Controlo Avançado

1
"Sistemas multidimensionais e Linearização"

J. A. M. Felippe de Souza

A ideia de sistemas é quase que intuitiva.

Exemplos de sistemas físicos são muitos: o ‘corpo humano’, um ‘carro se locomovendo’, um ‘elevador’, um ‘relógio em funcionamento’, um ‘foguete em direção ao espaço’, um ‘processo químico’, etc.

Portanto, uma primeira classificação de ‘sistemas’ pode ser quanto a sua natureza: mecânica, elétrica, eletromecânica, biológica, económica, sociológica, etc.

“Modelo” é uma idealização de um sistema físico obtido através de um estudo analítico deste.

Um aparelho de rádio pode ser visto como sendo um sistema físico e o diagrama de circuitos no seu manual como sendo o seu ‘modelo’.

“Modelagem”, ou “Modelamento”, ou “Modelização” (ou “*Modelling*”, *em inglês*) é um problema importante porque o sucesso de um projeto depende da construção de um bom ‘modelo’ do sistema físico.

Sem sombra de dúvida a maior classe de *modelos matemáticos* usados em Engenharia são aqueles descritos por equações diferenciais (ordinárias ou parciais).

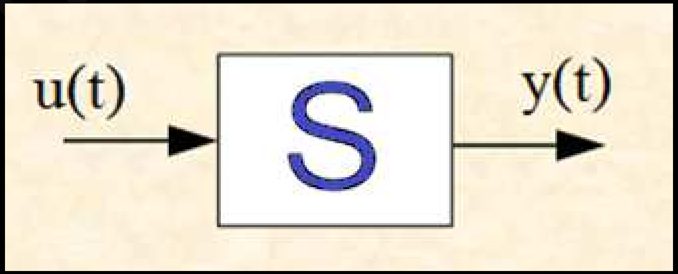
Existem no entanto outros tipos de 'modelos' descritos por equações de diferenças, equações com retardo, etc.

É comum na prática identificar os termos "sistemas" = "modelo do sistema".

Logo, fala-se comummente: "este sistema", quando na realidade estamos nos referindo às equações que descrevem o 'sistema'.

O problema de "Controlo" surge quando se deseja atingir uma meta com determinado 'sistema' ('modelo').

Geralmente um sistema apresenta "entrada" (input) e "saída" (output).



A entrada, também chamada de "controlo" (pois é a variável que dispomos para 'controlar' o sistema) é normalmente representada por $u(t)$.

Ela é uma função do tempo, não necessariamente unidimensional.

Isto é, podem haver mais de uma entrada e isto é representado por um vetor

$$u(t) = (\ u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)\ ) \in \mathbb{R}^m, \qquad \text{para cada } t$$

onde 'm' é o número de entradas.

A saída, também chamada de "resposta" ou "observação" do sistema é normalmente representada por $y(t)$.

A saída é também uma função do tempo, não necessariamente unidimensional.

Por exemplo, no caso de haverem 'q' saídas, $y(t)$ é o vetor

$$y(t) = (\ y_1(t), y_2(t), \ldots, y_q(t)\ ) \in \mathbb{R}^q, \qquad \text{para cada } t$$

Os casos que trataremos aqui nesta disciplina, $u(t)$ e $y(t)$ serão funções contínuas definidas num intervalo $[\, t_o, t_f \,] \subset \mathbb{R}$ onde

t_o = instante inicial, e

t_f = instante final

No entanto, existem sistemas onde estas funções $u(t)$ e $y(t)$ não são contínuas, como é o caso de *sistemas discretos*.

Numa formulação mais geral de sistemas nós temos

$$u(t) \in U \qquad \text{e} \qquad y(t) \in Y \qquad \text{para cada } t$$

onde

U = espaço de entrada (contém todos os *valores possíveis* para a entrada), e

Y = espaço de saída (contém todos os *valores possíveis* para a saída).

O caso que trataremos nesta disciplina, como já foi mostrado acima, é quando

$$U = \mathbb{R}^m \qquad \text{e} \qquad Y = \mathbb{R}^q$$

A Teoria de Controlo estuda as funções $u(t)$ que levam, ou conduzem, o sistema de um

'estado inicial' $x(t_o)$ no instante de tempo t_o

para um

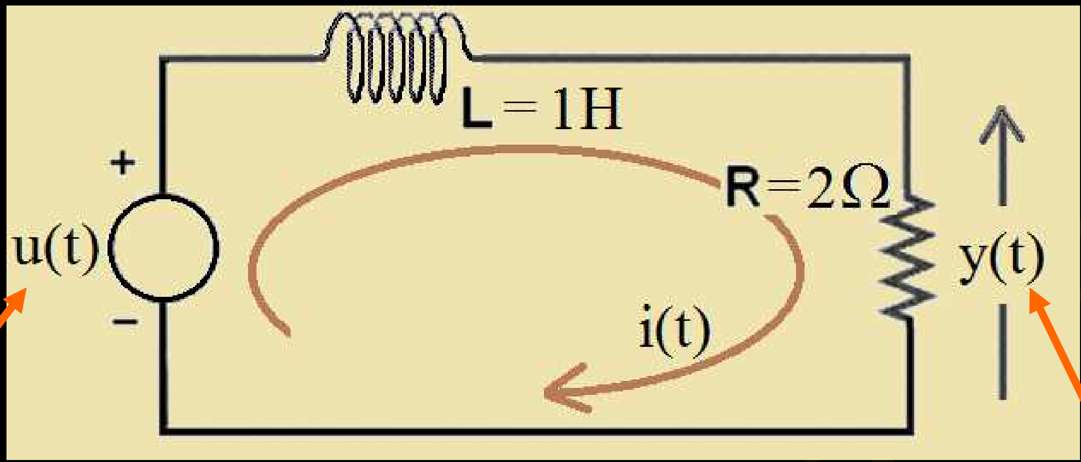
'estado final' $x(t_f)$ desejado no instante de tempo t_f.

Com isso surge o conceito de 'estado' do sistema que será ilustrado em alguns exemplos a seguir, e

$X = \mathbb{R}^n$ = 'espaço de estado' do sistema,

onde n é a 'dimensão' do espaço de estado que é também a 'ordem' do sistema.

Exemplo 1 – Circuito elétrico



$u(t)$ = controlo (input)

= fonte de tensão

$y(t)$ = saída (output)

= tensão na resistência

A equação que descreve este circuito é

$$\frac{di}{dt} + 2i(t) = u(t)$$

(de 1ª ordem)

com condição inicial dada por

$$i(t_o) = i_o$$

Definindo o 'estado' $x(t)$ do sistema como sendo a corrente $i(t)$,

$$x(t) = i(t)$$

e portanto,

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t), \qquad x(t_o) = i_o \qquad (1.1)$$

e a saída do sistema é,

$$y(t) = 2\,x(t)$$

Neste exemplo, o 'espaço de entrada' é de dimensão '1' $(U = \mathbb{R}^1)$ pois

$$u(t) \in \mathbb{R}$$

e o 'espaço de saída' é também de dimensão '1' pois

$$y(t) = 2\,x(t) \in Y = \mathbb{R}^1$$

Além disso,

$$x(t) \in X = \mathbb{R}^1 \qquad \text{para cada } t$$

logo, o ‘espaço de estado’ é de dimensão ‘1’ também.

Este sistema é linear e por isso foi possível colocar na forma matricial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x + B\,u \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad \begin{array}{l} A = [-2] \\ B = [1] \\ C = [2] \end{array}$$

O problema de ‘controlo’ seria determinar que

funções $u(t)$

aplicar na fonte de tensão (entrada do sistema)

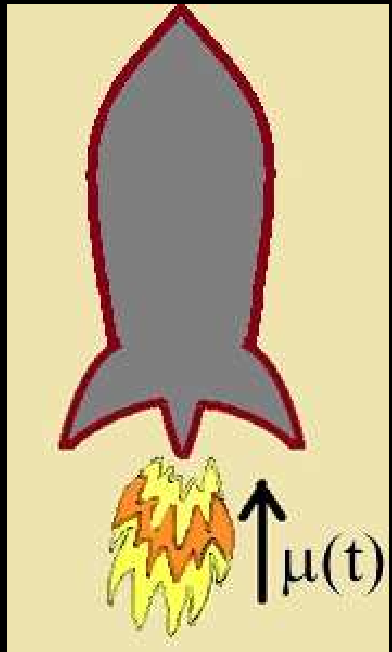
para conduzir este sistema de um

‘estado inicial’ i_o no instante t_o

para um

‘estado final’ $x(t_f)$ desejado no instante t_f.

Exemplo 2 – Foguete lançado verticalmente



$\mu(t)$ = controlo (input) = empuxo ('*thrust*') aplicado ao foguete

Para simplificar, vamos supor que o foguete tem massa unitária ($m = 1$) e ausência de forças aerodinâmicas.

A equação que descreve o sistema é,

$$\ddot{x}_1(t) = \mu(t) - g \qquad (1.2)$$

onde

$x_1(t)$ = altura vertical,

$\mu(t)$ = empuxo (força/unidade de massa) aplicado ao foguete,

g = aceleração gravitacional.

A solução desta equação depende das condições iniciais

$$\begin{cases} x_1(t_o) = x_{10} = \text{altura no instante } t_o \quad \text{e} \\ \dot{x}_1(t_o) = x_{20} = \text{velocidade no instante } t_o \end{cases}$$

Por exemplo, se no instante t_o o foguete estiver ainda parado no solo, então

$$x_1(t_o) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}_1(t_o) = 0 \qquad (1.3)$$

Definindo-se o 'estado' do sistema como sendo

$$x(t) = (\, x_1(t) \,,\, x_2(t) \,)^T$$

onde

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

temos que

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \,, & x_1(t_o) = x_{10} \\ \dot{x}_2(t) = -g + \mu(t) \,, & x_2(t_o) = x_{20} \end{cases} \qquad (1.4)$$

e a equação diferencial de 2ª ordem acima (1.2) foi reduzida a um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem, da mesma forma que no Exemplo 1 acima escrevemos o 'estado' na forma

$$\boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t), \mu(t)), \qquad x(t_o) = x_o} \tag{1.5}$$

onde

$$x_o = (x_{10}, x_{20})^T$$

Note que o 'estado' do sistema $x(t)$, como foi definido acima, é o par *posição-velocidade* no instante t.

Como $x(t) \in \mathbb{R}^2$, para cada t, a dimensão do '*espaço de estado*' é 2.

Como este sistema não é linear, não foi possível colocar na forma

$$\boxed{\dot{x}(t) = A\,x + B\,u, \qquad x(0) = x_o} \tag{1.6}$$

Será necessário linearizar o sistema para podermos colocá-lo nesta forma.

Para linearizar este sistema vamos redefinir o empuxo $\mu(t)$ como:

$$\mu(t) = g + u(t)$$

para pequenos valores de $u(t)$, ou seja, próximos de zero.

Desta forma, $\mu(t)$ representa pequenas variações em torno do valor g.

Então (1.4) torna-se

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \,, & x_1(t_o) = x_{10} = 0 \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \,, & x_2(t_o) = x_{20} = 0 \end{cases}$$

que está na forma (1.6), ou seja

$$\dot{x}(t) = A\,x + B\,u \,, \qquad x(0) = x_o = 0$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x_o = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

e assim o sistema foi linearizado.

O problema de 'controlo' é estudar as

funções de entrada $u(t)$

que devemos aplicar ao sistema para levá-lo de um 'estado' (i.e., de uma determinada *posição* e *velocidade*)

no instante inicial t_o

para outro 'estado' (i.e., outra *posição* e *velocidade*),

no instante final t_f.

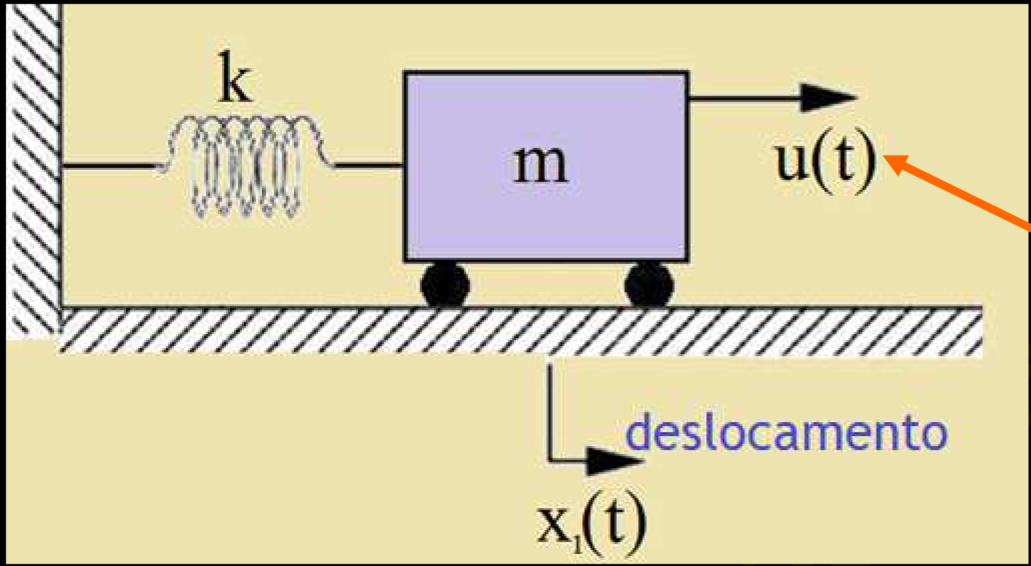
A 'saída' (observação) deste sistema pode ser, por exemplo, a própria altura $x_1(t)$, e portanto

$$y(t) = x_1(t) = \underbrace{[\,1 \quad 0\,]}_{C}\, x(t)$$

que tem a forma

$$y(t) = C\,x(t) \qquad (1.7)$$

Exemplo 3 – Sistema Massa-Mola



$u(t)$ = controlo (input) = força aplicada ao carro

A equação que descreve este sistema é

$$m\,\ddot{x}_1(t) = -k\,x_1(t) + u(t)$$

onde

$x_1(t)$ = posição do carro no instante t,

k = constante de elasticidade da mola,

$u(t)$ = força aplicada.

As condições iniciais são:

$$x_1(t_o) = x_{10} \quad \text{e} \quad \dot{x}_1(t_o) = x_{20}$$

Definindo-se

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \text{velocidade do carro no instante } t$$

temos

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t)\,, \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t)\,, \end{aligned} \right. \qquad \begin{aligned} x_1(t_o) &= x_{10} \\ x_2(t_o) &= x_{20} \end{aligned} \qquad (1.8)$$

que está novamente na forma (1.5).

$$\dot{x}(t) = f(\,t\,, x(t)\,, u(t)\,)\,, \qquad x(t_o) = x_o$$

Como (1.8) acima é linear, o que não ocorria no Exemplo 2, podemos também reescrevê-las na forma (1.6), ou seja,

$$\dot{x}(t) = A\,x + B\,u\,, \qquad x\,(0) = x_o$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_o = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

Ou seja, se as equações dinâmicas do sistema, neste caso (1.8), forem lineares, então o sistema pode ser reescrito na forma matricial (1.6).

Como $x(t) = (x_1(t) , x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, a dimensão do 'espaço de estado' é 2.

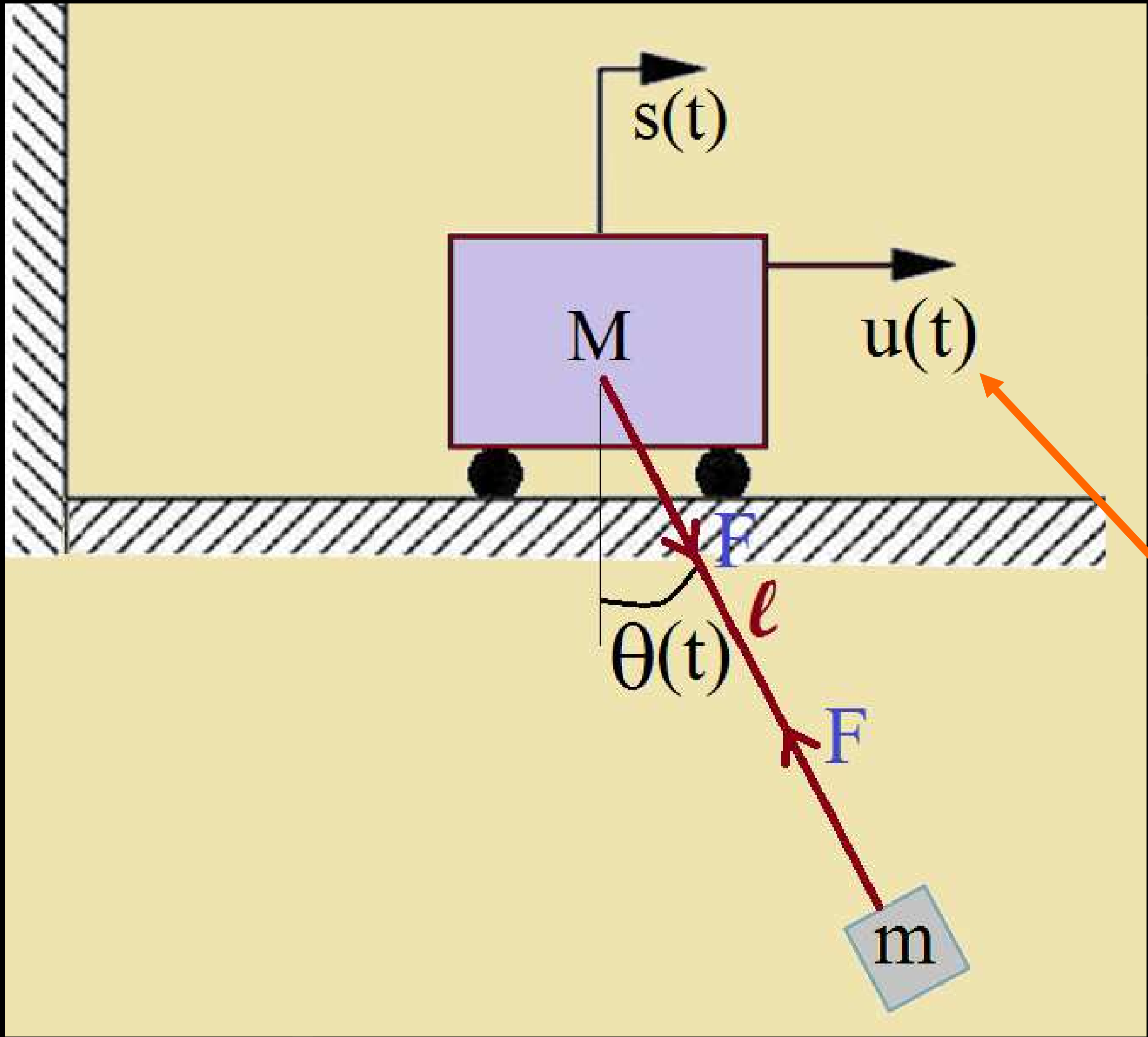
A saída do sistema pode ser, por exemplo

$$y(t) = x_1(t) = \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} \cdot x(t)$$

que tem a forma (1.7), ou seja,

$$y(t) = C\,x\,(t)$$

Exemplo 4 – Sistema Carro com pêndulo



u(t) = controlo (input) = força aplicada ao carro

As equações que descrevem este sistema são:

$$\begin{cases} M\,\ddot{s}(t) = u(t) + F\cdot \operatorname{sen}\theta(t) & (1.9) \\ m\,\dfrac{d^2}{dt^2}\big(s + \ell\,\operatorname{sen}\theta(t)\big) = -F\cdot \operatorname{sen}\theta(t) & (1.10) \\ m\,\dfrac{d^2}{dt^2}\big(\ell\cos\theta(t)\big) = -F\cdot\cos\theta(t) + mg & (1.11) \end{cases}$$

Eliminando-se F entre (1.10) e (1.11) temos

$$\ell\,\ddot{\theta}(t) + g\cdot\operatorname{sen}\theta(t) + \ddot{s}(t)\cos\theta(t) = 0 \qquad (1.12)$$

Eliminando-se F entre (1.9) e (1.10) temos

$$u(t) = (M+m)\,\ddot{s}(t) + m\ell\cdot\ddot{\theta}(t)\cdot\cos\theta(t) - m\ell\cdot\dot{\theta}^2(t)\cdot\operatorname{sen}\theta(t) \qquad (1.13)$$

Portanto, temos duas equações diferenciais ordinárias não lineares, (1.12) e (1.13).

As condições iniciais são:

$$\begin{cases} s(t_o) = s_{10} = \text{deslocamento do carro no instante } t_o\,, \\ \dot{s}(t_o) = s_{20} = \text{velocidade do carro no instante } t_o\,, \\ \theta(t_o) = \theta_{10} = \text{ângulo do pêndulo com a vertical no instante } t_o\,, \text{ e} \\ \dot{\theta}(t_o) = \theta_{20} = \text{velocidade angular do pêndulo no instante } t_o\,. \end{cases}$$

Definindo-se o 'estado'

$$x(t) = (\, s(t)\,,\ \dot{s}(t)\,,\ \theta(t)\,,\ \dot{\theta}(t)\,) \in \mathbb{R}^4$$

pode-se facilmente escrever (1.12) e (1.13) na forma (1.5), isto é

$$\dot{x}(t) = f\,(\,t\,,\,x(t)\,,\,u(t)\,).$$

Entretanto nós iremos aproximar (1.12) e (1.13) por equações lineares para podermos reescrever o sistema na forma matricial (1.6).

$$\dot{x}(t) = A\,x + B\,u\,, \qquad x\,(t_o) = x_o$$

Este procedimento é chamado de '*linearização*' do sistema.

Assumindo-se $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ pequenos, isto é *pequenas oscilações* para o pêndulo, (i.e., *pequenos ângulos* e *pequenas velocidades angulares*), podemos desprezar os termos não lineares das equações (1.12) e (1.13):

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta(t) \simeq \theta(t) \\ \cos\theta(t) \simeq 1 \\ \dot{\theta}^2(t) \simeq 0 \end{cases}$$

e as equações (1.12) e (1.13) tornam-se

$$\begin{cases} \ell\,\ddot{\theta}(t) + g\cdot\theta(t) + \ddot{s}(t) = 0 & (1.14) \\ u(t) = (M+m)\cdot\ddot{s}(t) + m\ell\cdot\ddot{\theta}(t) & (1.15) \end{cases}$$

Agora multiplicando-se (1.14) por m e substituindo-se em (1.15) obtém-se (1.16) abaixo. Por outro lado, multiplicando-se (1.14) por M e substituindo-se em (1.15) obtém-se (1.17) abaixo.

$$\begin{cases} M\,\ddot{s}(t) - mg\cdot\theta(t) = u(t) & (1.16) \\ M\ell\cdot\ddot{\theta}(t) + (m+M)\,g\,\theta(t) = -u(t) & (1.17) \end{cases}$$

Portanto, como $\dot{s}(t) = x_2$, $\theta(t) = x_3$ e $\dot{\theta}(t) = x_4$ podemos reescrever as equações (1.16) e (1.17) acima obtendo as equações (1.18) e (1.19) abaixo:

$$\begin{cases} M\dot{x}_2 = mg\cdot x_3 + u & (1.18) \\ M\ell\cdot\dot{x}_4 = -(m+M)\,g\,x_3 - u & (1.19) \end{cases}$$

Pela definição de 'estado' acima obtém-se $\dot{x}_1 = \dot{s}(t) = x_2$ e $\dot{x}_3 = \dot{\theta}(t) = x_4$, logo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{mg}{M}\cdot x_3 + \dfrac{1}{M}u(t) \\ \dot{x}_3 = x_4 \end{cases} \qquad (1.20)$$

que está na forma (1.6)

$$\dot{x}(t) = A\,x + B\,u\,, \qquad x(t_o) = x_o \qquad (1.21)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{(m+M)g}{M\ell} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/M\ell \end{bmatrix}$$

e $\quad x_o = \begin{bmatrix} s_{10} \\ s_{20} \\ \theta_{10} \\ \theta_{20} \end{bmatrix}$

e, claro, a dimensão do 'espaço de estado' é 4.

Observe que as equações em (1.20), ou (1.21), só são válidas para valores de $x_3(t)$ e $x_4(t)$ próximos de zero.

Isto é, este sistema foi linearizado, nas componentes x_3 e x_4, em torno de zero.

Suponha agora que pode-se medir s (*deslocamento do carro*) e θ (*ângulo do pêndulo*) a cada instante t, mas não $\dot{s}$ ou $\dot{\theta}$.

A saída $y(t)$ torna-se portanto:

$$y(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \cdot x(t) \qquad (1.22)$$

ou seja, na forma (1.7),

$$y(t) = C\, x(t)$$

Neste exemplo a linearização também podia ser vista como substituindo

$$\begin{cases} \theta(t) = \bar{x}_3 + x_3(t) \\ \dot{\theta}(t) = \bar{x}_4 + x_4(t) \end{cases}$$

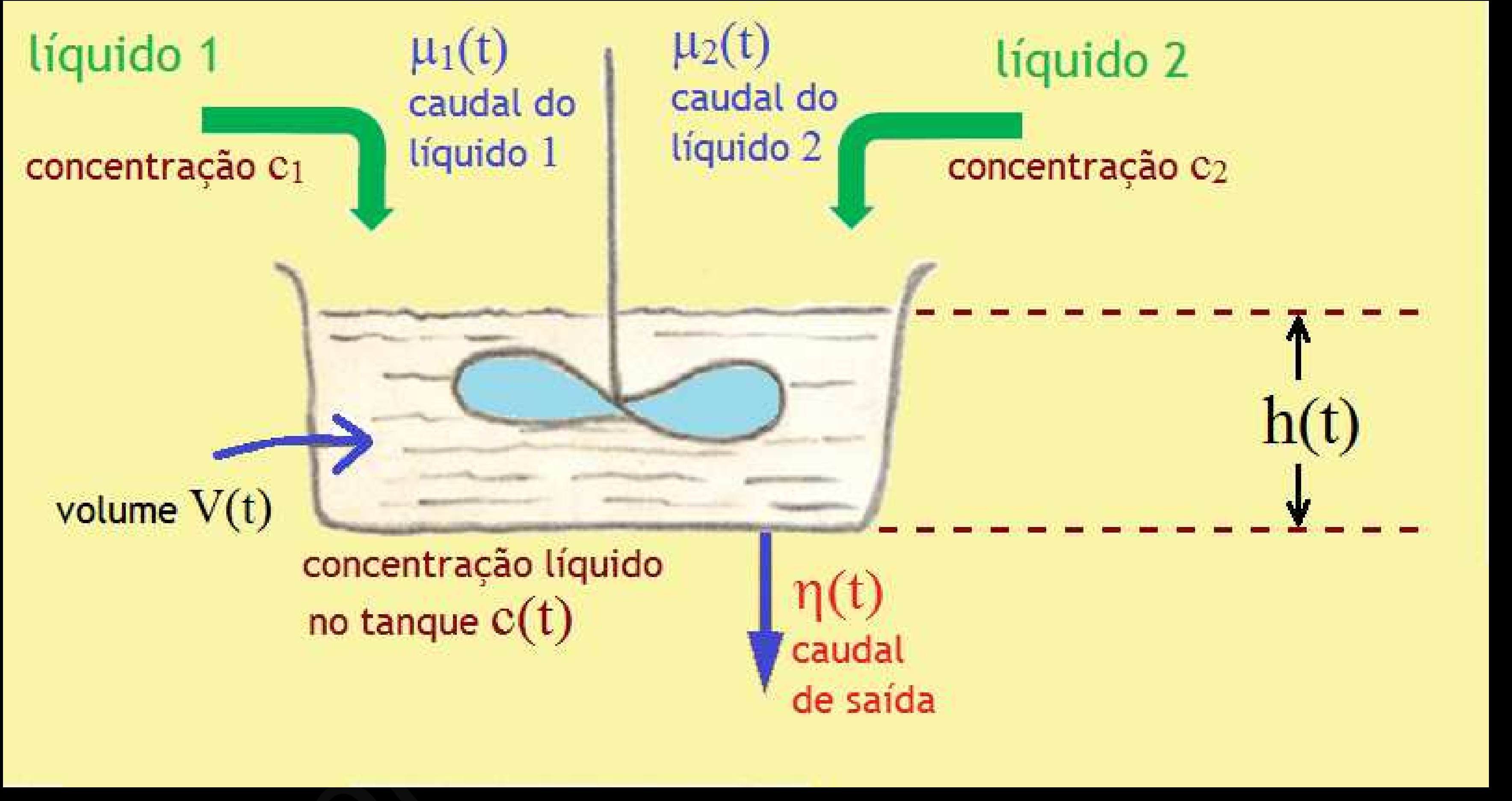
onde $\bar{x}_3 = 0$, $\bar{x}_4 = 0$ e ambos $x_3(t)$ e $x_4(t)$ são valores pequenos, ou seja, próximos de zero.

Ou seja, linearizar um sistema consiste em definir um ponto de operação e redefinir as variáveis não lineares como *pequenas variações* em torno deste ponto de operação.

O sistema linearizado só é válido nas proximidades do ponto de operação.

Para outras situações torna-se necessário definir um novo ponto de operação e linearizar novamente o sistema.

Exemplo 5 – Um tanque de mistura



Este tanque mistura o líquido 1 (de concentração c_1, constante) com o líquido 2 (de concentração c_2, constante).

$\mu_i(t)$ = fluxo ou caudal (em m^3/s) do líquido i no instante t, $i = 1, 2$

$c(t)$ = concentração do líquido no tanque =

= concentração do líquido na saída.

$V(t)$ = volume do líquido no tanque = $S \cdot h(t)$

$h(t)$ = altura do líquido no tanque.

S = área secional do tanque.

Este sistema é descrito por

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = \mu_1(t) + \mu_2(t) - \eta(t) \\ \dfrac{d}{dt}\left[c(t) \cdot V(t)\right] = c_1 \mu_1(t) + c_2 \mu_2(t) - c(t)\eta(t) \end{cases} \tag{1.23}$$

O fluxo (caudal) de saída η pode ser expresso como

$$\eta(t) = k\sqrt{h(t)} = k\sqrt{V(t)/S}$$

onde k é uma constante experimental.

Portanto, (1.17) torna-se

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -k \cdot \sqrt{V(t)/S} + \mu_1(t) + \mu_2(t) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}[c(t) \cdot V(t)] = -c(t)k\sqrt{V(t)/S} + c_1\mu_1(t) + c_2\mu_2(t) \end{cases} \quad (1.24)$$

Neste ponto nós poderíamos definir o estado $x(t)$ e a entrada $u(t)$ como

$$x(t) = (\, V(t)\, , c(t)\,) \in \mathbb{R}^n , \qquad n = 2$$

$$u(t) = (\, \mu_1(t)\, , \mu_2(t)\,) \in \mathbb{R}^m , \qquad m = 2$$

e escrever este sistema na forma (1.5), isto é,

$$\dot{x}(t) = f\,(\, t\, , x(t)\, , u(t)\,).$$

No entanto, semelhantemente ao Exemplo 4, nós iremos *linearizar* as equações em (1.24) acima e escrevemos o sistema na forma matricial (1.6), isto é,

$$\dot{x}(t) = A\,x + B\,u \,, \qquad x\,(t_o) = x_o$$

No Exemplo 4 o sistema foi linearizado com relação a duas componentes do 'estado', em torno de zero.

Aqui nós iremos linearizar (1.24) com relação a

$$\mu_1(t)\ ,\ \mu_2(t)\ ,\ \eta(t)\ ,\ V(t)\ \text{ e }\ c(t)$$

em torno dos valores nominais $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$, $\bar{\eta}$, $\bar{V}$ e $\bar{c}$.

do sistema em regime estacionário onde estas quantidades são constantes e satisfazem,

verificação da consistência

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 - \bar{\eta} \\ 0 &= c_1\bar{\mu}_1 + c_2\bar{\mu}_2 - \bar{c}\,\bar{\eta} \\ \bar{\eta} &= k\sqrt{\bar{V}/S} \end{aligned}\right. \tag{1.25}$$

Dado $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ (fluxo, ou caudal, estacionário de entrada) estas equações podem ser resolvidas para

$$\bar{\eta}\ ,\ \bar{V}\ \text{ e }\ \bar{c}$$

Agora vamos assumir apenas pequenas variações do regime estacionário e definir que o estado

$$x(t) = (x_1(t) , x_2(t)) ,$$

a entrada

$$u(t) = (u_1(t) , u_2(t)) ,$$

e a saída $y_1(t)$ como sendo exatamente estas pequenas variações do fluxo ou caudal $\eta(t)$ no regime estacionário, isto é,

$$\begin{cases} \mu_1(t) = \bar{\mu}_1 + u_1(t) \\ \mu_2(t) = \bar{\mu}_2 + u_2(t) \\ V(t) = \bar{V} + x_1(t) \\ c(t) = \bar{c} + x_2(t) \\ \eta(t) = \bar{\eta} + y_1(t) \end{cases}$$

e obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\left(\dfrac{k}{2\overline{V}}\sqrt{\overline{V}/S}\right)\cdot x_1(t) + u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t)\cdot\overline{V} + \overline{c}\,\dot{x}_1(t) = -\left[\overline{c}\,\dfrac{k}{2\overline{V}}\sqrt{\overline{V}/S}\right]\cdot x_1(t) - \left[k\sqrt{\overline{V}/S}\right]\cdot x_2(t) + c_1u_1(t) + c_2u_2(t) \end{cases}$$

Usando a terceira equação em (1.25) obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{-1}{2}(\overline{\eta}/\overline{V})\cdot x_1(t) + u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t)\cdot\overline{V} + \overline{c}\,\dot{x}_1(t) = \dfrac{-1}{2}\overline{c}\,(\overline{\eta}/\overline{V})\cdot x_1(t) - \overline{\eta}\,x_2(t) + c_1u_1(t) + c_2u_2(t) \end{cases} \quad (1.26)$$

Defina

$$\theta = \frac{\overline{V}}{\overline{\eta}} =$$ tempo para esvaziar o tanque com volume $\overline{V}$ e o fluxo (ou caudal) de saída $\overline{\eta}$

e elimine $\dot{x}_1(t)$ da segunda equação de (1.26) acima, então

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2\theta} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c_1 - \bar{c}}{\bar{V}} & \frac{c_2 - \bar{c}}{\bar{V}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

ou seja,

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t).$$

As condições iniciais são dadas por

$$\begin{cases} x_1(0) = V(0) - \bar{V} \\ x_2(0) = c(0) - \bar{c} \end{cases}$$

A saída completa é

$$y(t) = (\, y_1(t) \, , \, y_2(t) \,) \, ,$$

onde $y_1(t)$ já foi definida acima e $y_2(t) = x_2(t)$

Isto é, ao invés de considerarmos a saída como sendo o fluxo de saída $\eta(t)$ e a concentração $c(t)$, nós tomamos as variações destes com respeito aos valores nominais $\bar{\eta}$ e $\bar{c}$.

Portanto,

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \cdot x(t) = C \cdot x(t) \qquad (1.28)$$

que tem a forma (1.7)

$$y(t) = C \, x(t)$$

FACULDADE ENGENHARIA

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt