Controlo Avançado

2
“Álgebra Linear”
(revisão/sinopse)

J. A. M. Felippe de Souza

Neste capítulo vamos apenas citar os principais 'tópicos' de 'Álgebra Linear' que são necessários serem revistos para o acompanhamento desta disciplina.

Espaços Vetoriais e Transformações Lineares

Tópicos básicos:

- corpo $\mathbb{K}$ (neste curso somente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
- espaço vetorial (ou espaço linear) V sobre um corpo $\mathbb{K}$
- subespaços (de um espaço vetorial, ou espaço linear)
- combinação linear
- dependência e independência linear (L.D. e L.I.)
- transformações, operadores e funcionais lineares
- polinómios característico (de matrizes ou de operadores)
- autovalores e autovetores (de matrizes ou de operadores)
- determinantes

- corpo $\mathbb{K}$ ('*field*' ou '*scalar field*')
  - um corpo $\mathbb{K}$ possui as operações soma ('+') e multiplicação ('·')
    - ✓ na soma se k_1 e $k_2 \in \mathbb{K}$, então $(k_1 + k_2) \in \mathbb{K}$ e
    - ✓ na multiplicação se k_1 e $k_2 \in \mathbb{K}$, então $(k_1 \cdot k_2) \in \mathbb{K}$
  - os elementos de um corpo $\mathbb{K}$ são chamados de escalares ('*scalars*')
  - se $k \in \mathbb{K}$, e $k \neq 0$, então $\exists k^{-1} \in \mathbb{K} : k^{-1}$ = *inverso* de k, i.e., $k \cdot k^{-1} = 1$
  - se $k \in \mathbb{K}$, $\exists k' \in \mathbb{K} : k'$ = *simétrico* de k, i.e., $k = -k'$ ou $k + k' = 0$
  - o menor corpo que existe é o conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{\ 0\ ,\ 1\ \}$, em que $1+1=0$
  - outros exemplos de corpo são $\mathbb{Q}$ (racionais), $\mathbb{R}$ (reais) e $\mathbb{C}$ (complexos)
  - as frações do tipo (k_1/k_2), $k_2 \neq 0$, é outro exemplo de corpo
  - neste curso o corpo $\mathbb{K}$ será apenas $\mathbb{R}$ (reais) ou $\mathbb{C}$ (complexos)

- espaços vetoriais $\mathbb{V}$ (vector space) sobre um corpo $\mathbb{K}$
  - um espaço vetorial às vezes também é chamado de espaço linear $\mathbb{V}$
  - um espaço vetorial $\mathbb{V}$ possui as operações 'soma' ('+') e 'multiplicação por escalar' ('·')
    - ✓ na soma se x e $y \in \mathbb{V}$, então $(x+y) \in \mathbb{V}$ e
    - ✓ na multiplicação por escalar se $k \in \mathbb{K}$ e $x \in \mathbb{V}$, então $(k \cdot x) \in \mathbb{V}$
  - exemplos de espaço vetorial $\mathbb{V}$ são:

$\mathbb{R}$ (reais), $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ (complexos), $\mathbb{C}^n$

  - as matrizes quadradas nxn também são exemplos de espaços vetoriais $\mathbb{V}$
  - os polinómios de grau n também são um exemplo de espaço vetorial $\mathbb{V}$
  - as operações soma ('+') e multiplicação por escalar ('·') satisfazem as propriedades de 'associatividade' e de 'comutatividade':
    - $(x+y)+z = x+(y+z)$; $k_1 \cdot (k_2 \cdot x) = (k_1 \cdot k_2) \cdot x$; $(x+y) = (y+x)$; e
    - $(k_1+k_2) \cdot x = k_1 \cdot x + k_2 . x$, para $x, y, z \in \mathbb{V}$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$

Outros tópicos:

- dependência linear (L.D.) e independência linear (L.I.)
- dimensão de um espaço vetorial (ou espaço linear) V [dim (V)]
  Nota: pode haver espaços de dimensão infinita (e.g., '*espaços de funções*')
- base β de um espaço vetorial (ou espaço linear)

Teorema 1

Seja V um espaço vetorial (ou espaço linear) de dimensão n, então:

i) Qualquer conjunto L.I. com n elementos de V é uma base de V.

ii) Qualquer conjunto com mais de n elementos de V é L.D.

iii) Todas as bases de V têm n elementos.

- coordenadas de um vetor $v \in V$ em relação à uma base β:

  $[v]_\beta$ = vetor cuja as componentes são as coordenadas de v na base de β

Teorema 2

Seja V um espaço vetorial, $\dim(V) = n$, β e β' duas bases de V e $v \in V$, então:

$$[v]_\beta = M \cdot [v]_{\beta'}$$

onde M = matriz mudança de base, formada da seguinte maneira:

as colunas de M são os vetores da base β' na base β.

- Transformação linear $T : V \to V'$ propriedades:

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 \quad \text{e} \quad T(kv) = k \cdot Tv$$

Uma transformação linear T e uma matriz T que a representa são tratadas de igual forma.

- Domínio, Contradomínio, Imagem e Núcleo de T: $V \to V'$
  - Domínio de $T = \mathcal{D}(T) = V$;
  - Contradomínio de $T = V'$;
  - Imagem de $T = Im(T) = \{v' \in V : \text{existe } v \in V, Tv = v'\}$;
  - Núcleo de T (ou kernel de T) $= \mathcal{N}(T) = \ker(T) = \{v \in V : Tv = 0\}$.

Teorema 3

O núcleo e a imagem de uma transformação linear são espaços vetoriais.

- rank de T (‘característica’ ou ‘posto’ de T):

$$\text{rank}(T) = \rho(T) = \dim(Im(T));$$

- nullity de $T = \dim(\mathcal{N}(T))$.

Teorema 4

Seja $T: V \rightarrow V'$ uma transformação linear,

$\dim(V) = n$, $\dim(V') = n'$,

$\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\beta' = \{v_1', v_2', \ldots, v_{n'}'\}$, então:

i) T é univocamente determinada pelos n vetores $y_i = T\, v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

ii) T pode ser univocamente determinada em relação às bases β e β' pela matriz n' x n $[T]^{\beta'}{}_{\beta}$ cujas colunas são $[y_i]_{\beta'}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 5

$\rho(T) = \text{rank}(T) =$

$=$ nº máximo de vetores linha (ou vetores coluna) L.I. de $[T]^{\beta'}{}_{\beta}$,

quaisquer que sejam as bases β and β' escolhidas.

- uma transformação linear $T: V \rightarrow V$ tem 'rank máximo' ('*full rank*') se $\text{rank}(T) =$ o máximo possível para a matriz que representa T

  $=$ o menor destes 2 números: nº linhas ou nº colunas de T.

Definição

- funcional linear $f: V \to \mathbb{K}$, i.e., quando $V' = \mathbb{K}$
- operador linear $T: V \to V$, i.e., quando $V' = V$

funcionais lineares f são representados por matrizes linhas f.

Teorema 6

$T : V \to V$, operador linear, então

$$[T]^{\beta'}{}_{\beta} = M^{-1} \cdot [T]^{\beta}{}_{\beta} \cdot M$$

onde M é a matriz de mudança de base, de β para β' (definida acima).

operadores lineares T são representados por matrizes quadradas T.

- operador identidade: $I: V \to V$, $I\,v = v$
- operadores inversíveis: $T: V \to V$, é inversível se existe $T^{-1}: V \to V$ (transformação inversa) tal que $T \cdot T^{-1} = I = T^{-1} \cdot T$

Transformações similares:

$T: V \to V$ é similar a $S: V \to V$

se existe $M: V \to V$ inversível tal que $S = M^{-1} \cdot T \cdot M$

Teorema 7

As matrizes que representam um operador linear em bases diferentes são similares.

Teorema 8

$$[TP]^{\beta'}{}_{\beta} = [T]^{\beta}{}_{\beta} \cdot [P]^{\beta''}{}_{\beta}$$

Teorema 9

Seja $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear, então:

$$\dim(V) = \operatorname{rank}(T) + \dim(\ker(T))$$

- injeção: T é injetora se $T\,v_1 = T\,v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$
- sobrejeção: $T: V \rightarrow V'$ é sobrejetora se qualquer $v' \in V'$, existe $v \in V$ tal que $T\,v = v'$
- bijeção: T é bijetora se T é injetora e sobrejetora.

Teorema 10

T é injetora se e somente se $\ker(T) = \{0\}$

- determinante de uma matriz T: $\det(T)$

Teorema 11

$\det(TP) = \det(T) \cdot \det(P)$;

$\det(I) = 1$;

Se T é inversível, $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$;

Se T não é inversível, $\det(T) = 0$;

Se T tem rank máximo, $\det(T) \neq 0$;

Se T e S são similares, $\det(T) = \det(S)$.

- *polinómio característico* $\Delta(\lambda)$ de um operador T (ou de uma matriz T):

$$\Delta(\lambda) = \det(T - \lambda I) = \det(\lambda I - T)$$

- autovalores e autovetores de um operador T (ou de uma matriz T):

Seja $T: V \to V$, $\lambda \in K$, $v \in V$, $v \neq 0$

Se $Tv = \lambda v$, então λ é autovalor e v é autovetor (associado a λ)

- espectro de T: $\sigma(T)$ = conjunto de autovalores de T

Teorema 12

Seja $T: V \to V$ um operador linear, então as 3 afirmações abaixo são equivalentes:

i) $\lambda \in \sigma(T)$, isto é, λ é um autovalor de T;

ii) $(T - \lambda I)$ não é *inversível*;

iii) $\Delta(\lambda) = 0$, isto é, λ é uma raiz do *polinómio característico* $\Delta(\lambda)$.

Teorema 13

Dois operadores similares possuem o mesmo *polinómio característico*.

- Multiplicidade de um autovalor:
  é a sua multiplicidade como raiz de $\Delta(\lambda)$.

- operador diagonalizável:
  Se existe um operador similar que é representado por um *matriz diagonal*

Teorema 14

Autovalores distintos possuem autovetores associados L.I.

FACULDADE ENGENHARIA

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt