

# Controlo Avançado

3

“Diagonalização”

J. A. M. Felippe de Souza

# Diagonalização

Um operador  $A: V \rightarrow V$  pode ser não diagonalizável por duas razões:

- i) deficiência do corpo  $K$ ;  
'autovalores' complexos e corpo  $K = \mathbb{R}$  = os números reais
- ii) deficiência do operador  $A$ ;  
'autovalores' múltiplos sem autovetores em número suficiente

Considerando-se o corpo  $K = \mathbb{C}$  [os números complexos], evita-se o tipo de deficiência (i) acima.

Se  $K = \mathbb{C}$  = os números complexos, e a  $\dim(V) = n$ ,  
então  $A: V \rightarrow V$  possuirá  $n$  autovalores, podendo alguns serem repetidos, isto é, múltiplos.

Para o tipo de deficiência (ii) acima veremos a seguir 3 casos (Casos 1, 2 e 3)

Caso 1 –  $A$  possui  $n$  autovalores distintos

$\sigma(A) = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$  formam uma base de  $V$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é a representação de  $A$  nesta base e

$$\hat{A} = M^{-1} A M$$

onde:

$$M = [ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \dots \mid \mathbf{v}_n ]$$

é uma matriz de *autovetores*.

Exemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

polinómio característico de  $A$ :

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = \lambda^2 + 1$$

$$\Rightarrow \text{Autovalores de } A \begin{cases} \lambda_1 = j, \\ \lambda_2 = -j \end{cases}$$

*autovetores associados*

$$A \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - j \end{bmatrix}$$

$$A \mathbf{v} = \lambda_2 \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + j \end{bmatrix}$$

## Exemplo 1: (continuação)

logo,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

é a representação de  $A$  na base  $\{ v_1 \mid v_2 \}$ ,

e 
$$\hat{A} = M^{-1} A M$$

onde  $M = [ v_1 \mid v_2 ]$ .

$$M = \begin{bmatrix} \overbrace{1}^{v_1} & \overbrace{1}^{v_2} \\ \underbrace{1-j} & \underbrace{1+j} \end{bmatrix}$$

## Exemplo 1: (continuação)

Escolhendo-se agora

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

que é a representação de  $A$  na base  $\{ \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_1 \}$ ,

e  $M = [ \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_1 ]$ , ou seja:

$$M = \begin{bmatrix} \overbrace{1}^{\mathbf{v}_2} & \overbrace{1}^{\mathbf{v}_1} \\ 1+j & 1-j \end{bmatrix}$$

então, novamente:

$$\hat{A} = M^{-1} A M$$

Vimos neste exemplo que a matriz  $A$  possui duas diagonalizações  $\hat{A}$  possíveis.

Exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

polinómio característico de  $A$ :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det(\lambda \cdot I - A) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Autovalores de } A \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

autovetores associados:

$$A \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \mathbf{v} = \lambda_2 \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 2: (continuação)

logo,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

é a representação de  $A$  na base  $\{ v_1 \mid v_2 \}$ ,

e 
$$\hat{A} = M^{-1} A M$$

onde  $M = [ v_1 \mid v_2 ]$ , ou seja:

$$M = \begin{bmatrix} \overbrace{1}^{v_1} & \overbrace{1}^{v_2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



## Exemplo 2: (continuação)

Escolhendo-se agora

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que é a representação de  $A$  na base  $\{ v_2 \mid v_1 \}$ ,

e  $M = [ v_2 \mid v_1 ]$ , ou seja:

$$M = \begin{bmatrix} \overbrace{1}^{v_2} & \overbrace{1}^{v_1} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

então, novamente:

$$\hat{A} = M^{-1} A M$$

Novamente, neste exemplo a matriz  $A$  possui duas diagonalizações  $\hat{A}$  possíveis.

## Caso 2 –

$A$  possui *autovalores múltiplos com autovetores associados* suficientes.

Este é o caso que para cada *autovalor*  $\lambda$  de multiplicidade  $n_\lambda$  podemos encontrar  $n_\lambda$  *autovetores associados L.I.*

Mostra-se que a *condição* para que isto ocorra é:

$$\rho(A - \lambda I) = n - n_\lambda \quad (3.1)$$

*condição do rank para autovetores associados L.I.*

## Caso 2 (continuação)

$A$  possui *autovalores múltiplos com autovetores associados* suficientes.

Neste caso é possível formar uma base de  $V$ ,

$$\beta = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \},$$

com *autovetores* de  $A$ .

$\hat{A}$  = *matriz diagonal* onde cada autovalor  $\lambda$  aparece  $n_\lambda$  vezes

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$\hat{A}$  é a representação de  $A$  na base  $\beta$

$$\text{Se } M = [ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \dots \mid \mathbf{v}_n ] \text{ então } \Rightarrow \hat{A} = M^{-1} A M$$

## Exemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

polinómio característico de  $A$ :

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

$$\Rightarrow \text{Autovalores de } A \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = 2 \end{array} \right.$$

$$A \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que  
 $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \}$  são L.I.

Isto foi possível porque:

$$\left. \begin{array}{l} \rho(A - \lambda_1 I) = 1, \quad \text{e} \\ n - n_\lambda = 1 \end{array} \right\}$$

$A$  satisfaz a condição (3.1) do rank para autovetores associados L.I.

# Diagonalização

## Exemplo 3: (continuação)

Calculando-se o terceiro autovetor,  $\mathbf{v}_3$ ,

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda_3 \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é a representação de  $\mathbf{A}$  na base  $\beta = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ ,

e neste caso:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}$$

onde  $\mathbf{M} = [ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 ] =$

$$\begin{array}{c} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{v}_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{v}_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{v}_3} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

## Exemplo 3: (continuação)

Haveria outras diagonalizações  $\hat{A}$  possíveis para a matriz  $A$  deste exemplo (não apenas duas como nos Exemplo 1 e 2).

Por exemplo:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a representação de  $A$  na base  $\beta = \{ v_1, v_3, v_2 \}$ ,

e neste caso:

$$\hat{A} = M^{-1} A M$$

onde  $M = [ v_1 \mid v_3 \mid v_2 ] =$

$$\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{v_1} & \underbrace{-1}_{v_3} & \underbrace{0}_{v_2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Caso 3** –  $A$  possui *autovalores* múltiplos sem *autovetores* associados suficientes.

Este é o caso de  $A$  possuir um (ou mais) *autovalor(es)*  $\lambda$  com multiplicidade  $n_\lambda$  com apenas  $r$  *autovetores* L.I. associados ( $r < n_\lambda$ ).

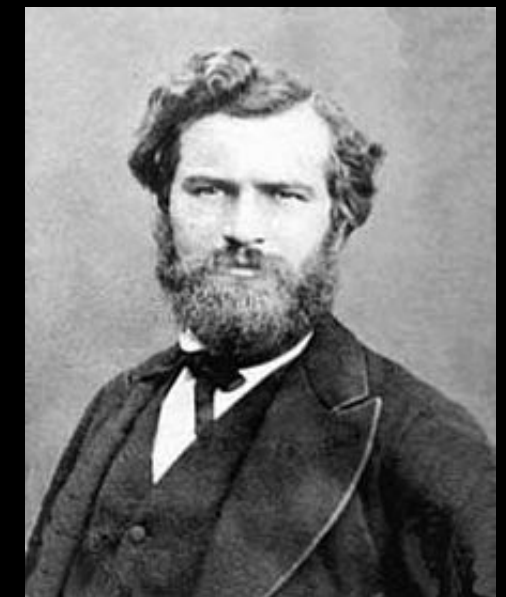
ou seja,

$A$  não satisfaz a condição (3.1) do rank para os *autovetores* associados L.I.

na verdade, nestes casos que a eq. (3.1) *falha*, o que ocorre é ' $>$ ' em vez de '=':

$$\rho(A - \lambda I) > n - n_\lambda \quad (3.2)$$

Neste caso veremos que  $A$  não pode ser *diagonalizado*, mas pode ser posto na *forma canónica de Jordan*.



Camille Jordan,  
1838-1922

# Diagonalização

Exemplo 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

polinómio característico de  $A$ :

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

autovalores de  $A$ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

$$\rho(A - \lambda_1 \cdot I) = 2 \neq (n - n_\lambda)$$



$A$  não satisfaz a condição (3.1) do rank para autovetores associados L.I.

→  $\dim \ker(A - \lambda_1 \cdot I) = 1$

→ somente um autovetor L.I. associado a  $\lambda_1$

este autovetor pode ser, por exemplo  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para  $\lambda_3$  é fácil calcular o autovetor associado

$$v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Voltaremos a este Exemplo 4 mais adiante.



# Diagonalização

## Caso 3: (continuação)

Nos casos em que a matriz  $A$  não é diagonalizável, a *forma canónica de Jordan*  $\hat{A}$  é muito próxima da *forma diagonal*. Nos casos em que a matriz  $A$  é diagonalizável, a *forma canónica de Jordan*  $\hat{A}$  é a própria *forma diagonal*.

Um *bloco de Jordan* é uma matriz cujos seus elementos são zeros exceto na sua *diagonal principal*, que é toda igual a  $\lambda$  e na *diagonal superior* que é toda igual a 1.

Veremos mais adiante que:

$A_{ij}$  = *bloco* da  $j$ ésima *cadeia* do autovalor  $\lambda_i$

$$\hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

A matriz  $\hat{A}$ , a *forma canónica de Jordan* de  $A$  é composta destes *blocos de Jordan*

Resumindo:

**Caso 1** –  $A$  possui  $n$  autovalores distintos.

$\Rightarrow \hat{A} =$  matriz diagonal

**Caso 2** –  $A$  possui autovalores múltiplos com autovetores associados suficientes.

$\Rightarrow \hat{A} =$  matriz diagonal

**Caso 3** –  $A$  possui autovalores múltiplos sem autovetores associados suficientes.

$\Rightarrow \hat{A} =$  Forma Canónica de Jordan

## Forma Canónica de Jordan

Prof. Felippo de Souza

# Diagonalização

**Definição** —  $\mathbf{v}$  é *autovetor generalizado* de ordem  $k$  associado a  $\lambda$  se

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})^k \mathbf{v} = 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{v} \neq 0 \quad (3.3)$$

Nota: Se  $k = 1$ ,  $\mathbf{v}$  é simplesmente um *autovetor associado* a  $\lambda$

Se  $\mathbf{v}$  é um *autovetor generalizado* de ordem  $k$ , então podemos definir uma *cadeia* de *autovetores generalizados*

$$\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \}$$

onde cada  $\mathbf{v}_i$  tem ordem  $i$

$$\mathbf{v}_i = (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})^{k-i} \mathbf{v}$$

ou seja,

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}_{k-1} = (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{v}_{k-2} = (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})^2 \mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \mathbf{v}_{k-1}$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \mathbf{v}_2$$

(3.4)

Nota:  $\mathbf{v}_1$  é um ‘*autovetor simples*’ associado a  $\lambda$ , isto é, um *autovetor* que *não é múltiplo*.

**Teorema 1** – Uma **cadeia** de *autovetores generalizados*, conforme definido na eq. (3.4), é **L.I.**

**Teorema 2** – *Autovetores generalizados* associados a *autovalores* diferentes são **L.I.**

**Teorema 3** – *Autovalores*  $\lambda$  de multiplicidade  $n_\lambda$  tem um total de  $n_\lambda$  *autovetores generalizados* **L.I.**, incluindo os *autovetores* simples.

**Corolário:** Sempre é possível obter uma base  $V$  com *autovetores generalizados*.

O número de **cadeias** de *autovetores generalizados* **L.I.** associados a um *autovalor*  $\lambda$  de  $A$  é dado por

$$n_{\text{cad}} = n - \rho(A - \lambda I) \quad (3.5)$$

## Exemplo 4: (continuação)

É fácil verificar que

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{é um autovetor generalizado de ordem 2 associado a } \lambda_1 = 1, \text{ uma vez que satisfaz a condição (3.3)}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \cdot \mathbf{I})^2 \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\mathbf{A} - \lambda_1 \cdot \mathbf{I}) \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

**Obs 1:** Outra escolha possível de *autovetor generalizado* de ordem 2 associado ao autovalor  $\lambda_1 = 1$  é  $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 0]^T$ .

**Obs 2:** Não é possível escolher  $\mathbf{v} = [1 \ 0 \ 0]^T$  para *autovetor generalizado* pois embora satisfaça a primeira condição de (3.3):  $(\mathbf{A} - \lambda_1 \cdot \mathbf{I})^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , este  $\mathbf{v}$  não satisfaz a segunda condição de (3.3):  $(\mathbf{A} - \lambda_1 \cdot \mathbf{I}) \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ .

Agora, usando (3.4), define-se  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - \lambda_1 \cdot \mathbf{I}) \mathbf{v}$ , então  $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \}$  é uma *cadeia* de *autovetores generalizados* L.I.

Além disso,  $\beta = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$  é uma base de  $\mathbf{V}$

## Exemplo 4: (continuação)

onde  $\mathbf{v}_3$  é o *autovetor associado* a  $\lambda_3 = 2$  já foi calculado no início deste **Exemplo 4**

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As representações de

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_2 \quad \text{e} \quad A\mathbf{v}_3 = \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3$$

em relação a esta base  $\beta$  são

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 4: (continuação)

e portanto,

$$\hat{A} = \left[ \begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \right]$$

é a representação de  $A$  na base  $\beta$

isto é, como  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_3 = 2$

$$\hat{A} = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Pode-se também verificar que:

$$\hat{A} = M^{-1} A M$$

onde  $M = [v_1 | v_2 | v_3] =$  matriz mudança de base.

(ainda voltaremos mais uma vez a este Exemplo 4 para utilizar o algoritmo para *forma canónica de Jordan*)



# Diagonalização

Observe que  $\hat{A}$  encontrado neste exemplo está na *forma canônica de Jordan*, cujo formato geral é algo assim:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & \lambda_1 & 1 & & \\ & & 0 & \lambda_1 & & \\ & & & & \lambda_1 & \\ \hline & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & & & & & & 0 \\ & \hat{A}_{12} & & & & & \\ & & \hat{A}_{13} & & & & \\ & & & \hat{A}_{21} & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Exemplo 5:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \\ y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Reescrever o sistema com a matriz  $\mathbf{A}$  na *forma canónica de Jordan*,  $\hat{\mathbf{A}}$

## Exemplo 5: (continuação)

polinómio característico de  $A$ :

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = (\lambda - 2)^3 \lambda$$

autovalores de  $A$   $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2, \text{ com multiplicidade } 3 \text{ (} n_1 = 3 \text{)} \\ \lambda_2 = 0, \text{ com multiplicidade } 1 \text{ (} n_2 = 1 \text{)} \end{array} \right.$

$$\rho(\lambda_1 \cdot I - A) = \rho \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > n - n_1 = 1$$

$\begin{matrix} 4 & 3 \\ \downarrow & \downarrow \\ n - n_1 & = 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow$  caso 3

A seguir vamos calcular a *função de transferência*  $Y(s)/U(s)$  do sistema.

# Diagonalização

## Exemplo 5: (continuação)

$$(s \cdot I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} (s-3) & 1 & -1 & 0 \\ -1 & (s-1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2) & 0 \\ -3 & -2 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(s-1)}{(s-2)^2} & \frac{-1}{(s-2)^2} & \frac{s}{(s-2)^3} & 0 \\ \frac{1}{(s-2)^2} & \frac{(s-3)}{(s-2)^2} & \frac{-(s-4)}{(s-2)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-2)} & 0 \\ \frac{(3s-1)}{(s-2)^2 s} & \frac{(2s-9)}{(s-2)^2 s} & \frac{(s^2-3s+12)}{(s-2)^3 s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

## Exemplo 5: (continuação)

Logo a *função de transferência*  $Y(s)/U(s)$  do sistema é

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = c(sI - A)^{-1}b = \frac{(2s^2 - 3s + 12)}{(s - 2)^3 s} =$$

$$= \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{(s - 2)^3} + \frac{\gamma}{(s - 2)^2} + \frac{\delta}{(s - 2)}$$

$$= \frac{-1,5}{s} + \frac{7}{(s - 2)^3} + \frac{-1}{(s - 2)^2} + \frac{1,5}{(s - 2)}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -1,5 \\ \beta = 7 \\ \gamma = -1 \\ \delta = 1,5 \end{array} \right.$$

e agora, definindo novas *variáveis de estado*  $X_1(s)$ ,  $X_2(s)$ ,  $X_3(s)$  e  $X_4(s)$  da seguinte forma (extraídas/baseadas nas frações acima):

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{s}$$

$$X_2(s) = \frac{U(s)}{(s - 2)^3}$$

$$X_3(s) = \frac{U(s)}{(s - 2)^2}$$

$$X_4(s) = \frac{U(s)}{(s - 2)}$$

## Exemplo 5: (continuação)

e podemos então escrever

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{U(s)}{s} \\ X_2(s) = \frac{U(s)}{(s-2)^3} \\ X_3(s) = \frac{U(s)}{(s-2)^2} \\ X_4(s) = \frac{U(s)}{(s-2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX_1(s) = U(s) \\ (s-2)X_2(s) = X_3(s) \\ (s-2)X_3(s) = X_4(s) \\ (s-2)X_4(s) = U(s) \end{cases}$$

e logo obtemos

# Diagonalização

Exemplo 5: (continuação)

$$\begin{cases} s X_1(s) = & + U(s) \\ s X_2(s) = + 2 X_2(s) + X_3(s) \\ s X_3(s) = & + 2 X_3(s) + X_4(s) \\ s X_4(s) = & + 2 X_4(s) + U(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^{\hat{A}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\hat{b}} u \\ y = \underbrace{[-1,5 \quad 7 \quad -1 \quad 1,5]}_{\hat{C}} x \end{matrix} \end{cases}$$

Note que:

$\hat{A}$  está na *forma canônica de Jordan*

## Exemplo 5: (continuação)

ou seja,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Este exemplo mostra que através de uma escolha apropriada da *variável de estado* podemos desenvolver a *equação de estado* de forma a obtê-las na *forma canônica de Jordan*.



## Exemplo 5: (continuação)

Alternativamente, escolhendo-se a *variável de estado* com as suas componentes definidas numa ordem diferente, vamos obter, por exemplo:

Se escolhermos a *variável de estado*:

$$\mathbf{x} = [x_2, x_3, x_4, x_1]$$

então obtemos:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Este  $\hat{\mathbf{A}}$  também está na *forma canónica de Jordan*.

Algoritmo para calcular  $\hat{A}$ ,  
a forma canónica de Jordan de  $A$

## Diagonalização

Procedimento para o cálculo de  $\hat{A}$ , a *forma canónica de Jordan*, para  $A: V \rightarrow V$

1. Achar todos os *autovalores*  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  e suas multiplicidades  $n_1, n_2, \dots, n_m$
2. Calcular  $n_1$ , *autovetor generalizado L.I. associado a  $\lambda_1$*

Nota: O número de *cadeias* de *autovetores generalizados L.I. associados a  $\lambda_1$*  é dado por eq. (3.5), ou seja,

$$n_{\text{cad}} = n - \rho(A - \lambda_1 I)$$

2a). Para achar a 1ª *cadeia* por exemplo, calcule  $(A - \lambda_1 I)^i$  para  $i = 1, 2, \dots$ , até  $\rho(A - \lambda_1 I)^k = \rho(A - \lambda_1 I)^{k+1}$ .

$k$  = número de *autovetores generalizados* na maior *cadeia*.

Ache um *autovetor generalizado*  $v$  de ordem  $k$ .

A *cadeia* terá  $k$  *autovetores generalizados* associados a  $\lambda_1$ , ou seja,

$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  definidos por (3.4) com  $\lambda = \lambda_1$ .

2b). Se  $k = n_1$  siga para o passo 3.

Nota: Isso ocorrerá quando  $n_{\text{cad}} = 1$ .

2c). Se  $k < n_1$  segue-se calculando a 2ª, 3ª, ..., até  $n_{\text{cad}}$  **cadeias** de *autovetores generalizados* L.I. associados a  $\lambda_1$ .

Cada uma dessas **cadeias** terá

um número de *autovetores generalizados*  $\leq k$ .

Por exemplo: para achar a 2ª **cadeia**, tenta-se calcular um *autovetor generalizado* de ordem  $k$  L.I. com a 1ª **cadeia**.

Se não for possível, tenta-se um de ordem  $(k-1)$ , e assim por diante.

Uma vez achado este *autovetor generalizado* gera-se a 2ª **cadeia** de forma semelhante à acima.

3. Repita o passo 2 para os *autovalores*  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ .

Dessa forma obter-se-á um total de  $n$  *autovetores generalizados* L.I.

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  onde  $n_1$  deles são *autovetores associados* a  $\lambda_1$ ,  
 $n_2$  deles são *associados* a  $\lambda_2$ , etc.

Defina  $\beta =$  conjunto desses  $n$  *autovetores generalizados*

$$\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \text{base de } V$$

$M =$  matriz formada por estes  $n$  *autovetores generalizados*

$$M = [v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n] \quad (3.7)$$

# Diagonalização

4.  $\hat{A}$  terá *blocos* na *diagonal* e zeros no resto.

Cada *cadeia* de *autovetores generalizados* gera um *bloco* de ordem *igual* ao número de *autovetores generalizados* na *cadeia*.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \hat{A}_{ij} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

onde

$\hat{A}_{ij}$  = *bloco* da *j*ésima *cadeia* do *autovalor*  $\lambda_i$

$$\hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

## Observações sobre a ‘*forma canónica de Jordan*’:

- A *forma canónica de Jordan* é única, a menos de uma possível troca de *blocos*;
- $\hat{A}$  é a representação de  $A$  na base  $\beta$ ;
- $M$  é a *matriz mudança de base*; e
- $\hat{A}$  satisfaz  $\hat{A} = M^{-1} A M$

## Exemplo 4: (continuação)

Voltamos a este exemplo para refazê-lo utilizando agora o algoritmo para calcular a *forma canónica de Jordan*

Polinómio característico de  $A$ :

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

autovalores de  $A$ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

- Usando eq. (3.1), o número de *cadeias* de *autovetores generalizados L.I. associados* a  $\lambda_1 = 1$  é  $n_{\text{cad}} = n - \rho(A - \lambda_1 I) = 1 \Rightarrow$  apenas 1 *cadeia* (como seria de esperar)

$$\rho(A - 1 \cdot I) = 2, \quad \rho(A - 1 \cdot I)^2 = 1, \quad \rho(A - 1 \cdot I)^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

- Logo, esta primeira e única *cadeia* de *autovetores generalizados L.I. associados* a  $\lambda_1 = 1$  terá 2 *autovetores generalizados* (como seria de se esperar).

- É fácil de verificar que  $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 0]^T$  é um *autovetor generalizado* de ordem 2. Define-se então  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ .

- Calcula-se agora, usando (3.4)  $\Rightarrow \mathbf{v}_1 = (A - 1 \cdot I) \mathbf{v}_2 = [1 \ 0 \ 0]^T$  que é simplesmente um *autovetor associado* a  $\lambda = 1$ .

# Diagonalização

## Exemplo 4: (continuação)

- Portanto,  $\{ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \}$  é a 1ª e única **cadeia** de *autovetores generalizados* L.I. associados a  $\lambda_1 = 1$ .
- Neste ponto verifica-se que como  $\mathbf{k} = \mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_{\text{cad}} = 1$  não há mais *autovetores generalizados* associados a  $\lambda_1 = 1$  para se calcular e não há mais **cadeias** para se achar.
- Agora, facilmente achamos que  $\mathbf{v}_3 = [5 \ 3 \ 1]^T$  é um *autovetor* associado a  $\lambda_3 = 2$ .

Logo,

$$\mathbf{M} = [ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtendo-se

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



## Exemplo 4: (continuação)

Se entretanto tivéssemos escolhido

$$M = [ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 ] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obteríamos  $\hat{A}$  com os blocos trocados

$$\hat{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 6:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

polinómio característico de  $A$ :  $\Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^5 \lambda$

$$\text{autovalores de } A \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2, \text{ com multiplicidade } 5 \text{ (} n_1 = 5 \text{)} \\ \lambda_2 = 0, \text{ com multiplicidade } 1 \text{ (} n_2 = 1 \text{)} \end{array} \right.$$

- Observe que, pela eq. (3.5),  $n_{\text{cad}} = n - \rho(A - 2 \cdot I) = 6 - 4 = 2$  cadeias de *autovetores generalizados* associados a  $\lambda_1 = 2$ .

## Exemplo 6: (continuação)

- Agora calcula-se

$$\rho(A - 2 \cdot I) = 4, \quad \rho(A - 2 \cdot I)^2 = 2, \quad \rho(A - 2 \cdot I)^3 = 1, \quad \rho(A - 2 \cdot I)^4 = 1$$

$\Rightarrow k = 3 \Rightarrow$  temos uma **cadeia** com 3 *autovetores generalizados* associados a  $\lambda_1 = 2$ .

- A primeira **cadeia** de *autovetores generalizados* L.I. associados a  $\lambda_1 = 2$  terá 3 *autovetores generalizados*.
- É fácil de verificar que  $\mathbf{v} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  é um *autovetor generalizado* de ordem 3.
- Define-se  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$ , e usando (3.4)

$$\mathbf{v}_2 = (A - 2 \cdot I)\mathbf{v} = [1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \text{e}$$

$$\mathbf{v}_1 = (A - 2 \cdot I)^2\mathbf{v} = [2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Portanto,  $\{ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 \}$  é a 1ª **cadeia**.

## Exemplo 6: (continuação)

- Neste ponto verifica-se que  $k = 3 < 5 = n_1$ . Portanto, de facto haverá uma outra *cadeia* de *autovetores generalizados associados* a  $\lambda_1 = 2$ .
- Portanto, a 2ª e última *cadeia* de *autovetores generalizados associados* a  $\lambda_1 = 2$  terá 2 *autovetores generalizados L.I.* totalizando 5 *autovetores generalizados associados* a  $\lambda_1 = 2$ .
- Sendo assim, é necessário achar um *autovetor generalizado, L.I.* com os anteriores, de ordem 2.
- É fácil de verificar que  $\mathbf{v}' = [0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1]^T$  é tal *autovetor generalizado*.
- Logo, define-se  $\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}'$ , e

$$\mathbf{v}_4 = (\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{I}) \mathbf{v}' = [0 \ 0 \ 2 \ -2 \ 0 \ 0]^T .$$

Portanto,  $\{ \mathbf{v}_4 \mid \mathbf{v}_5 \}$  é a 2ª *cadeia*.

## Exemplo 6: (continuação)

- Para o *autovalor*  $\lambda_2 = 0$ , qualquer elemento  $\neq 0$  do núcleo de  $A$  será um *autovetor* de  $\lambda_2$ . Por exemplo,  $\mathbf{w} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1]^T$ .
- Logo, agora define-se  $\mathbf{v}_6 = \mathbf{w}$ . Portanto,  $\{ \mathbf{v}_6 \}$  é a 1ª e única *cadeia* de *autovetores* de  $\lambda_2 = 0$ .

Observe que

$$\beta = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6 \}$$

é uma *base* de  $V$ ,

$$M = [ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{v}_4 \mid \mathbf{v}_5 \mid \mathbf{v}_6 ]$$

é a matriz mudança de base e  $\hat{A}$  é a representação de  $A$  na base  $\beta$

## Exemplo 6: (continuação)

Ou seja, a *forma canónica de Jordan* para  $A$  é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 2 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

onde,

$$\hat{A} = M^{-1}AM$$



FACULDADE  
ENGENHARIA

Departamento de  
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!

Felippe de Souza

[felippe@ubi.pt](mailto:felippe@ubi.pt)