómio característico de A, $\Delta(\lambda)$

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

Corolário: (do Teorema 2 acima)

Se $\psi(\lambda)$ é o polinómio mínimo de A

$$\psi(A) = 0$$

grau do polinómio mínimo de A

e nenhum polinómio $p(\lambda)$ de grau $< \bar{n}$ satisfaz

$$p(A) = 0$$

por esta razão $\psi(\lambda)$ é chamado de polinómio mínimo de A

Corolário: (também chamado de Teorema de Cayley-Hamilton):

Se $\Delta(\lambda) =$ polinómio característico de A

então,

$$\Delta(A) = 0 \qquad (4.1)$$

Exemplo 2: a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

polinómio característico de A

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\Delta(A) = A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

polinómio característico de A

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$\Delta(A) = A^2 - 2A + I = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Exemplo 3: A forma canónica de Jordan de uma matriz A é dada por

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Para $i = 1$ $\begin{cases} \lambda_i = -3 \\ n_i = 5 \\ \bar{n}_i = 3 \end{cases}$

índice do autovalor λ_i

E claro que $\bar{n} = \bar{n}_i = \bar{n}_1 = 3$

Para este $\hat{A}$, os blocos de Jordan $\hat{A}_{ij}$, conforme definido em (3.8) no capítulo 3 ('Diagonalização'), são

$$\hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \hat{A}_{12} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3 (*continuação*):

As matrizes $(\hat{A}_{ij} - \lambda_i I)$ têm a forma

$$(\hat{A}_{ij} - \lambda_i I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Para as matrizes $\hat{A}_{ij}$ do Exemplo 3 acima

$$(\hat{A}_{11} - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\hat{A}_{12} - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3 (*continuação*):

É fácil de verificar que

$$(\hat{A}-\lambda_1 I) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{12} \end{array}\right]$$

logo

$$(\hat{A}-\lambda_1 I)^2 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^2 & 0 \\ \hline 0 & A_{12}^2 \end{array}\right]$$

0

Exemplo 3 (*continuação*):

$$(\hat{A} - \lambda_i I)^3 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]^3 = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{A_{11}^3}_{0} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{A_{12}^3}_{0} \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]}_{0}$$

polinómio mínimo de A

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3 = (\lambda + 3)^3$$

$$\Rightarrow \quad \psi(A) = (A - \lambda_1 I)^3 = (A + 3I)^3 = 0$$

polinómio característico de A

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5 = (\lambda + 3)^5$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(A) = (A + 3I)^5 = 0$$

Exemplo 4: A forma canónica de Jordan de uma matriz A é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Para $i = 1$

$$\begin{cases} \lambda_i = -3 \\ n_i = 3 \\ \overline{n}_i = 2 \end{cases}$$

$\overline{n}_i$: índice do autovalor λ_1

Para $i = 2$

$$\begin{cases} \lambda_i = -2 \\ n_i = 2 \\ \overline{n}_i = 2 \end{cases}$$

$\overline{n}_i$: índice do autovalor λ_2

E claro que $\overline{n} = \overline{n}_1 + \overline{n}_2 = 4$

Para este $\hat{A}$, os blocos de Jordan $\hat{A}_{ij}$, conforme definido em (3.8) no capítulo 3, 'Diagonalização', são

$$\hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \hat{A}_{12} = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} \qquad \hat{A}_{21} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4 (*continuação*):

É fácil de verificar que

$$(\hat{A}_{11} - \lambda_1 I) = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$(\hat{A}_{12} - \lambda_1 I) = \boxed{[0]}$$

$$(\hat{A}_{21} - \lambda_2 I) = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

logo

$$(\hat{A}_{11} - \lambda_1 I)^2 = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^2 = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$(\hat{A}_{12} - \lambda_1 I)^2 = \boxed{[0]}^2 = \boxed{[0]}$$

$$(\hat{A}_{21} - \lambda_2 I)^2 = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^2 = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Exemplo 4 (*continuação*):

polinómio mínimo de A

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)^2 = (\lambda + 3)^2(\lambda + 2)^2$$

$$\Rightarrow \quad \psi(A) = (A + 3I)^2(A + 2I)^2 = 0$$

polinómio característico de A

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_2)^2 = (\lambda + 3)^3(\lambda + 2)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(A) = (A + 3I)^3(A + 2I)^2 = 0$$

Os resultados a seguir vão permitir definir outras "*funções de matriz*" $f(A)$ que não sejam "*polinómios de matriz*", como por exemplo

$$\operatorname{sen}(At),\ \cos(At) \text{ ou } e^{At},$$

a partir de "*polinómios de matriz*" $p(A)$.

Definição: α_{ij} são os valores de p no espetro de A

$$\boxed{\alpha_{ij} = p^{(j)}(\lambda_i)\,,\quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad j = 0, 1, \ldots, (n_i - 1)}$$

m = número de autovalores distintos

onde

$$p^{(j)}(\lambda_i) = \frac{d^j p}{d\lambda^j}(\lambda_i)$$

e claro que:

$$\text{se } j = 0 \Rightarrow p^{(0)}(\lambda_i) = p(\lambda_i)$$

Exemplo 5: Calcular os valores de p no espetro de A para um polinómio $p(\lambda)$ qualquer:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Polinómio característico de A

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Autovalores de A $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ Valores de p no espetro de A $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{10} = p(1), \\ \alpha_{20} = p(2) \end{array} \right.$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Polinómio característico de A

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Autovalores de A $\left\{ \lambda_1 = 1,\ n_1 = 2 \right.$ $\Rightarrow$ Valores de p no espetro de A $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{10} = p(1), \\ \alpha_{11} = p'(1) \end{array} \right.$

derivada em relação à λ

Teorema 3: $p(A) = q(A) \iff p^{(j)}(\lambda_i) = q^{(j)}(\lambda_i),$

$$i = 1, 2, \ldots, m \qquad j = 0, 1, \ldots, \bar{n}_i$$

Obs.: Note que $\bar{n}_i \leq n_i$

Ou seja, se p e q têm *os mesmos valores no espetro de A*, então

$$p(A) = q(A)$$

Teorema 4 – Se A é uma matriz $n \times n$ então para $\forall$ polinómio $p(\lambda)$ pode-se construir um polinómio $q(\lambda)$ de grau $(n-1)$,

isto é

$$q(\lambda) = \alpha_o + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_2 \cdot \lambda^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot \lambda^{n-1},$$

tal que p e q têm *o mesmos valores no espetro de A*, e portanto

$$p(A) = q(A) = \alpha_o \cdot I + \alpha_1 \cdot A + \alpha_2 \cdot A^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot A^{n-1}$$

Exemplo 6:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Achar A^{100}

Primeiro calcula-se $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ ➡ Logo, $\lambda_1 = 1,\ n_1 = 2$

Agora defina
$$\begin{cases} p(\lambda) = \lambda^{100} \\ q(\lambda) = \alpha_o + \alpha_1 \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(1) = q(1) \Rightarrow 1^{100} = \alpha_o + \alpha_1 \\ p'(1) = q'(1) \Rightarrow 100 \cdot (1)^{99} = \alpha_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_o = -99 \\ \alpha_1 = 100 \end{cases}$$

E de facto,

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\underbrace{A^{100}}_{p(A)} = \underbrace{\alpha_o I + \alpha_1 A}_{q(A)} = \underset{\alpha_o}{-99} \cdot I + \underset{\alpha_1}{100} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Função de matriz

Agora vamos definir "*função de matriz*".

Definição: Função de matriz (*quadrada*)

Seja $f(\lambda)$ uma função que é definida no espetro de A.

Se $q(\lambda)$ é um polinómio que tem os mesmos valores no *espetro* de A, então,

$$f(A) \equiv q(A)$$

Exemplo 7: Calcular e^{At} para A dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = $$
$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 =$$
$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

autovalores de A $\begin{cases} \lambda_1 = 1, & \text{com multiplicidade } 2 \ (n_1 = 2) \\ \lambda_2 = 2, & \text{com multiplicidade } 1 \ (n_2 = 1) \end{cases}$

Agora define-se $\begin{cases} f(\lambda) = e^{\lambda t} \quad \text{e} \\ q(\lambda) = \alpha_o + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(1) = q(1) & \Rightarrow & e^{t} = \alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 \\ f'(1) = q'(1) & \Rightarrow & te^{t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ f(2) = q(2) & \Rightarrow & e^{2t} = \alpha_o + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases}$$

derivada em relação à λ

Exemplo 7 (*continuação*):

$$\begin{cases} \alpha_o = e^{2t} - 2te^{t} \\ \alpha_1 = 3te^{t} + 2e^{t} - 2e^{2t} \\ \alpha_2 = e^{2t} - e^{t} - te^{t} \end{cases}$$

Portanto, $\underbrace{e^{At}}_{f(A)} = \underbrace{\alpha_o I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2}_{q(A)} =$

$$= \begin{bmatrix} (2e^{t} - e^{2t}) & 0 & (2e^{t} - 2e^{2t}) \\ 0 & e^{t} & 0 \\ (e^{2t} - e^{t}) & 0 & (2e^{2t} - e^{t}) \end{bmatrix}$$

Voltaremos a esta função e^{At} (*exponencial de matriz*) mais adiante.

Observe que, se $t = 0$,

$$e^{A\cdot 0} = e^{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$ (matriz identidade).

Exemplo 8: Calcular $\mathrm{sen}(At)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

autovalores de A $\begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -2, \end{cases}$

Define-se $\begin{cases} f(\lambda) = \mathrm{sen}\,(\lambda t) \\ q(\lambda) = \alpha_o + \alpha_1 \lambda \end{cases}$

Fazendo $\begin{matrix} f(\lambda_1) = q(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) = q(\lambda_2) \end{matrix}$

$$\begin{cases} f(1) = \mathrm{sen}\,t = \alpha_o + \alpha_1 = q(1) \\ f(-2) = \mathrm{sen}(-2t) = \alpha_o - 2\alpha_1 = q(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_o = \frac{1}{3}(2\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,2t) \\ \alpha_1 = \frac{1}{3}(\mathrm{sen}\,t + \mathrm{sen}\,2t) \end{cases}$$

Nota:

Como seno é uma *função ímpar*,

$$\mathrm{sen}(-t) = -\mathrm{sen}(t)$$

Logo,

$$\overbrace{\mathrm{sen}\,(At)}^{f(A)} = \overbrace{\alpha_o \cdot I + \alpha_1 \cdot A}^{q(A)}$$

Exemplo 8 (*continuação*):

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(At) = \begin{bmatrix} \alpha_o + \alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_o - 2\alpha_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t & 0 \\ \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t\right) & -\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\operatorname{sen}(At) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t & 0 \\ \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t\right) & -\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}$$

Observe que, se $t = 0$,

$$\operatorname{sen}(A \cdot 0) = \operatorname{sen}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Exemplo 9: Para a mesma matriz A do exemplo anterior, calcular $\cos(At)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

De forma semelhante podemos achar:

$$\cos(At) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t) & \cos 2t \end{bmatrix}$$

Observe que, se $t = 0$,

matriz identidade

$$\cos(A \cdot 0) = \cos(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Teorema 5 – (Generalização do **Teorema 1** acima)

Se $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ então $f(A) = \begin{bmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{bmatrix}$

Teorema 6 – (Generalização do **Teorema 2** (ii) e (iii) acima)

i) $f(A) = M \cdot f(\hat{A}) \cdot M^{-1}$ (4.2)

ii) $f(A) = 0 \iff f(\hat{A}) = 0$ (4.3)

Teorema 7:

Seja $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ duas funções definidas no espectro de A, então

$$f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A)$$

Função de matriz em blocos de Jordan

Conforme já vimos no capítulo anterior, os blocos de Jordan são matrizes quadradas.

A seguir alguns resultados para funções de um bloco de Jordan.

Seja A_{ij} *bloco de Jordan* de dimensão n_i x n_i definido em (3.8) no capítulo 3, 'Diagonalização', então

$$(\hat{A}_{ij} - \lambda_i I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & \mathbf{0} & & & 0 \end{bmatrix}$$

Ao se calcular

$$(\hat{A}_{ij} - \lambda_i I)^2,\ (\hat{A}_{ij} - \lambda_i I)^3, \text{etc.}$$

Este resultado já foi ilustrado no Exemplo 3 (acima)

teremos '*zeros*' na diagonal principal e aquela diagonal de '1s' vai subindo até desaparecer e virar uma *matriz de zeros* quando o expoente chegar a n_i:

$$(\hat{A}_{ij} - \lambda_i I)^{n_i} = 0$$

ou seja,

$$(\hat{A}_{ij} - \lambda_i I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

$$\vdots$$

$$(\hat{A}_{ij} - \lambda_i I)^{n_i - 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, se quisermos calcular $f(\hat{A}_{ij})$ será mais prático se definirmos $q(\lambda)$

$$q(\lambda) = \alpha_o + \alpha_1(\lambda - \lambda_i) + \alpha_2(\lambda - \lambda_i)^2 + \ldots + \alpha_{n-1}(\lambda - \lambda_i)^{n_i - 1}$$

e calcularmos os coeficientes $\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ tal que f e q tenham os mesmos valores no espetro de $\hat{A}_{ij}$.

Observe que para $\hat{A}_{ij}$, o polinómio característico é

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{n_i} ,$$

ou seja, possui um autovalor λ_i com multiplicidade n_i.

Logo,

$$\begin{cases} \alpha_o = f(\lambda_i) \\ \alpha_1 = f'(\lambda_i) \\ \alpha_2 = f''(\lambda_i) / 2! \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{n_i - 1} = f^{(n_i - 1)}(\lambda_i) / (n_i - 1)! \end{cases}$$

são tais valores de $\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Concluímos este resultado para os *blocos de Jordan* com o enunciado do teorema a seguir:

Teorema 8: $f(\hat{A}_{ij}) = q(\hat{A}_{ij}) =$

$$= \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i)/1! & f''(\lambda_i)/2! & \cdots & f^{(n_i-1)}(\lambda_i)/(n_i-1)! \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i)/1! & \cdots & f^{(n_i-2)}(\lambda_i)/(n_i-2)! \\ 0 & 0 & f(\lambda_i) & \cdots & f^{(n_i-3)}(\lambda_i)/(n_i-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Com esse resultado fica fácil calcular $f(\hat{A})$ para matrizes $\hat{A}$ na *forma canónica de Jordan*, como veremos nos dois exemplos que seguem.

Exemplo 10:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & 0 & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Calcular $e^{\hat{A}t}$

Usando Teorema 8, obtemos

$$e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2! & & & \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & 0 & \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & & & \\ & & & e^{\lambda_1 t} & & \\ & 0 & & & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ & & & & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 11:

Tomando $\hat{A}$ do Exemplo 7, capítulo 3, 'Diagonalização',

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Calcular $e^{\hat{A}t}$

Usando novamente o Teorema 8, temos

$$e^{\hat{A}t} = \left[\begin{array}{cc|c} e^{t} & te^{t} & \\ 0 & e^{t} & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & e^{2t} \end{array}\right]$$

Exemplo 12:

Para $\hat{A}$ do Exemplo 6, capítulo 3, 'Diagonalização',

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ \hline & & & 2 & 1 & \\ & 0 & & 0 & 2 & \\ \hline & & & & & 0 \end{array}\right]$$

Calcular $e^{\hat{A}t}$

Usando novamente o Teorema 8, temos

$$e^{\hat{A}t} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} e^{2t} & te^{2t} & t^2e^{2t}/2! & & & \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & & 0 & \\ 0 & 0 & e^{2t} & & & \\ \hline & & & e^{2t} & te^{2t} & \\ & 0 & & 0 & e^{2t} & \\ \hline & & & & & 1 \end{array}\right]$$

Função de matriz e série de potências

Teorema 9: Seja

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$$

a representação da função f em *série de potências* e $f(\lambda_i)$ converge para todos autovalores λ_i de A, então

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$$

Como consequência, se

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$$

é a representação da função f em *série de potências* e $A^n = 0$ para algum inteiro $n > 0$, então

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$$

Considere o *bloco de Jordan* $\hat{A}_{ij}$ definido em (3.8) no capítulo 3, 'Diagonalização', e a função f expandida na forma de Série de Taylor na vizinhança de λ_i,

$$f(\lambda) = f(\lambda_i) + f'(\lambda_i)(\lambda-\lambda_i) + \frac{f'(\lambda_i)}{2!}(\lambda-\lambda_i)^2 + \cdots$$

então

$$f(\hat{A}_{ij}) = f(\lambda_i)\cdot I + f'(\lambda_i)(\hat{A}_{ij}-\lambda_i I) + \frac{f'(\lambda_i)}{2!}(\hat{A}_{ij}-\lambda_i I)^2 + \cdots$$

Exemplo 13: A função exponencial de matriz e^{At} usando Série de Taylor

Pela Série de Taylor:

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n t^n}{n!} + \cdots$$

converge para todo λ finito.

Logo, pelo Teorema 9:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot A^k \cdot t^k$$

Exemplo 14: As funções de matriz $\text{sen}(At)$ e $\cos(At)$ usando Série de Taylor

Pela Série de Taylor:

$$\text{sen}(\lambda t) = \lambda t - \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \frac{\lambda^5 t^5}{5!} - \frac{\lambda^7 t^7}{7!} + \frac{\lambda^9 t^9}{9!} - \cdots$$

$$\cos(\lambda t) = 1 - \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^4 t^4}{4!} - \frac{\lambda^6 t^6}{6!} + \frac{\lambda^8 t^8}{8!} - \cdots$$

convergem para todo λ finito.

Logo, pelo Teorema 9:

$$\text{sen}(At) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)!} \cdot A^{(2k+1)} \cdot t^{(2k+1)}$$

$$\cos(At) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k)!} \cdot A^{2k} \cdot t^{2k}$$

Transformada de Laplace e a exponencial de matriz e^{At}

Teorema 10: Transformada de Laplace e Transformada de Laplace inversa envolvendo a Exponencial de matriz e^{At}

$$\begin{cases} \mathscr{L}(e^{At}) = (s \cdot I - A)^{-1} & \text{e} \quad (4.4) \\ e^{At} = \mathscr{L}^{-1}\{(s \cdot I - A)^{-1}\} & (4.5) \end{cases}$$

O resultado deste Teorema 10 acima claramente generaliza os resultados conhecidos de Transformada de Laplace para $a > 0$:

$$\begin{cases} \mathscr{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{(s-a)} = (s-a)^{-1} \\ e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-a)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\{(s \cdot I - a)^{-1}\} \end{cases}$$

Propriedades de e^{At}

i) $$e^{0} = I \qquad (4.6)$$

ii) $$e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As} \qquad (4.7)$$

iii) $$A e^{At} = e^{At} A = \frac{d}{dt} e^{At} \qquad (4.8)$$

iv) $$e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt} \iff AB = BA \qquad (4.9)$$

Novamente, estas propriedades acima claramente generalizam propriedades conhecidas da Transformada de Laplace para $a > 0$:

i) $$e^{0} = 1$$

ii) $$e^{a(t+s)} = e^{at} \cdot e^{as}$$

iii) $$\frac{d}{dt} e^{at} = a \cdot e^{at}$$

iv) $$e^{(a+b)t} = e^{at} \cdot e^{bt}$$

Exemplo 15: No **Exemplo 7** tínhamos a matriz A e calculamos e^{At}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = \begin{bmatrix} (2e^{t} - e^{2t}) & 0 & (2e^{t} - 2e^{2t}) \\ 0 & e^{t} & 0 \\ (e^{2t} - e^{t}) & 0 & (2e^{2t} - e^{t}) \end{bmatrix}$$

Se agora multiplicarmos estas duas matrizes A e e^{At} obtemos

$$A \cdot e^{At} = \begin{bmatrix} (-2e^{2t} + 2e^{t}) & 0 & (-4e^{2t} + 2e^{t}) \\ 0 & e^{t} & 0 \\ (-e^{t} + 2e^{2t}) & 0 & (4e^{2t} - e^{t}) \end{bmatrix}$$

que de facto corresponde à derivada de e^{At} conforme previsto pela propriedade **(iii)** acima.

$$\frac{de^{At}}{dt} = \begin{bmatrix} (2e^{t} - 2e^{2t}) & 0 & (2e^{t} - 4e^{2t}) \\ 0 & e^{t} & 0 \\ (2e^{2t} - e^{t}) & 0 & (4e^{2t} - e^{t}) \end{bmatrix}$$

Exemplificação do cálculo da
função exponencial de matriz e^{At}

Vamos ilustrar o cálculo da função exponencial de matriz e^{At} de 3 formas diferentes:

1º método:

Usando os valores no *espetro* de A (definição de *função de matriz*)

2º método:

Usando a Transformada Inversa de Laplace de $(sI - A)^{-1}$

3º método:

Usando série de potências (Série de Taylor)

Faremos isto através de exemplos, usando a mesma matriz A das 3 maneiras mencionadas acima, e obtendo sempre o mesmo resultado, claro.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 16: 1º método para o cálculo da função exponencial de matriz e^{At}

Usando os valores no *espetro* de A (definição *função de matriz*)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

polinómio característico de A

$$\Delta(s) = \det(s \cdot I - A) = (s-1)\cdot(s+2)$$

autovalores de A $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} f(\lambda) = e^{\lambda t} \\ q(\lambda) = \alpha_o + \alpha_1 \cdot \lambda \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\lambda_1) = e^{t} = \alpha_o + \alpha_1 = q(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) = e^{-2t} = \alpha_o - 2\cdot\alpha_1 = q(\lambda_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_o = (2/3)\cdot e^{t} + (1/3)\cdot e^{-2t} \\ \alpha_1 = (1/3)\cdot e^{t} - (1/3)\cdot e^{-2t} \end{cases}$$

Exemplo 16 (*continuação*):

$$\Rightarrow \quad \underbrace{e^{At}}_{f(A)} = \underbrace{\alpha_o \cdot I + \alpha_1 \cdot A}_{q(A)}$$

$$\Rightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ \frac{1}{3}(e^{t} - e^{-2t}) & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Observe que, se $t = 0$,

$$e^{A \cdot 0} = e^{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

propriedade (iii) de e^{At} vista em (4.8)

além disso:

$$A \cdot e^{At} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ \frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{de^{At}}{dt}$$

Exemplo 17: 2º método para o cálculo da função exponencial de matriz e^{At}

Usando a Transformada Inversa de Laplace de $(sI-A)^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Conforme vimos no Teorema 10, e^{At} pode ser expresso como (Transformada Inversa de Laplace):

$$e^{At} = \mathscr{L}^{-1}(s \cdot I - A)^{-1}$$

logo,

$$\Rightarrow \quad e^{At} = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} (s-1) & 0 \\ -1 & (s+2) \end{bmatrix}^{-1} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad e^{At} = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s-1)} & 0 \\ \dfrac{1}{(s-1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+2)} \end{bmatrix} \right\}$$

Exemplo 17 (*continuação*):

e portanto,

$$\Rightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ \frac{1}{3}(e^{t} - e^{-2t}) & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

que é o mesmo resultado obtido no exemplo anterior
(1º método, Exemplo 16)

Exemplo 18

3º método para o cálculo da função exponencial de matriz e^{At}

Usando série de potências (Série de Taylor)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Conforme vimos no Exemplo 13, e^{At} pode ser expresso na forma de série de potências (Série de Taylor) como:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \cdot t^k$$

logo,

$$e^{At} = \boxed{I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \ldots}$$

$$e^{At} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{I} + \overbrace{\begin{bmatrix} t & 0 \\ t & -2t \end{bmatrix}}^{At} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & 0 \\ \frac{-t^2}{2} & \frac{4t^2}{2} \end{bmatrix}}^{A^2t^2/2!} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{t^3}{3!} & 0 \\ \frac{3t^2}{3!} & \frac{-8t^2}{3!} \end{bmatrix}}^{A^3t^3/3!} + \ldots$$

Função de matriz

Exemplo 18 *(continuação)*:

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\dots\right)}^{e^{t}} & 0 \\ \frac{1}{3}\underbrace{\left(t-\frac{t^2}{2!}+\frac{3t^3}{3!}+\dots\right)} & \underbrace{\left(1-2t+\frac{4t^2}{2!}-\frac{8t^3}{3!}+\dots\right)}_{e^{-2t}} \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{\left(t-\frac{t^2}{2!}+\frac{3t^3}{3!}+\dots\right)} = \overbrace{(1-1)}^{0} + \overbrace{(t+2t)}^{3t} + \overbrace{\left(\frac{t^2}{2}-\frac{4t^2}{2}\right)}^{-3t^2/2} + \overbrace{\left(\frac{t^3}{3!}+\frac{8t^3}{3!}\right)}^{9t^3/3!} + \dots$$

Exemplo 18 (*continuação*):

$$= \frac{1}{3}\underbrace{\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots\right)}_{e^{t}} - \frac{1}{3}\underbrace{\left(1 - 2t + \frac{4t^2}{2!} - \frac{8t^3}{3!} + \ldots\right)}_{e^{-2t}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{t} - e^{-2t}\right)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ \frac{1}{3}\left(e^{t} - e^{-2t}\right) & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 18 (*continuação*):

Portanto,

$$e^{At} = \boxed{\begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ \frac{1}{3}(e^{t} - e^{-2t}) & e^{-2t} \end{bmatrix}}$$

que é o mesmo resultado obtido nos dois exemplos anteriores (1º e 2º método, Exemplos 16 e 17)

Já vimos no Exemplo 16 que, para $t = 0$, $e^{At} = e^{0} = \mathrm{I}$ (matriz identidade) e, além disso, que:

$$A \cdot e^{At} = \frac{de^{At}}{dt}$$

propriedade (iii) de e^{At} vista em (4.8)

FACULDADE ENGENHARIA

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt