

Controlo de Sistemas

13

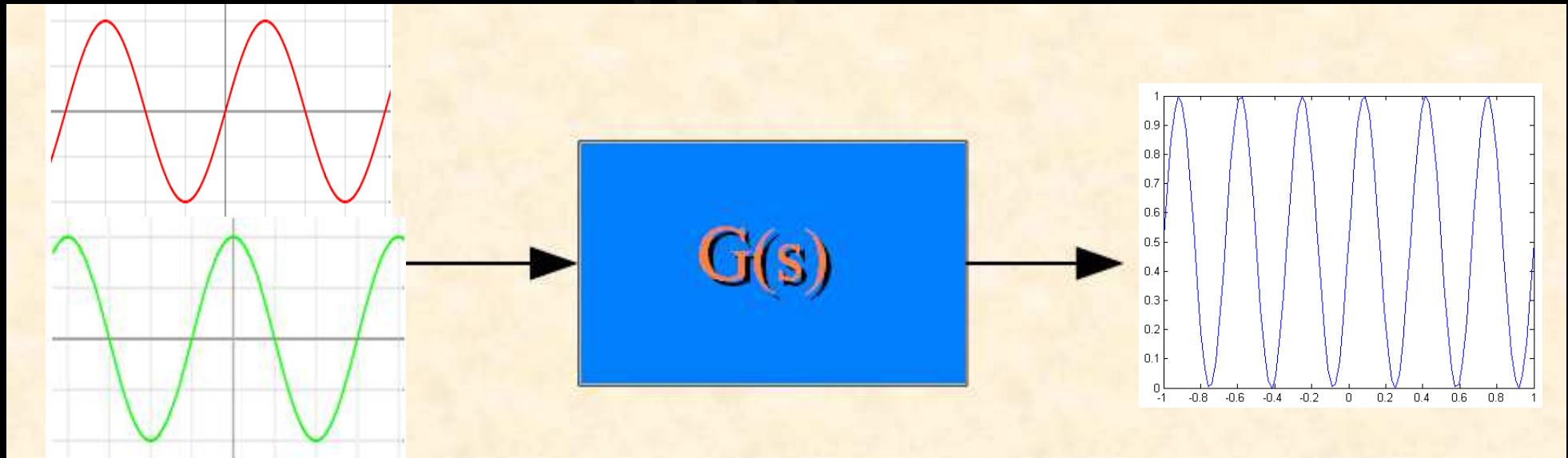
“Análise no domínio da frequência”
(*Frequency domain analysis*)

J. A. M. Felippe de Souza

Análise no domínio da frequência

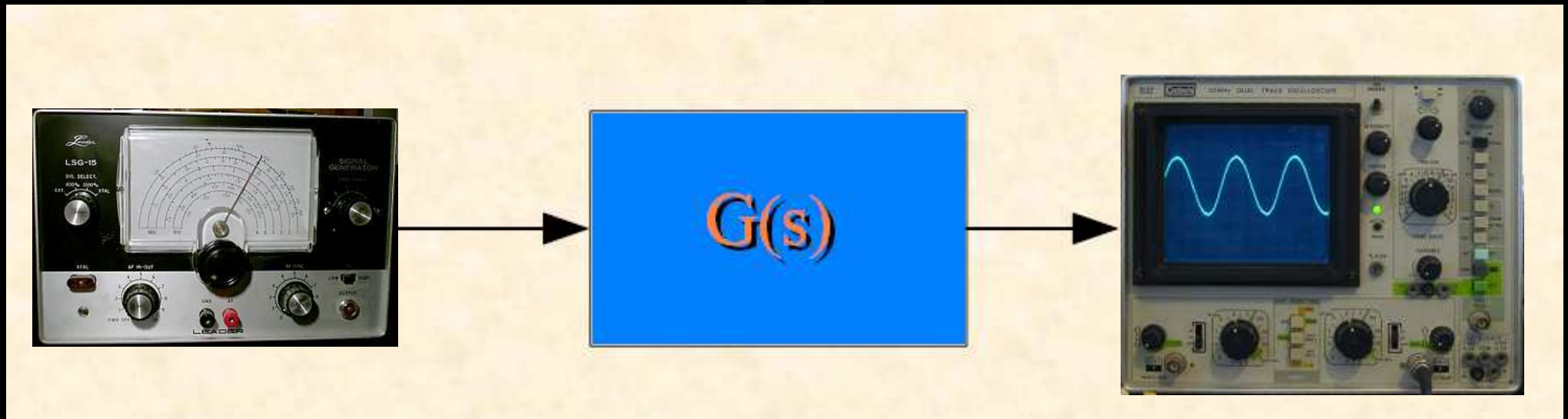
A resposta em frequência é a resposta do sistema em estado estacionário (ou em regime permanente) quando a entrada do sistema é sinusoidal.

Métodos de análise de sistemas através da resposta em frequência, como os “Diagramas de Bode” ou o “Gráfico de Nyquist”, são as técnicas mais convencionais usadas em Engenharia para análise e projeto de Sistemas de Controle.



Análise no domínio da frequência

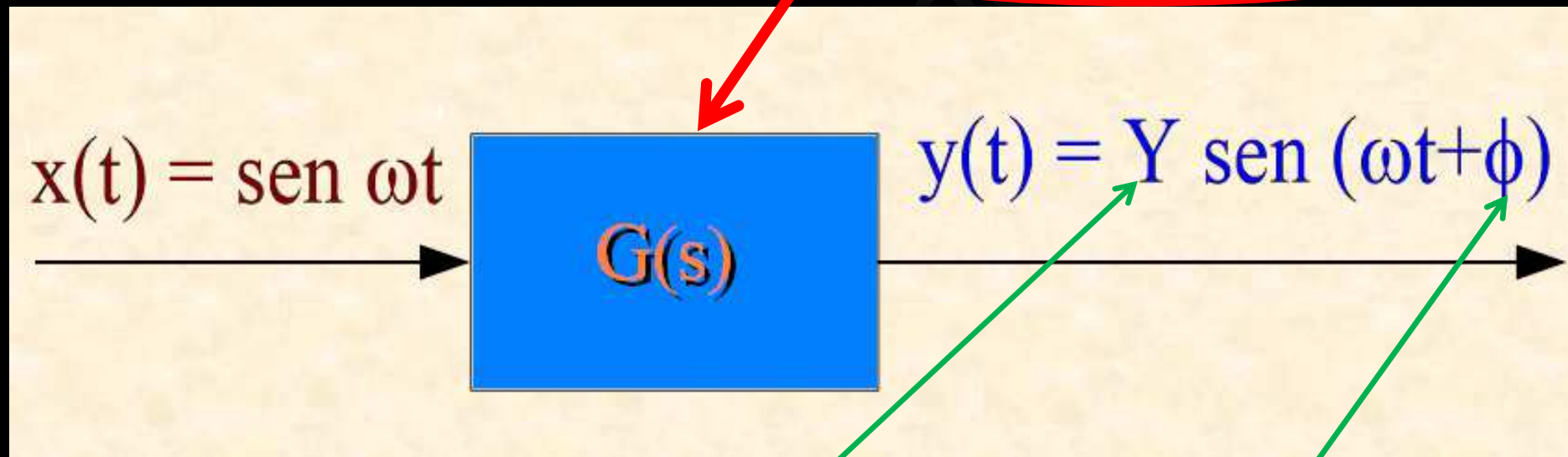
A vantagem destes métodos de análise de sistemas através da **resposta em frequência** é que eles permitem-nos investigar ambas as estabilidades *absolutas* e *relativas* de sistemas lineares em *malha fechada* apenas com o conhecimento da **resposta em frequência** em *malha aberta*, que pode ser obtido experimentalmente com geradores de sinais (*sinusoidais*) e instrumentos de medida de precisão (*ambos facilmente disponíveis em laboratórios*).



Análise no domínio da frequência

Portanto a análise de sistemas complicados pode ser feita através de testes de *resposta em frequência* sem ser necessário determinar as *raízes* da equação característica (i.e., os *polos* do sistema)

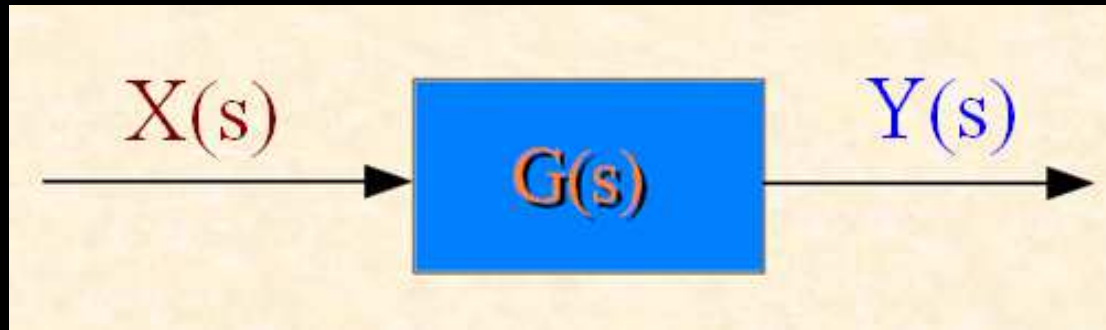
Sistema linear, invariante no tempo, condições iniciais nulas



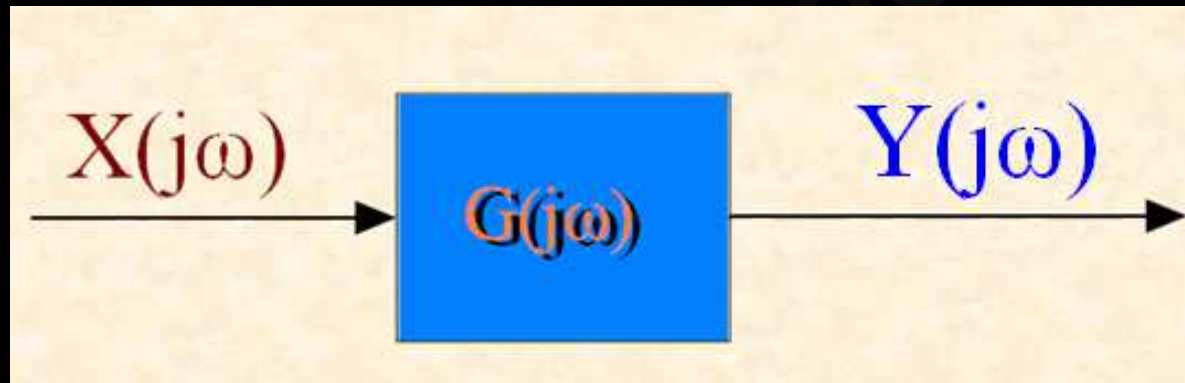
A saída $y(t)$ terá a mesma *frequência* da entrada $x(t)$, entretanto, a amplitude Y e o ângulo de fase ϕ , em geral serão *diferentes*.

Análise no domínio da frequência

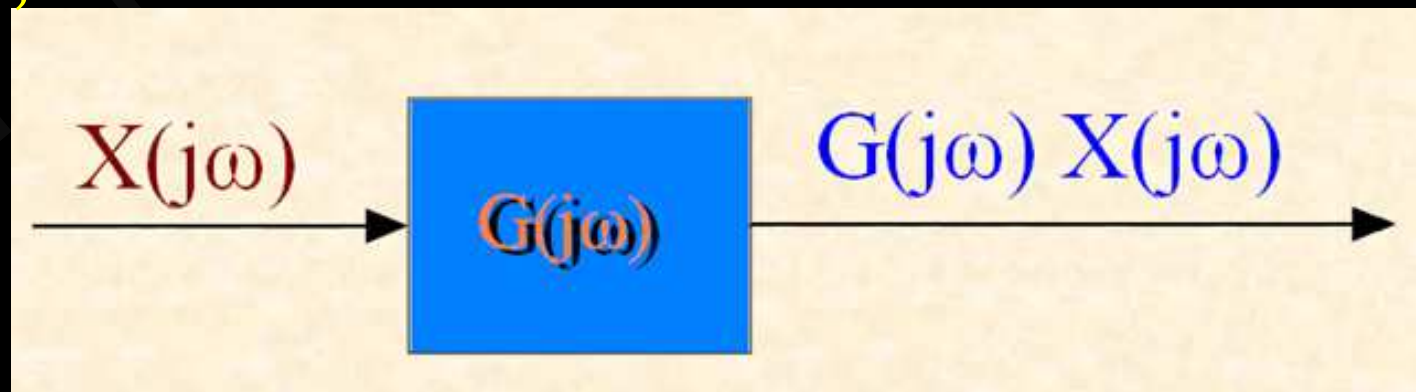
Na realidade, temos



e fazendo-se $s = 0 + j\omega$,



ou seja,



Análise no domínio da frequência

Isto é, fazendo-se $s = 0 + j\omega$ na função de transferência $G(s)$, obtemos $G(j\omega)$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)| \cdot e^{j\phi} \\ &= \underbrace{|G(j\omega)|}_{\text{Módulo de } G(j\omega)} \cdot e^{j\underbrace{\angle G(j\omega)}_{\text{Fase de } G(j\omega)}} \end{aligned}$$

onde a fase

$$\phi = \angle G(j\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(G(j\omega))}{\operatorname{Re}(G(j\omega))} \right)$$

Análise no domínio da frequência

Como a *entrada* $x(t) = \sin(\omega t)$ pode ser expressa como

$$x(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (\text{equação de Euler})$$

então mostra-se que y_{ss} , a *saída* $y(t)$ em *estado estacionário*, fica

$$y_{ss} = |G(j\omega)| \cdot \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

e portanto,

$$y_{ss} = \underbrace{|G(j\omega)|}_Y \cdot \sin\left(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega)}_\phi\right)$$

(Módulo) (Fase)

No caso mais geral da *entrada sinusoidal* com *módulo* X e uma *desfasagem* φ

$$x(t) = X \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

então, y_{ss} , a *saída* $y(t)$ em *estado estacionário*, fica

$$y_{ss} = \underbrace{X \cdot |G(j\omega)|}_{Y \text{ (Módulo)}} \cdot \sin\left(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega) + \varphi}_{\angle Y(j\omega) \text{ (Fase)}}\right)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} = \frac{Y}{X} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{razão entre a amplitude} \\ \text{da saída e da entrada} \end{array} \right.$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = \angle Y(j\omega) - \angle X(j\omega) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{diferença entre as} \\ \text{desfasagens da saída} \\ \text{e da entrada} \end{array} \right.$$

Logo, as características de um *sistema* sujeito a uma *entrada sinusoidal* podem ser obtidas diretamente de

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = |G(j\omega)| \cdot e^{-j\phi} \quad \left(\begin{array}{c} \text{F.T.} \\ \text{sinusoidal} \end{array} \right)$$

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = |G(j\omega)| \cdot e^{-j\phi} \quad \left(\begin{array}{c} \text{F.T.} \\ \text{sinusoidal} \end{array} \right)$$

onde a fase

$$\phi = \angle G(j\omega) = \begin{cases} < 0 & \text{atraso de fase} \\ = 0 & \text{em fase} \\ > 0 & \text{avanço de fase} \end{cases}$$

sendo

$$-\pi < \phi < \pi$$

$$\text{Se } \phi = \pi \Rightarrow \sin(\omega t \pm \pi) = -\sin(\omega t)$$

A seguir (*nos próximos 2 slides*) veremos um **EXEMPLO** das curvas:

Diagramas de Bode de $G(j\omega)$

módulo e fase (ou ângulo)

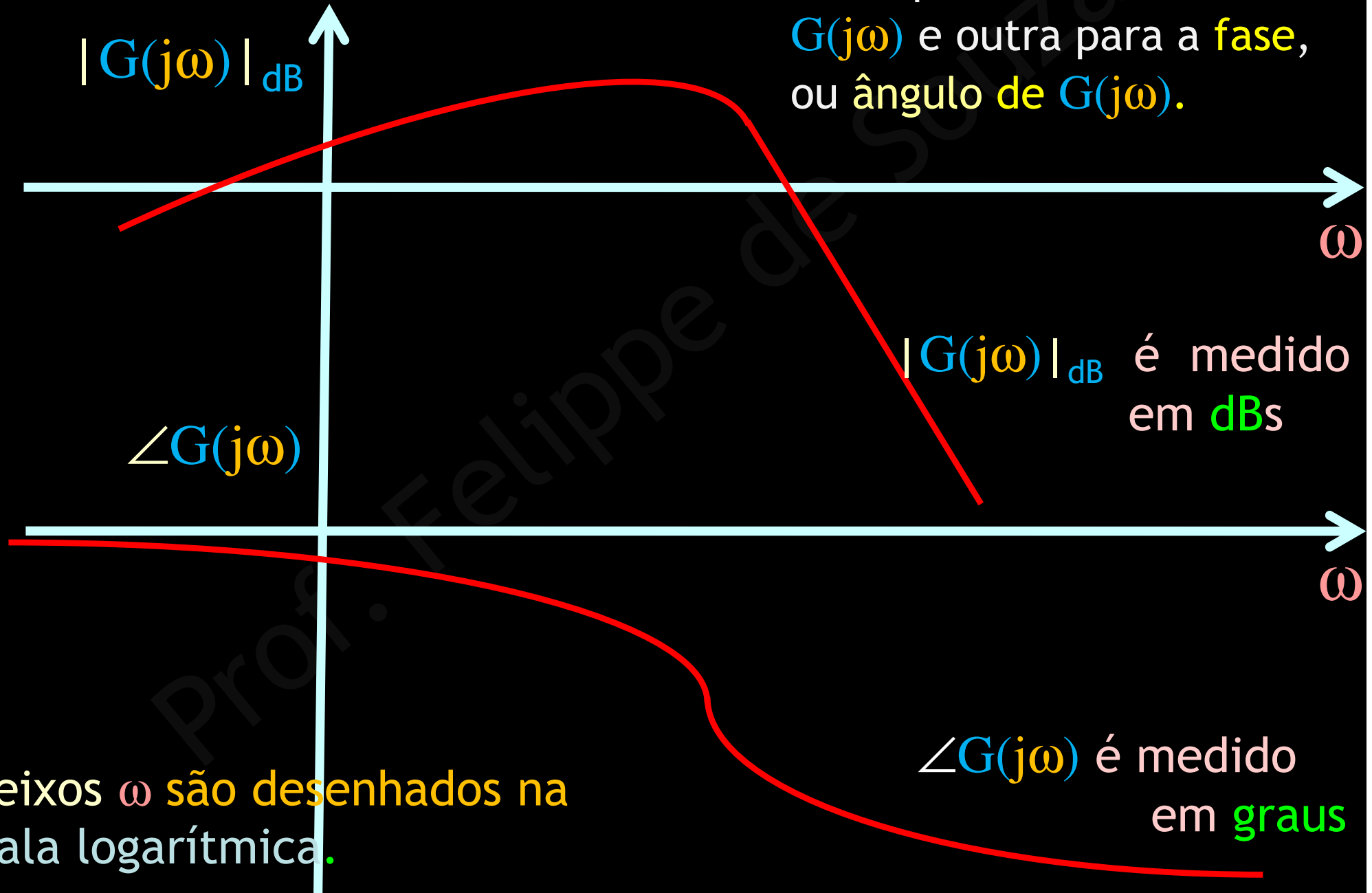
Gráficos de Nyquist de $G(j\omega)$

parametrizado pela frequência ω

ou seja,
os próximos *2 slides* são **curvas genéricas** apenas para **EXEMPLIFICAR**
como são os **Diagramas de Bode** e **Gráficos de Nyquist**.

Diagramas de Bode (exemplo)

Obtido desenhando-se uma curva para o **módulo** de $G(j\omega)$ e outra para a **fase**, ou ângulo de $G(j\omega)$.



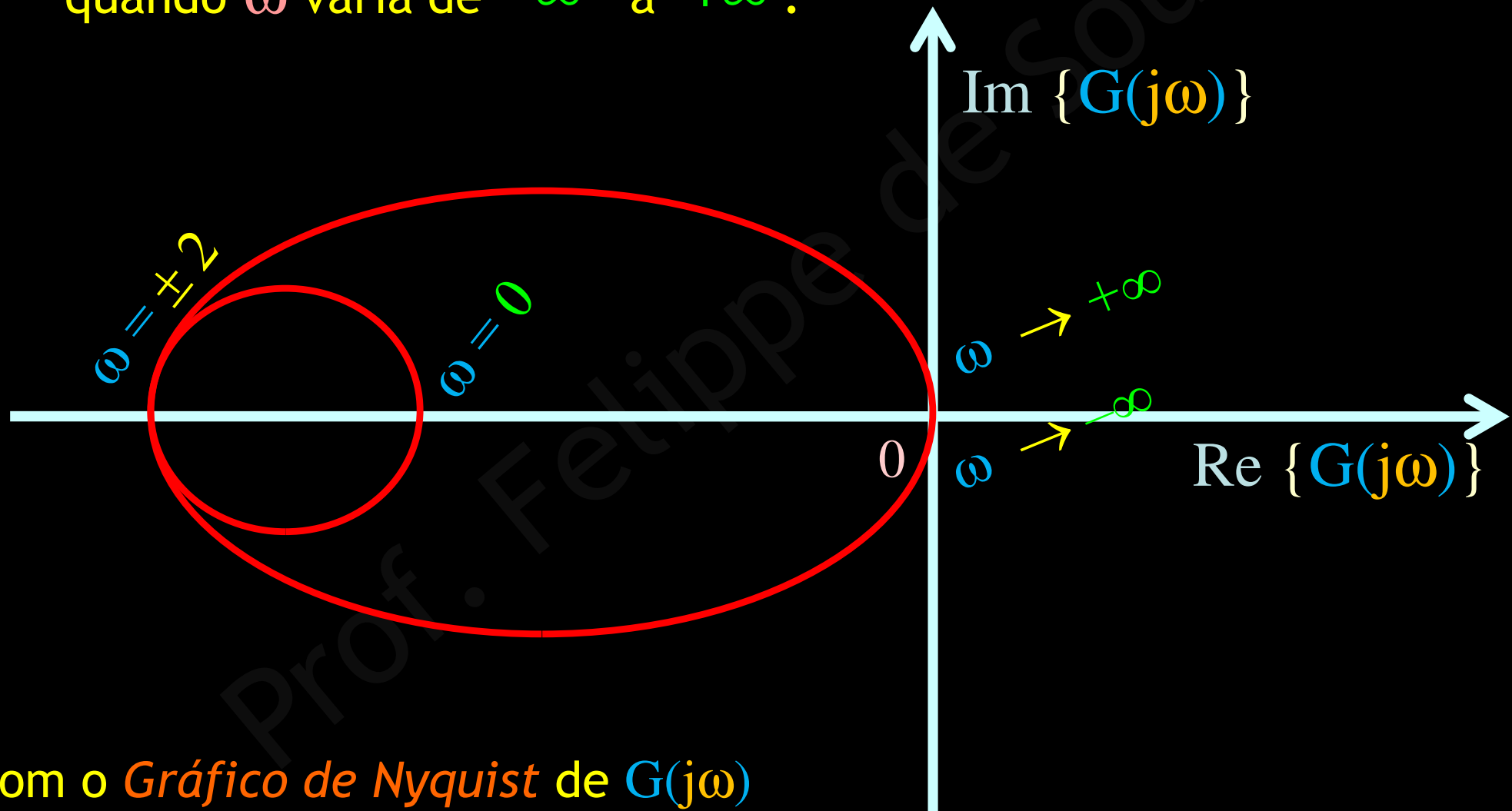
$|G(j\omega)|_{dB}$ é medido em **dBs**

$\angle G(j\omega)$ é medido em **graus**

Os eixos ω são desenhados na escala logarítmica.

Gráfico de Nyquist (exemplo)

Obtido desenhando-se no plano complexo os valores de $G(j\omega)$ quando ω varia de $-\infty$ a $+\infty$.

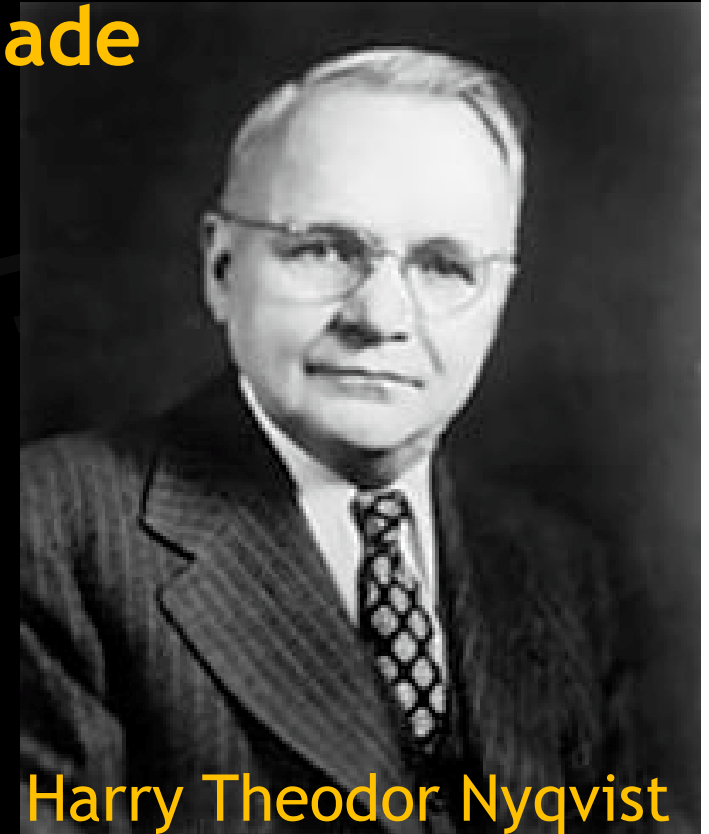


Com o *Gráfico de Nyquist* de $G(j\omega)$ podemos aplicar o '*Critério de Nyquist*' para determinar a estabilidade

Critério de Nyquist para estabilidade

Harry Nyquist trabalhou na AT&T (Estados Unidos) em 1917 e produziu 138 patentes na área de telefonia e transmissão televisiva. É também ganhador de inúmeros prêmios e honrarias.

Nyquist criou os diagramas para definir condições estáveis em sistemas de realimentação negativa e a Teoria de Amostragem nas comunicações digitais.



Harry Theodor Nyqvist
(sueco, 1889-1976)

A seguir, um Exemplo de como determinar do sentido e o do número de circundações do Gráfico de Nyquist

A seguir (*nos próximos slides*) veremos dois EXEMPLOS:

do sentido e do número de circundações dos

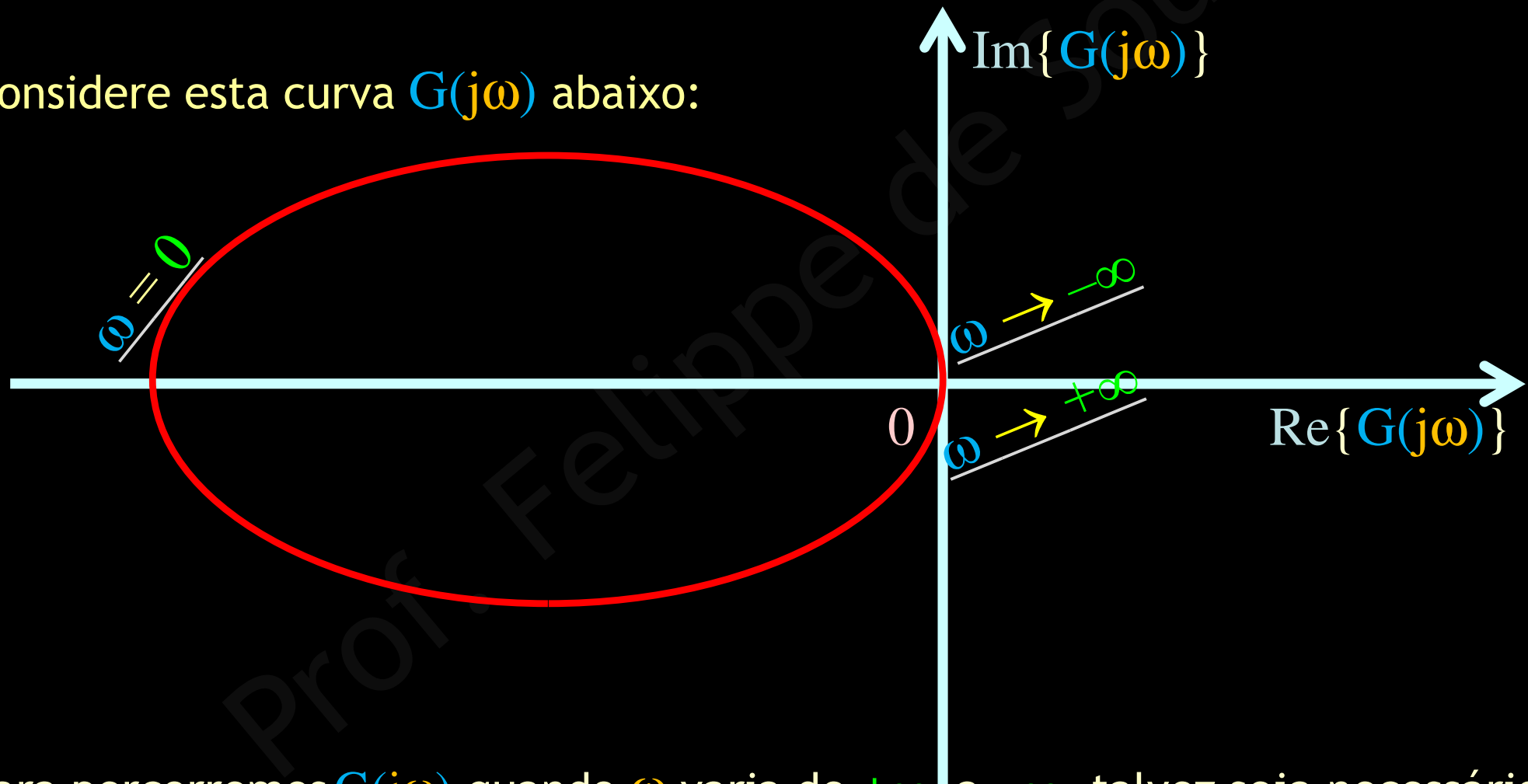
Gráficos de Nyquist de $G(j\omega)$

Usaremos *curva genéricas* apenas para EXEMPLIFICAR como se acha o sentido e como se calcula o número de circundações do Gráfico de Nyquist.

O sentido do Gráfico de Nyquist

Para se dar um *sentido* (uma *direção*) ao Gráfico de Nyquist, percorremos $G(j\omega)$ quando ω varia de $+\infty$ a $-\infty$

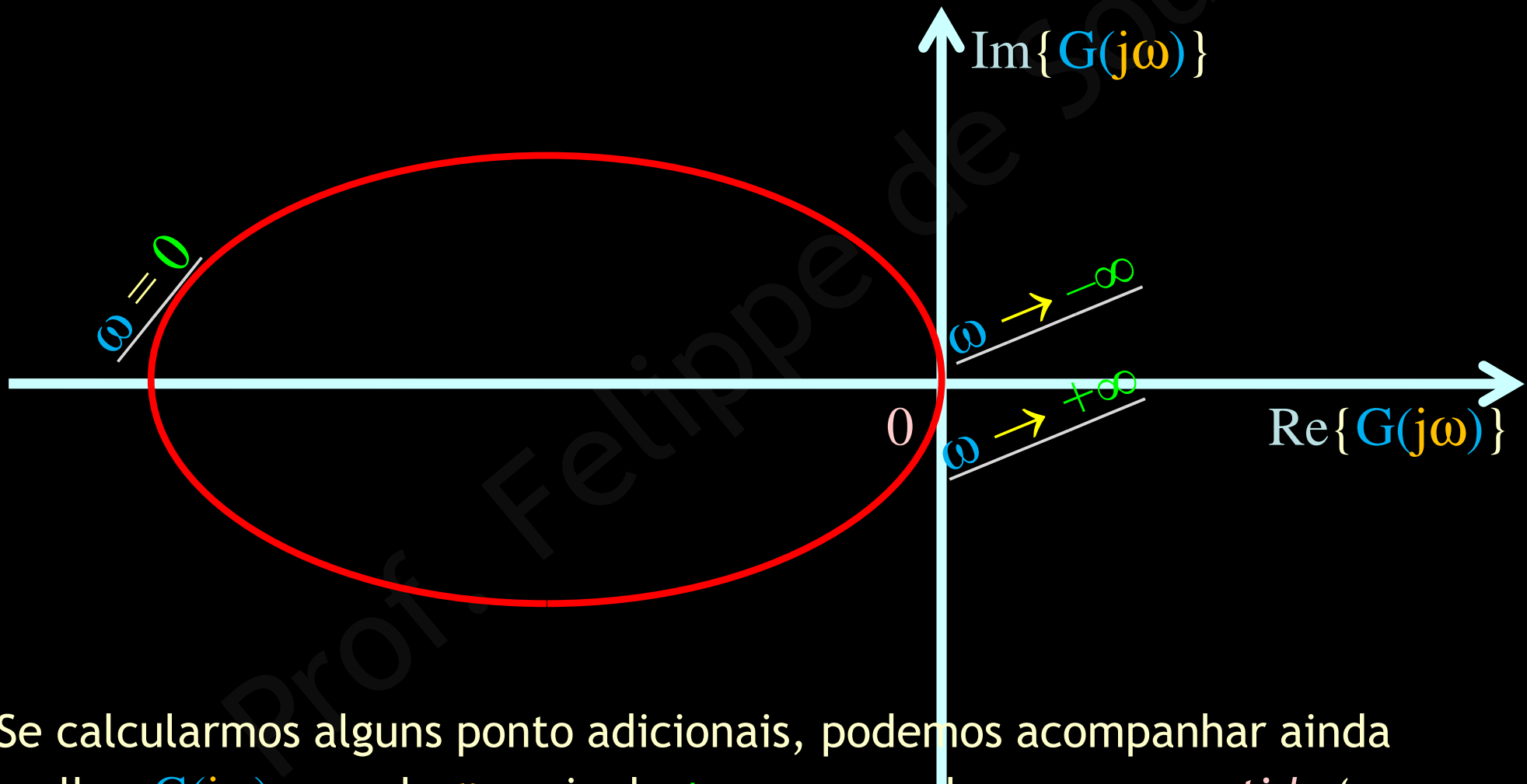
Considere esta curva $G(j\omega)$ abaixo:



Para percorrermos $G(j\omega)$ quando ω varia de $+\infty$ a $-\infty$, talvez seja necessário calcular *pontos adicionais* de ω como neste Gráfico de Nyquist acima

O sentido do Gráfico de Nyquist

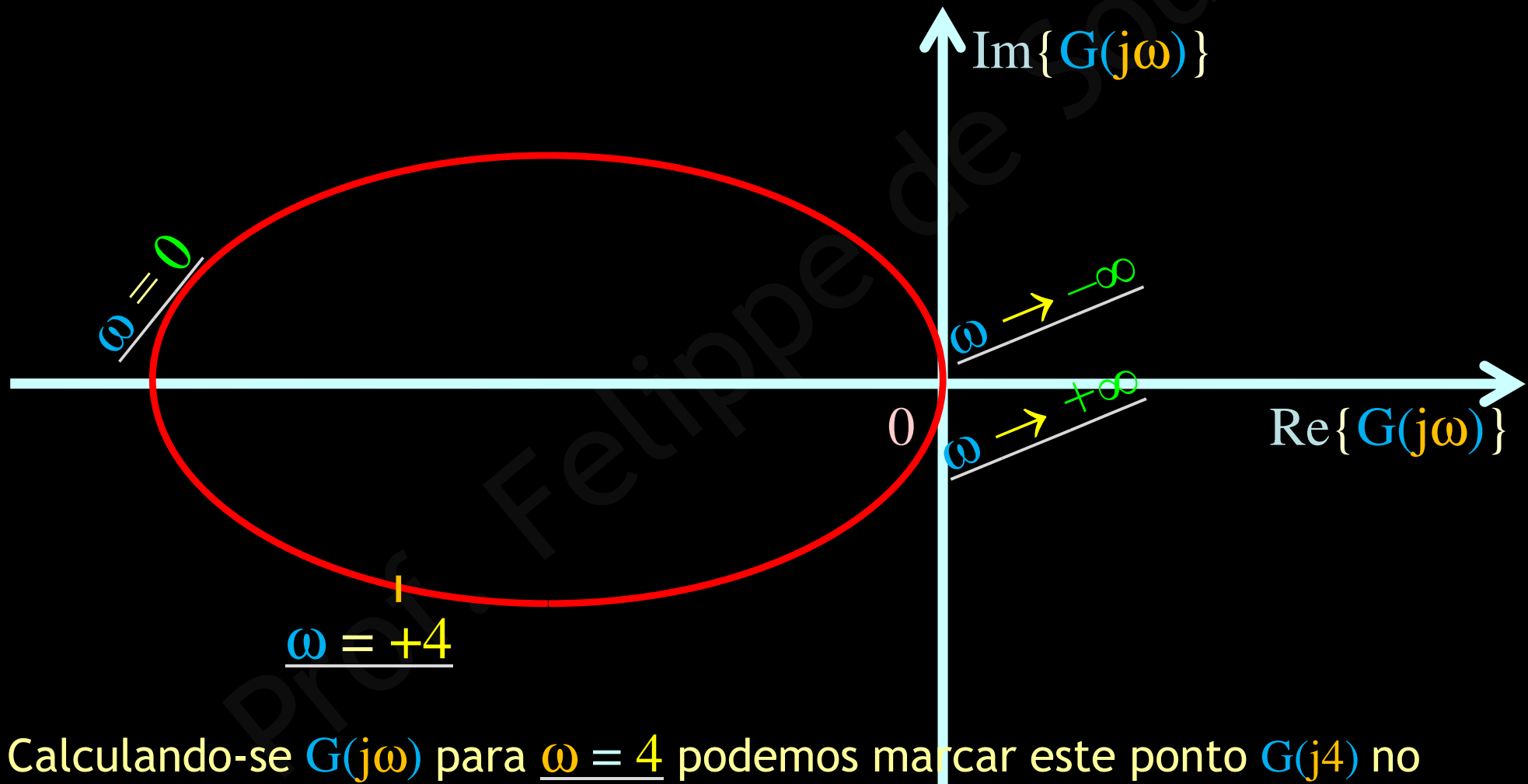
Percorrendo $G(j\omega)$ pelos pontos $\omega = 0$ e $\pm\infty$ pode-se determinar o sentido do Gráfico de Nyquist



Se calcularmos alguns ponto adicionais, podemos acompanhar ainda melhor $G(j\omega)$ quando ω varia de $+\infty$ a $-\infty$ e darmos *um sentido* (uma *direção*) a este Gráfico de Nyquist acima

O sentido do Gráfico de Nyquist

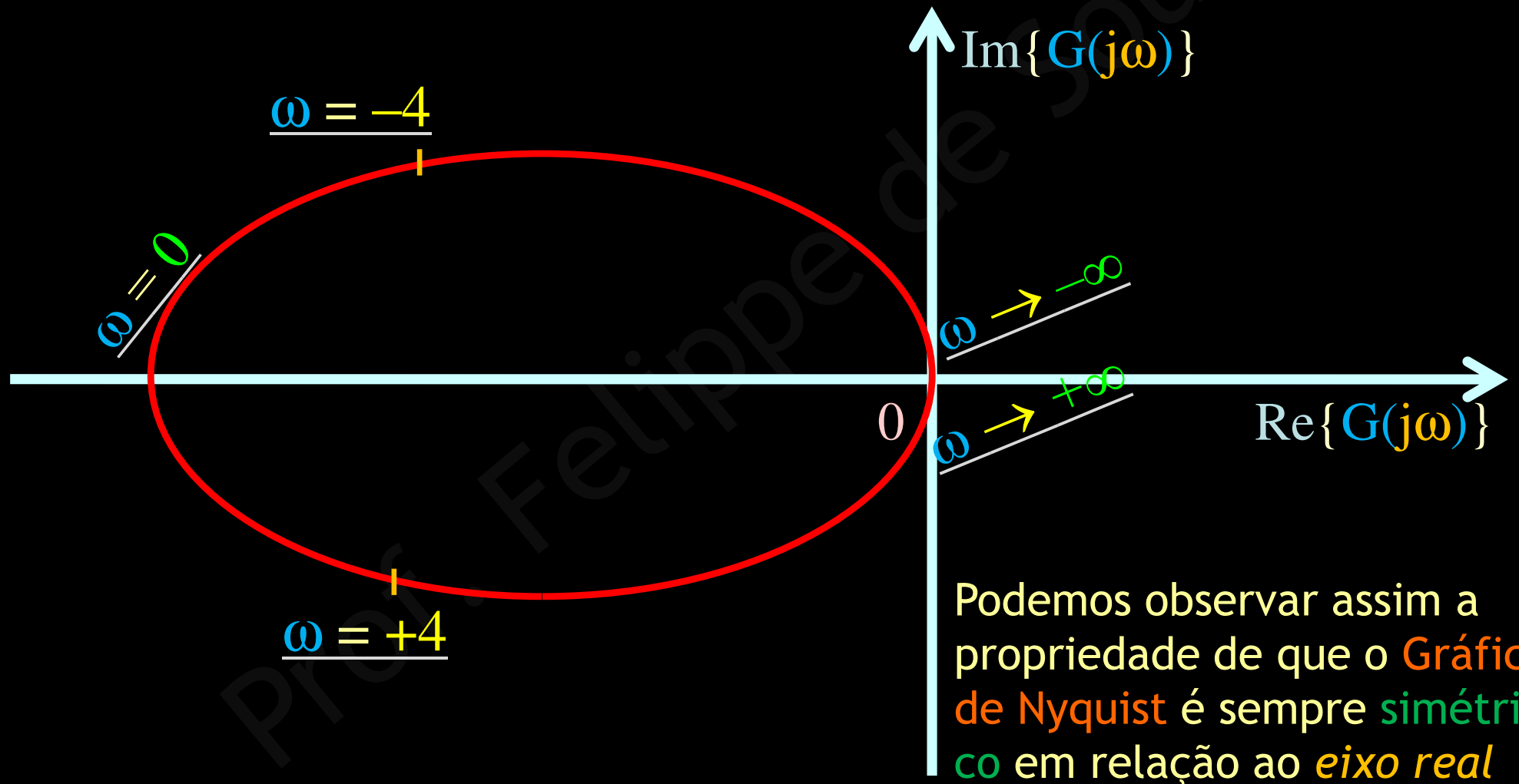
Escolhendo uma frequência ω entre $+\infty$ e 0 (como $\omega = 4$) podemos percorrer $G(j\omega)$ e determinar o *sentido* deste Gráfico de Nyquist.



Calculando-se $G(j\omega)$ para $\omega = 4$ podemos marcar este ponto $G(j4)$ no Gráfico de Nyquist acima

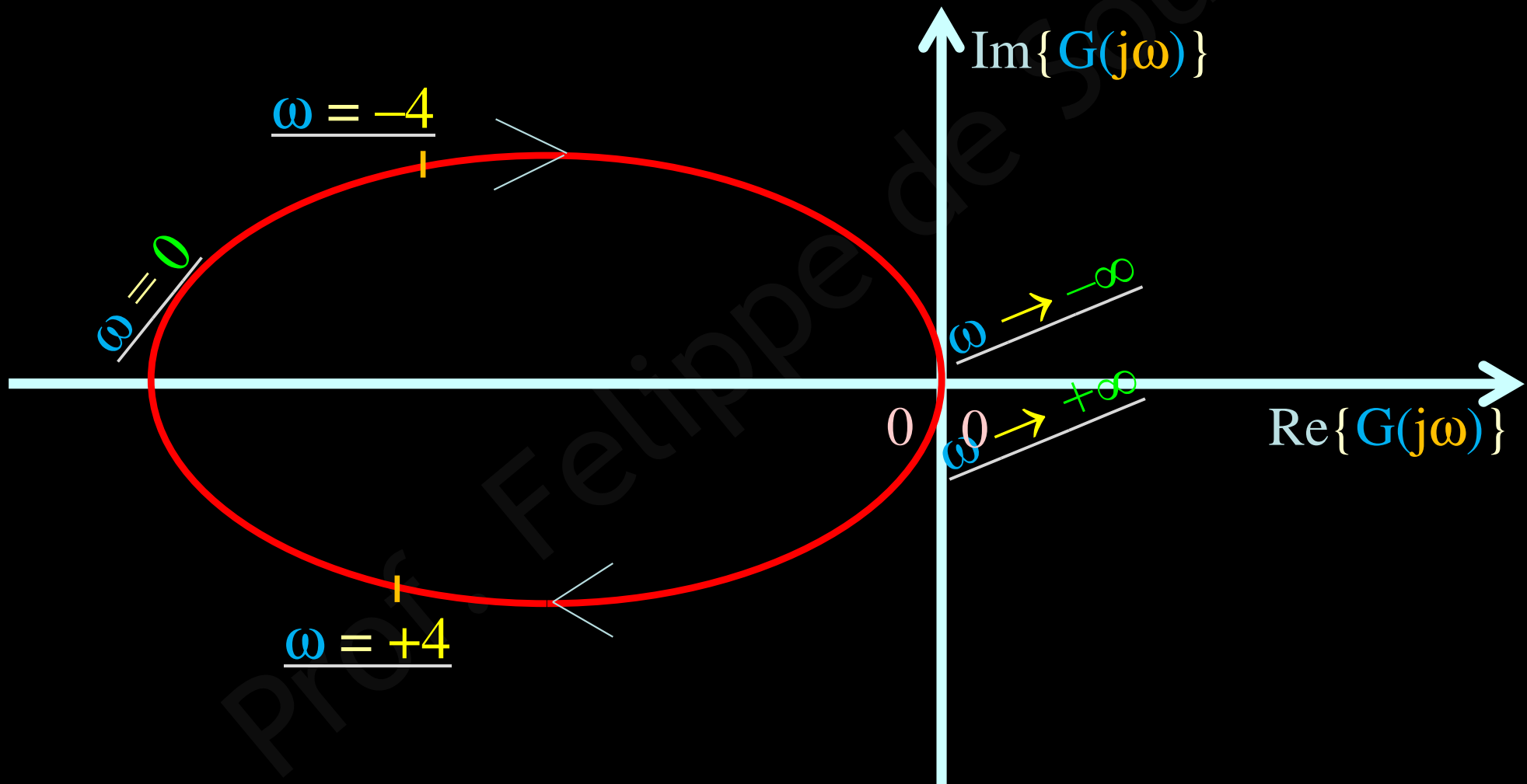
O sentido do Gráfico de Nyquist

Embora não fosse necessário, vamos também marcar mais 1 ponto no gráfico $G(j\omega)$ abaixo: $\omega = -4$

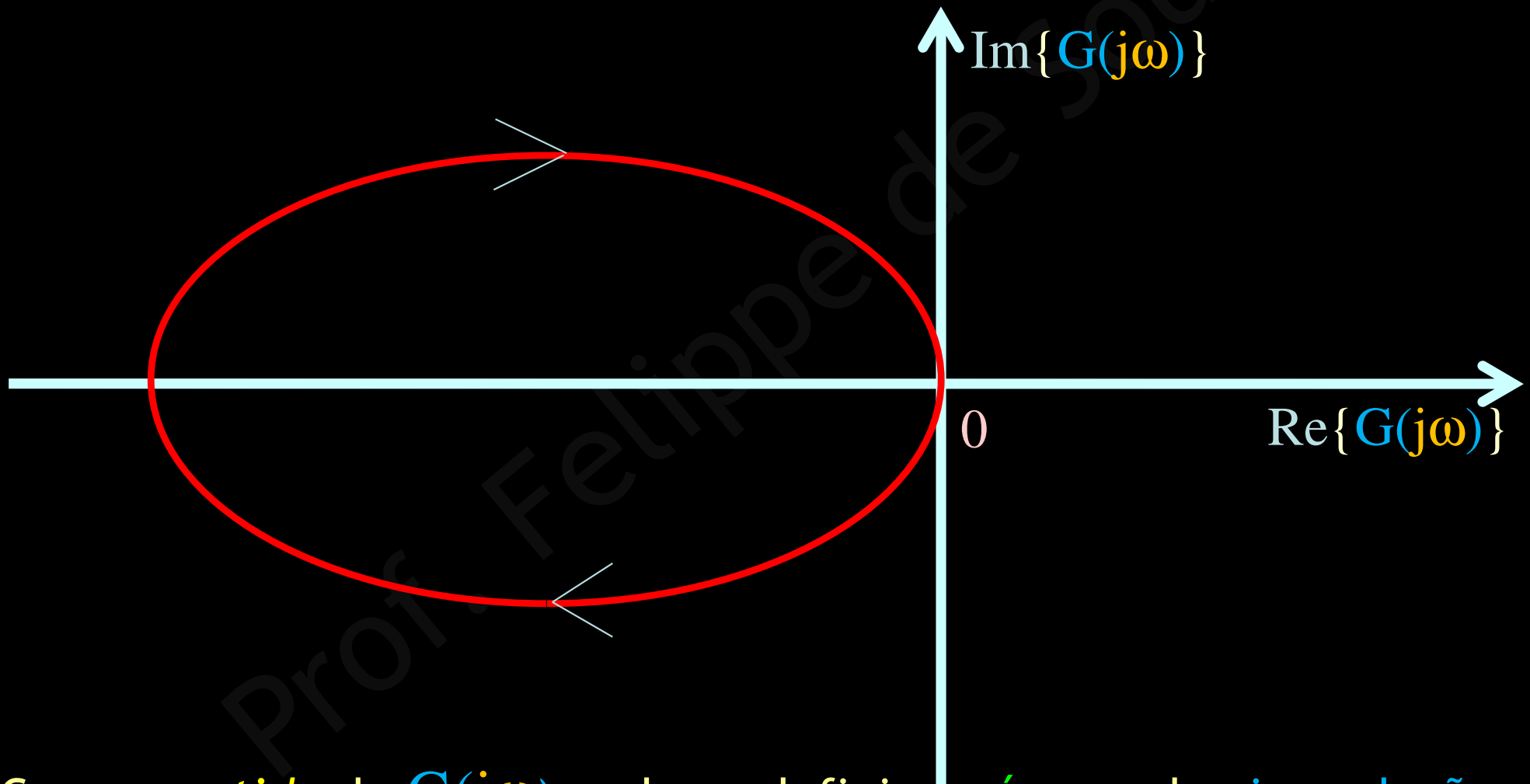


O sentido do Gráfico de Nyquist

Agora podemos colocar setas que indiquem o *sentido* (a *direção*) do Gráfico de Nyquist $G(j\omega)$



O sentido do Gráfico de Nyquist

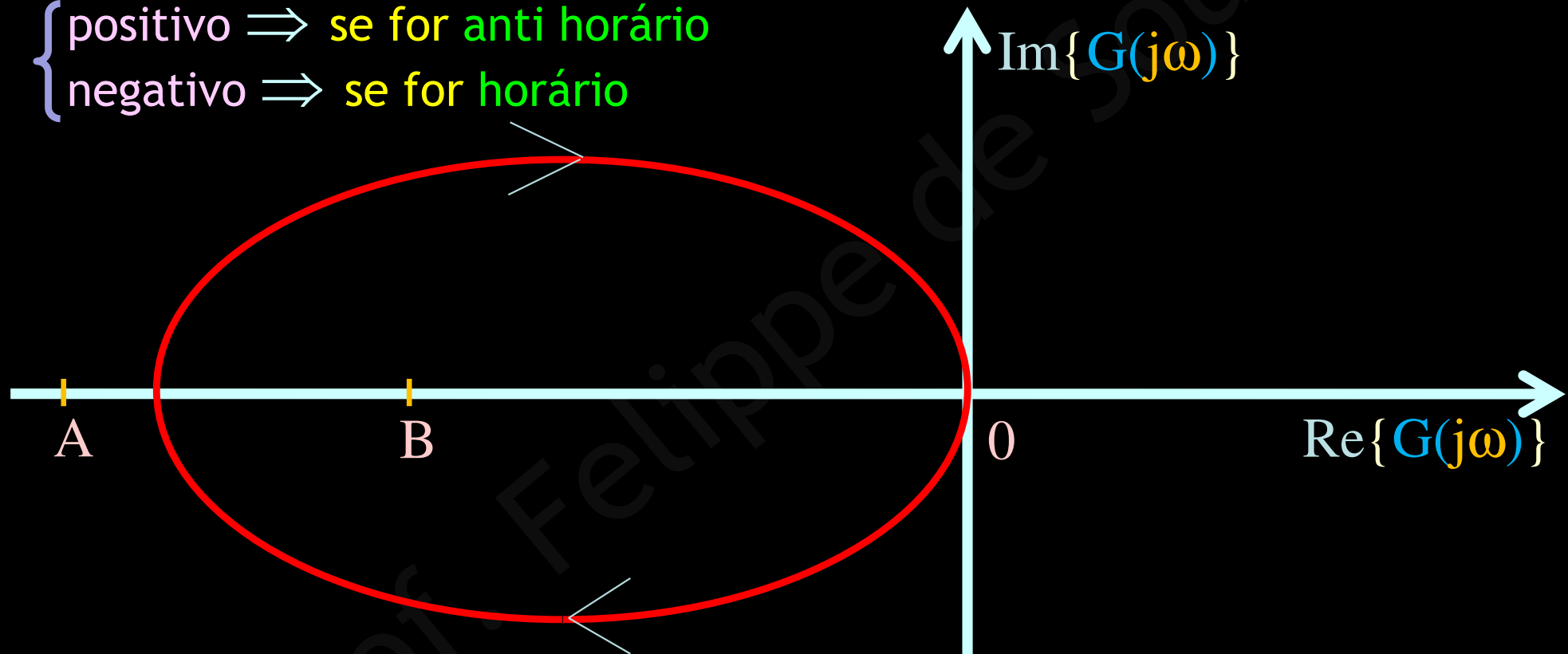


Com o *sentido* de $G(j\omega)$ pode-se definir o *número* de *circundações* do Gráfico de Nyquist em torno de um ponto no *eixo real*

O número de circundações do Gráfico de Nyquist

O número de circundações de $G(j\omega)$ em torno de um ponto no *eixo real* tem o sinal

{ positivo $\Rightarrow$ se for anti horário
negativo $\Rightarrow$ se for horário



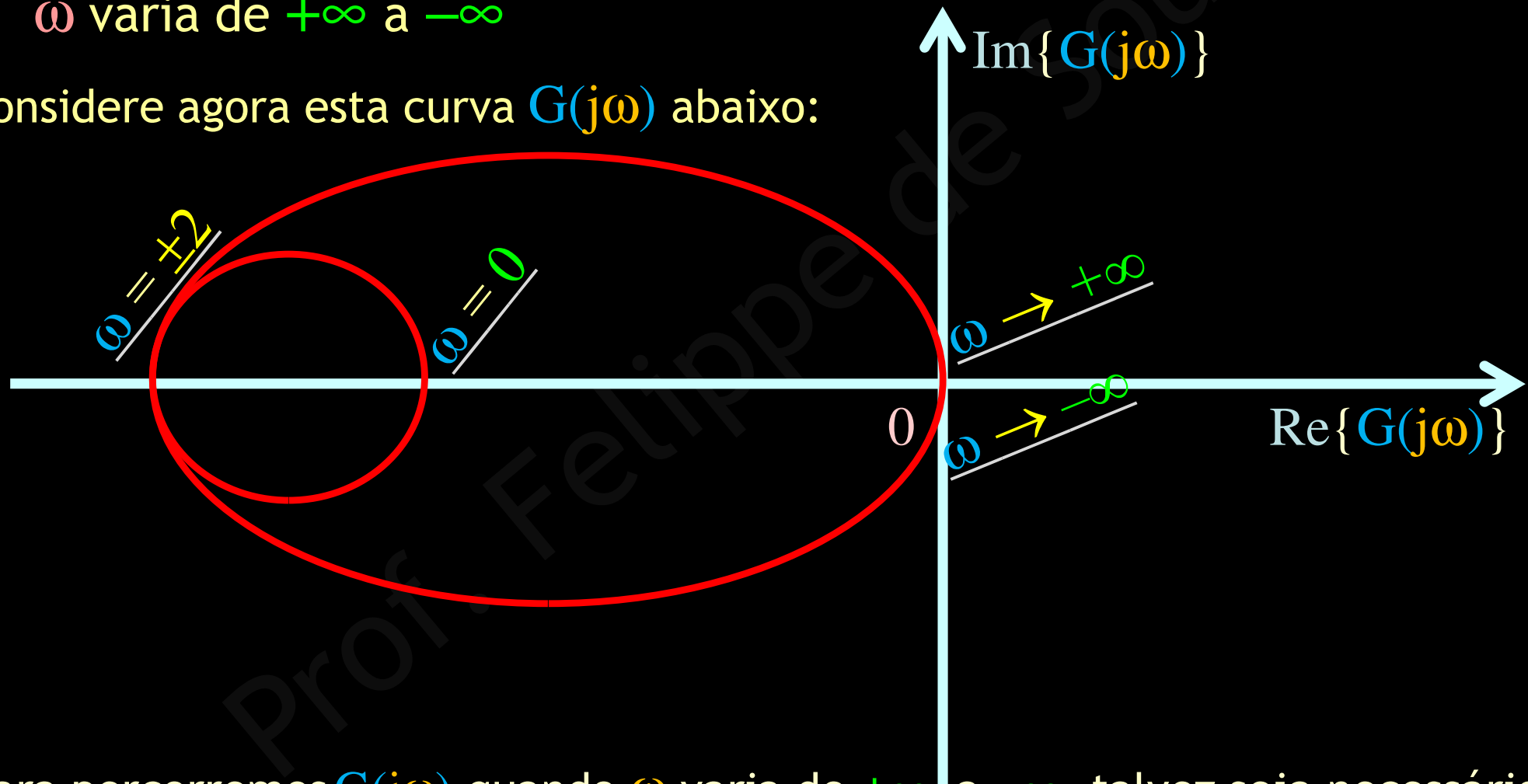
Por exemplo: O número de circundações de $G(j\omega)$ em torno do ponto

{ ponto A $\Rightarrow N_A = 0$
ponto B $\Rightarrow N_B = -1$

O sentido do Gráfico de Nyquist

Vamos ver agora um outro exemplo de como se dar um *sentido* (uma *direção*) ao Gráfico de Nyquist, percorrendo $G(j\omega)$ quando ω varia de $+\infty$ a $-\infty$

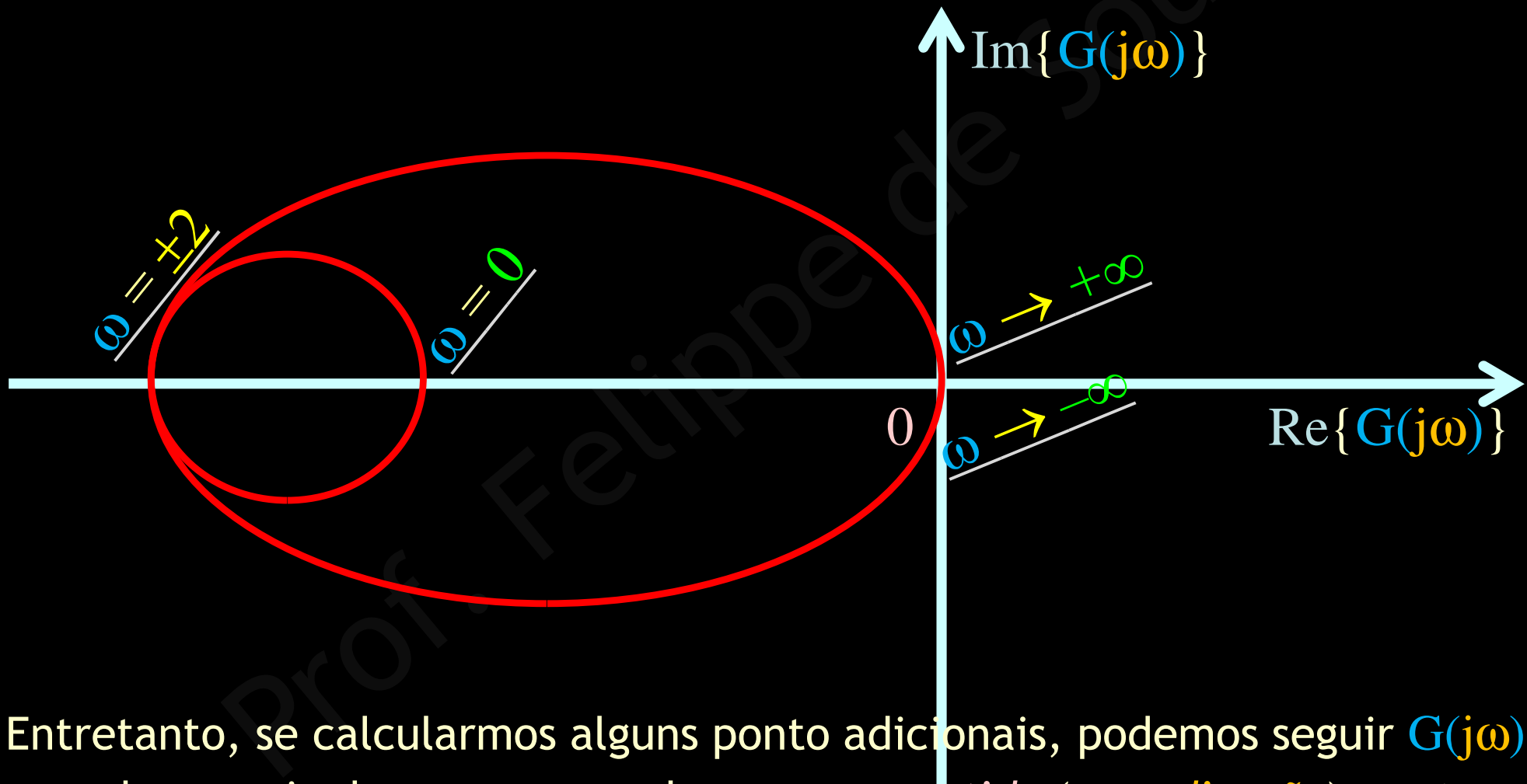
Considere agora esta curva $G(j\omega)$ abaixo:



Para percorrermos $G(j\omega)$ quando ω varia de $+\infty$ a $-\infty$, talvez seja necessário calcular *pontos adicionais* de ω como neste Gráfico de Nyquist acima

O sentido do Gráfico de Nyquist

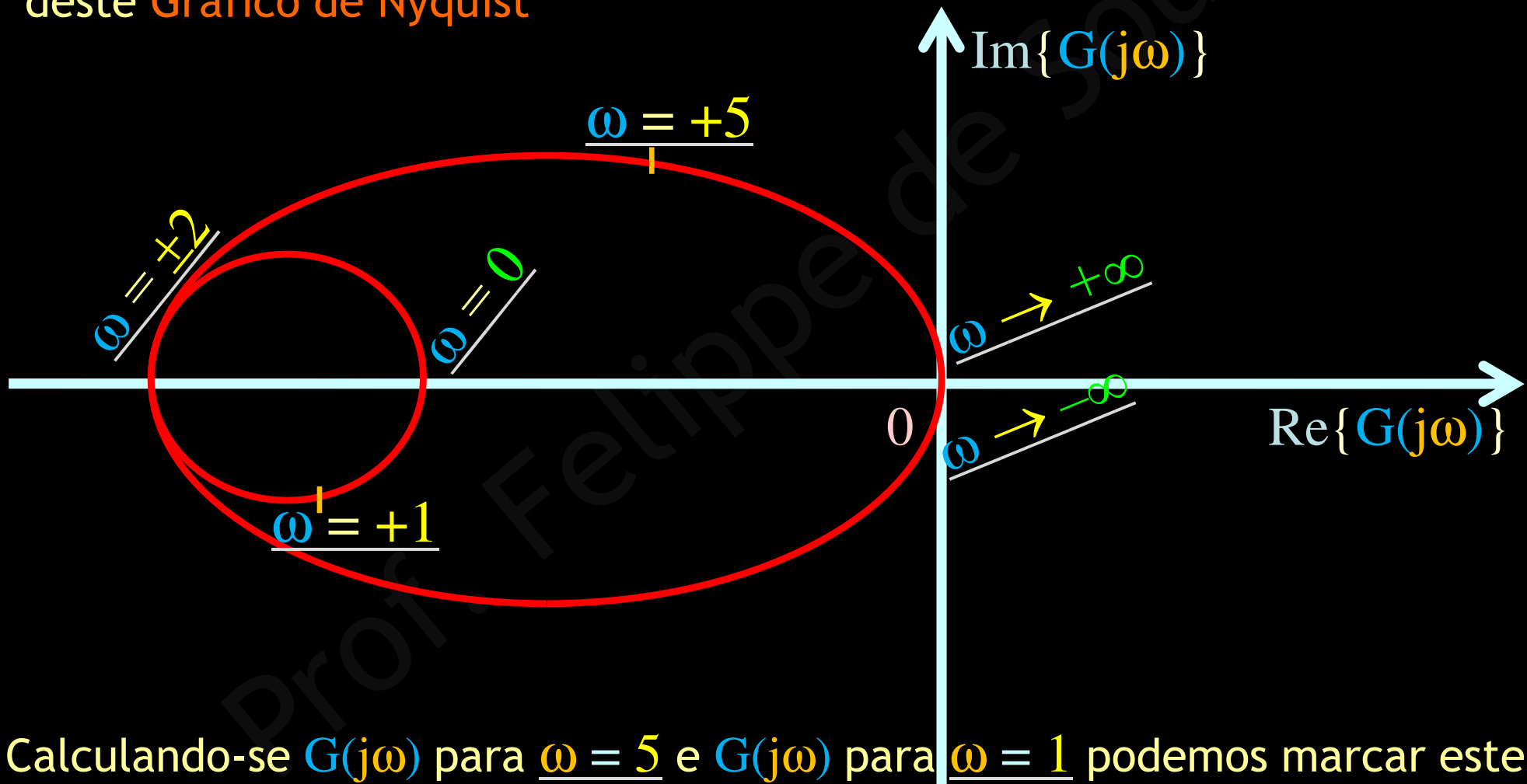
Percorrendo $G(j\omega)$ com apenas os pontos $\omega = 0$, ± 2 e $\pm\infty$ não é possível determinar ainda o sentido do Gráfico de Nyquist



Entretanto, se calcularmos alguns ponto adicionais, podemos seguir $G(j\omega)$ quando ω varia de $+\infty$ a $-\infty$ e darmos *um sentido* (uma *direção*) a este Gráfico de Nyquist acima.

O sentido do Gráfico de Nyquist

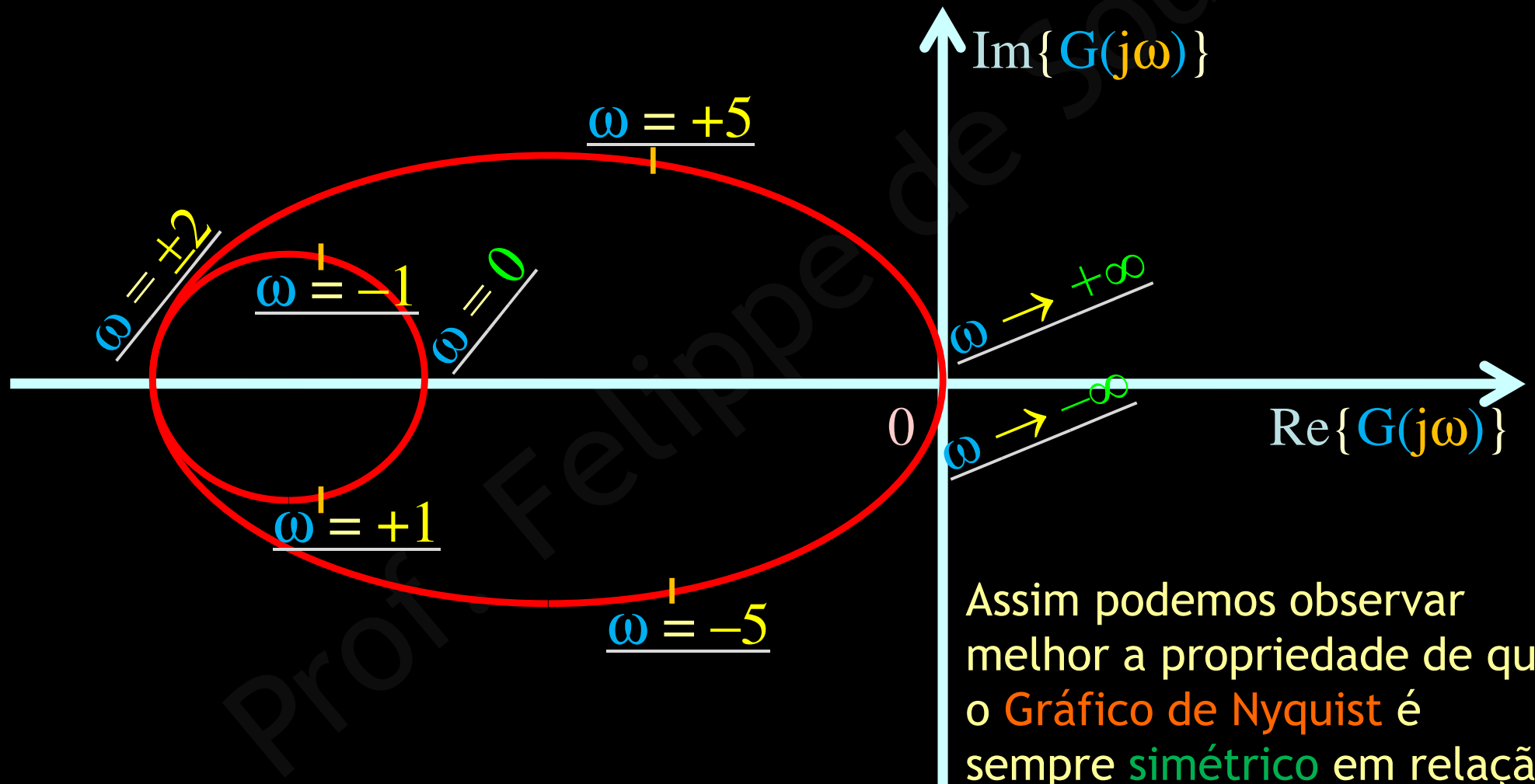
Se escolhermos um ω entre $+\infty$ e $+2$ (como $\omega = 5$) e outro ω entre $+2$ e 0 (como $\omega = 1$) já se torna possível percorrer $G(j\omega)$ e determinar o *sentido* deste Gráfico de Nyquist



Calculando-se $G(j\omega)$ para $\omega = 5$ e $G(j\omega)$ para $\omega = 1$ podemos marcar estes pontos $G(j5)$ e $G(j1)$ no Gráfico de Nyquist acima

O sentido do Gráfico de Nyquist

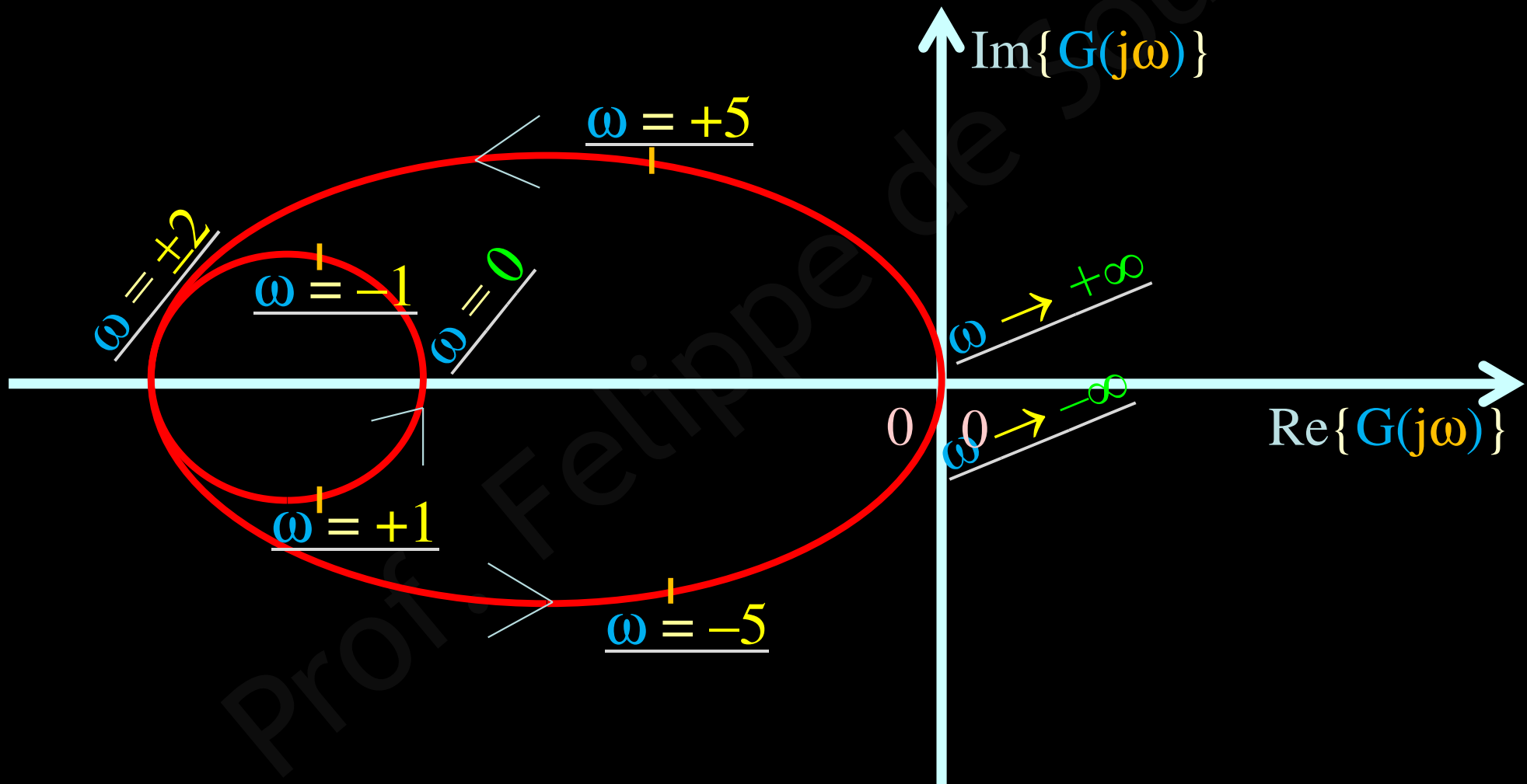
Embora não fosse necessário, vamos também marcar mais 2 pontos no gráfico $G(j\omega)$ abaixo: $\omega = -1$ e $\omega = -5$



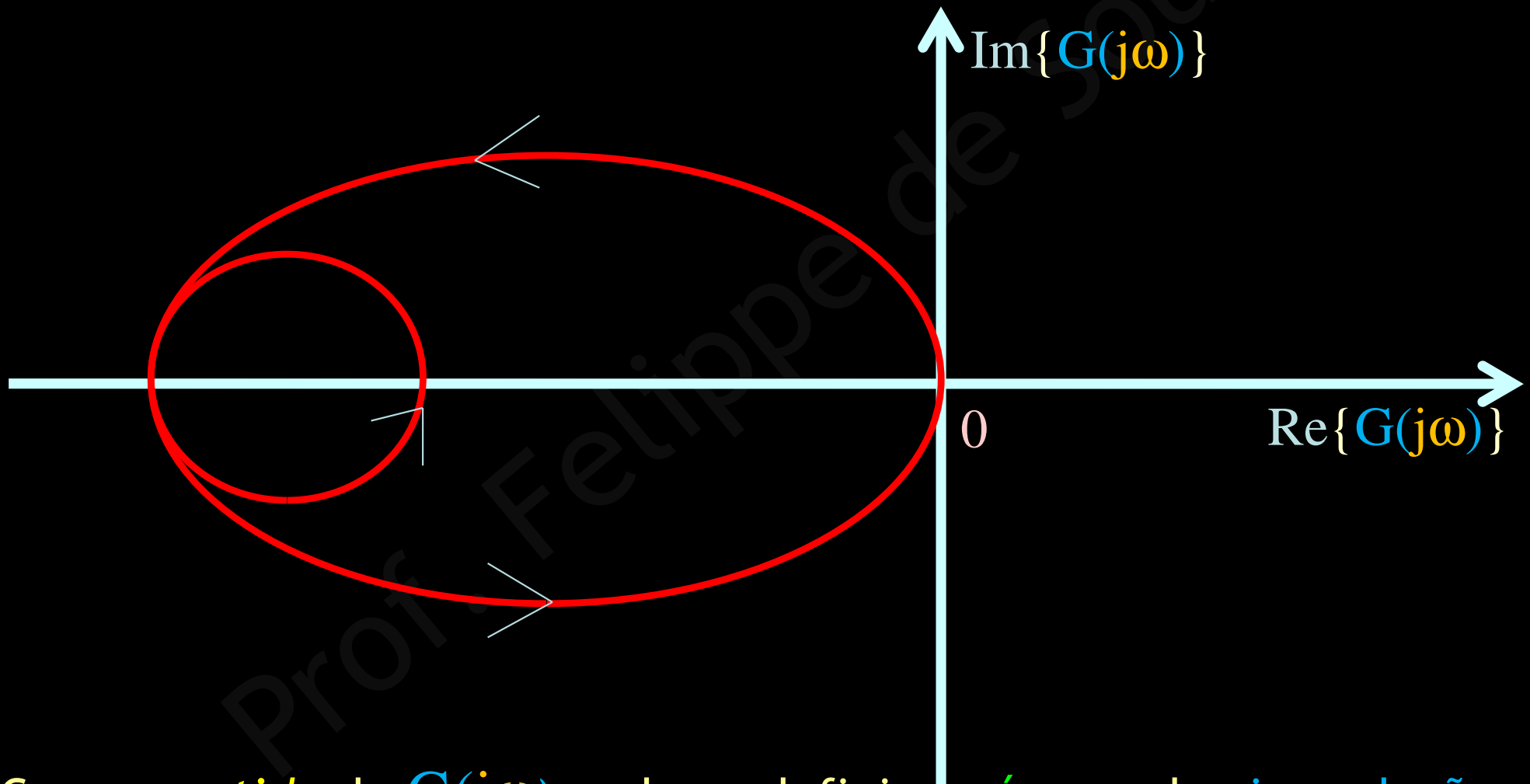
Assim podemos observar melhor a propriedade de que o Gráfico de Nyquist é sempre **simétrico** em relação ao *eixo real*

O sentido do Gráfico de Nyquist

Agora podemos colocar setas que indiquem o *sentido* (a *direção*) do Gráfico de Nyquist $G(j\omega)$



O sentido do Gráfico de Nyquist

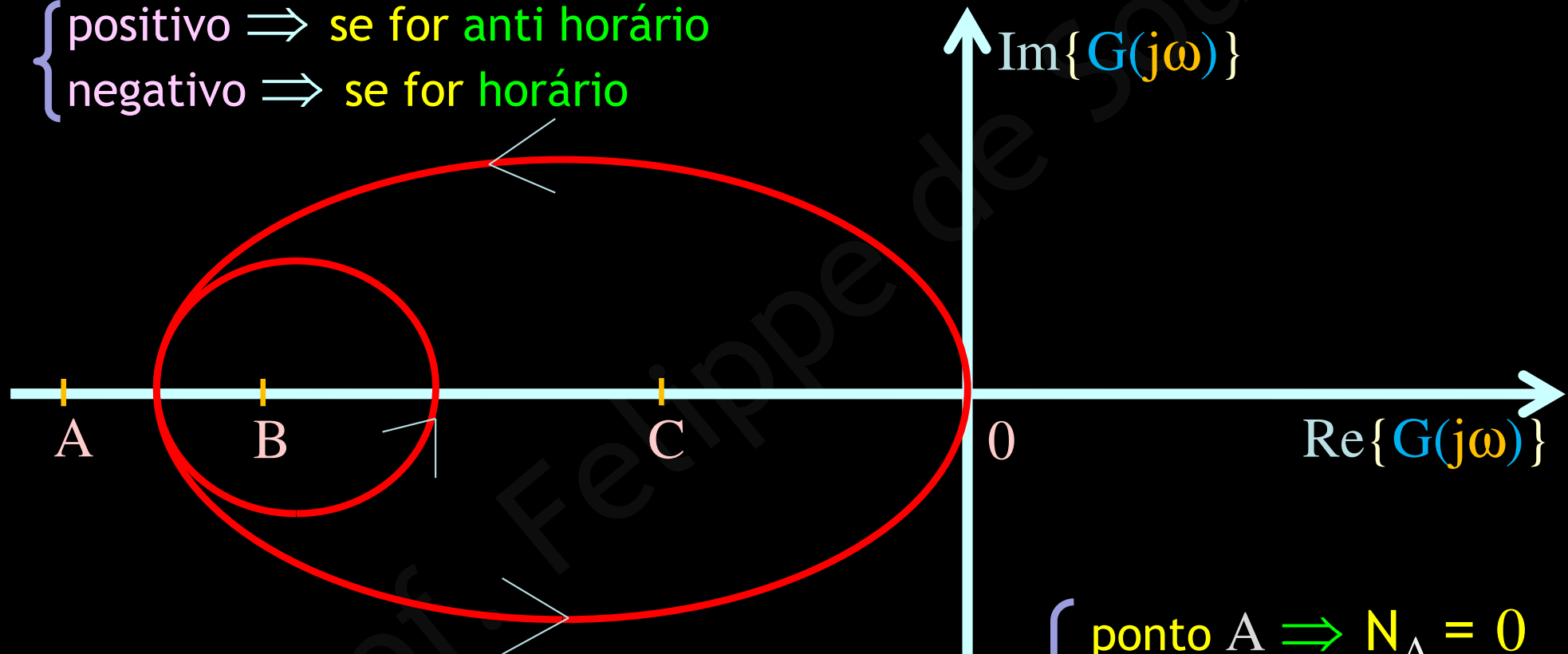


Com o *sentido* de $G(j\omega)$ pode-se definir o número de circundações do Gráfico de Nyquist em torno de um ponto no *eixo real*

O número de circundações do Gráfico de Nyquist

O número de circundações de $G(j\omega)$ em torno de um ponto no *eixo real* tem o sinal

{ positivo $\Rightarrow$ se for anti horário
negativo $\Rightarrow$ se for horário

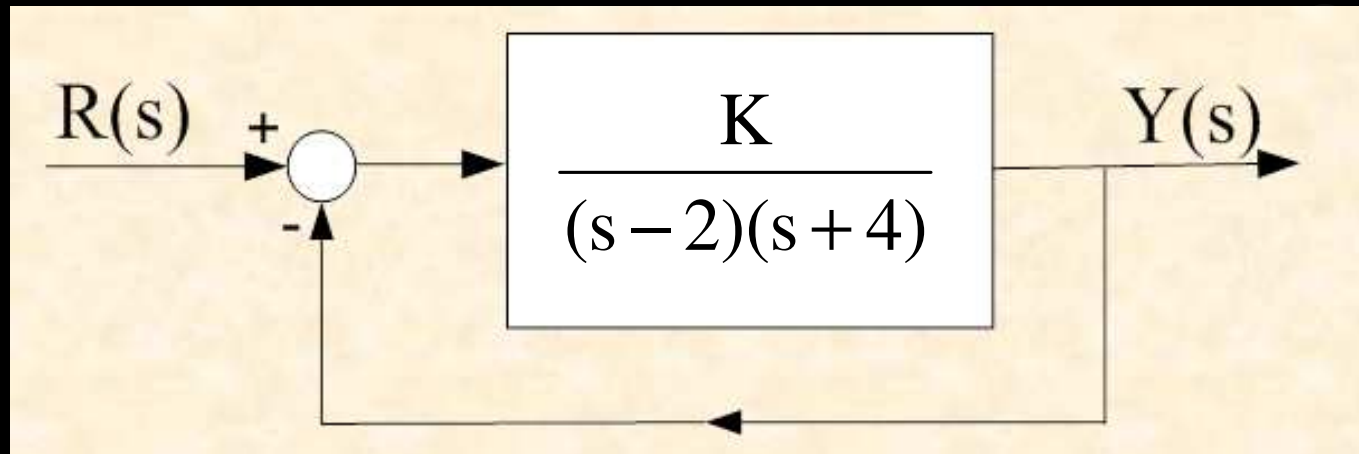


Por exemplo: O número de circundações de $G(j\omega)$ em torno do ponto

$\Rightarrow$ { ponto A $\Rightarrow N_A = 0$
ponto B $\Rightarrow N_B = +2$
ponto C $\Rightarrow N_C = +1$

A seguir alguns **Exemplos** de
Gráfico de Nyquist

Exemplo 1: Considere o *sistema* de malha fechada abaixo



logo,

$$G(s) = \frac{K}{(s-2)(s+4)}$$

e substituindo $s = j\omega$, obtemos:

$$G(j\omega) = \frac{-K(\omega^2 + 8)}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)} + j \frac{-2K\omega}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)}$$

Exemplo 1 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{-K(\omega^2 + 8)}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)} + j \frac{-2K\omega}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)}$$

Interseção com *eixo real* (parte imaginária = 0)

$$-2\omega = 0 \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow G(j\omega) = G(j0) = -K/8$$

Interseção com *eixo imaginário* (parte real = 0)

$\nexists \omega$ real que anula $\text{Re}\{G(j\omega)\}$, a parte real de $G(j\omega) \Rightarrow$

 { este Gráfico de Nyquist não intersesta o eixo imaginário

Exemplo 1 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{-K(\omega^2 + 8)}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)} + j \frac{-2K\omega}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)}$$

Limites no infinito ($G(j\omega)$ para $\omega = \pm \infty$)

$$G(j\infty) = 0^- + j0^-$$

(3º quadrante)

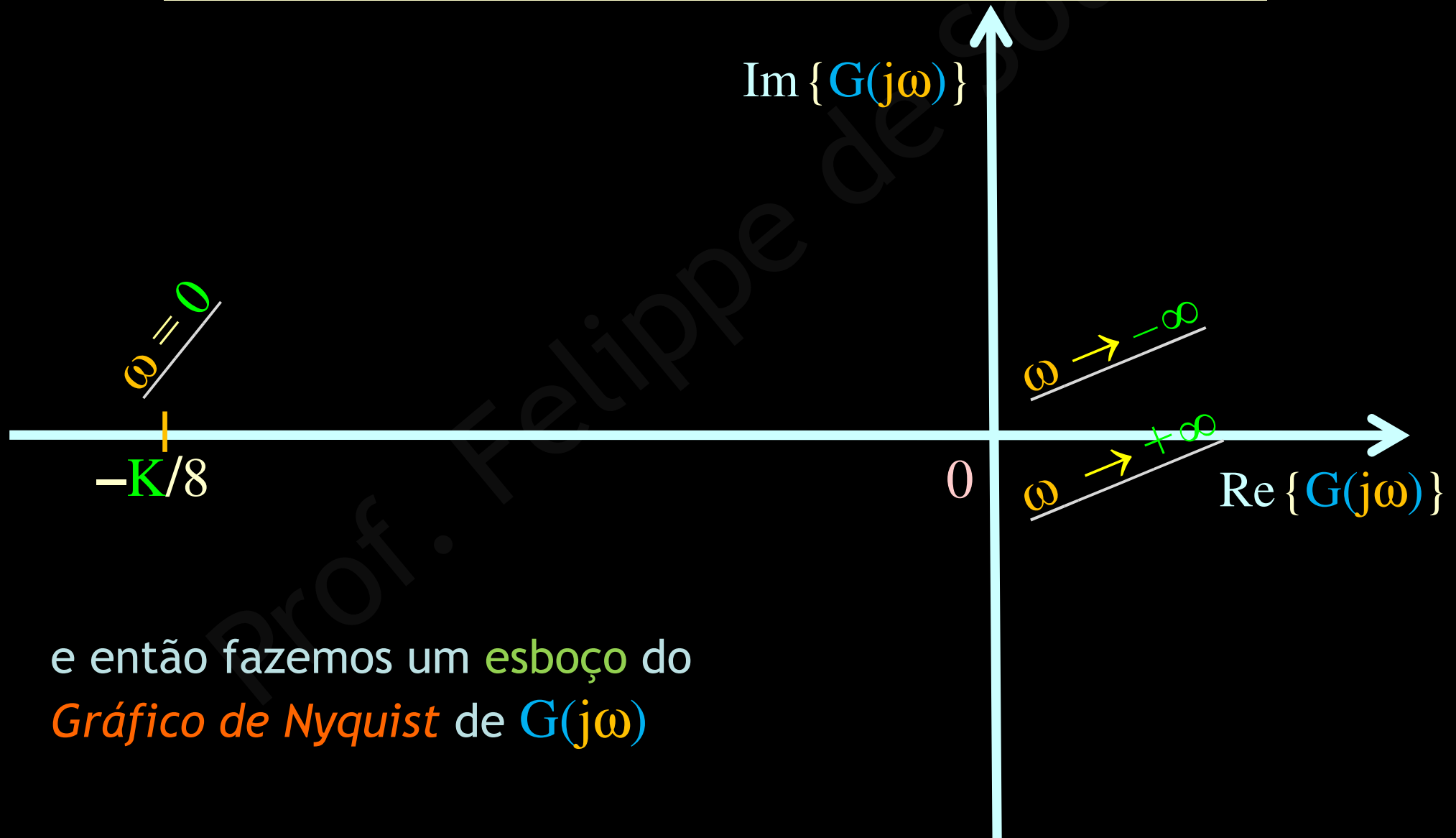
$$G(-j\infty) = 0^- + j0^+$$

(2º quadrante)

e agora marcamos no plano complexo estes
pontos de interseção e os *limites no infinito*

Exemplo 1 (continuação):

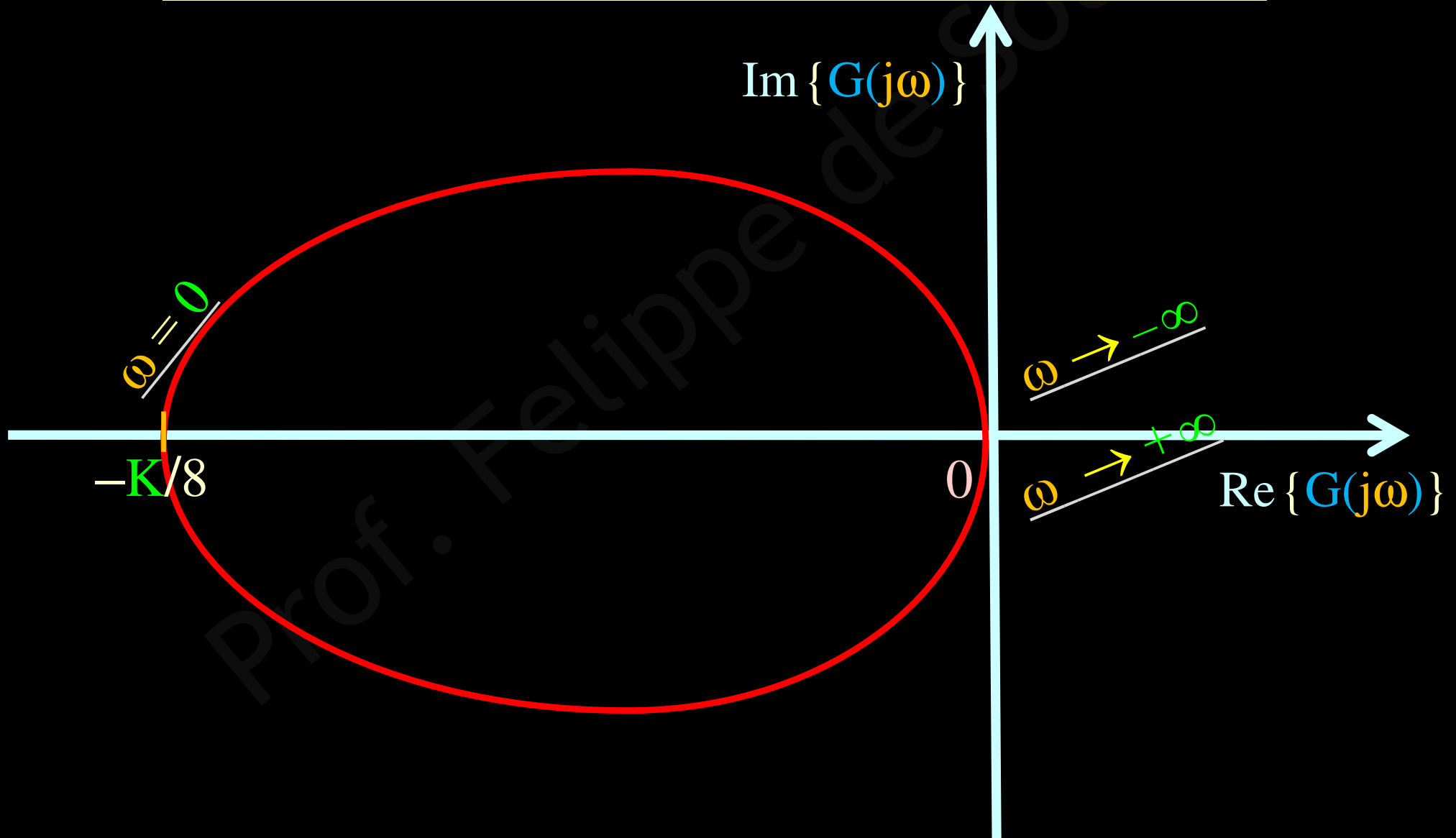
$$G(j\omega) = \frac{-K(\omega^2 + 8)}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)} + j \frac{-2K\omega}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)}$$



e então fazemos um **esboço** do
Gráfico de Nyquist de $G(j\omega)$

Exemplo 1 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{-K(\omega^2 + 8)}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)} + j \frac{-2K\omega}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)}$$



Exemplo 1 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{-K(\omega^2 + 8)}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)} + j \frac{-2K\omega}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)}$$

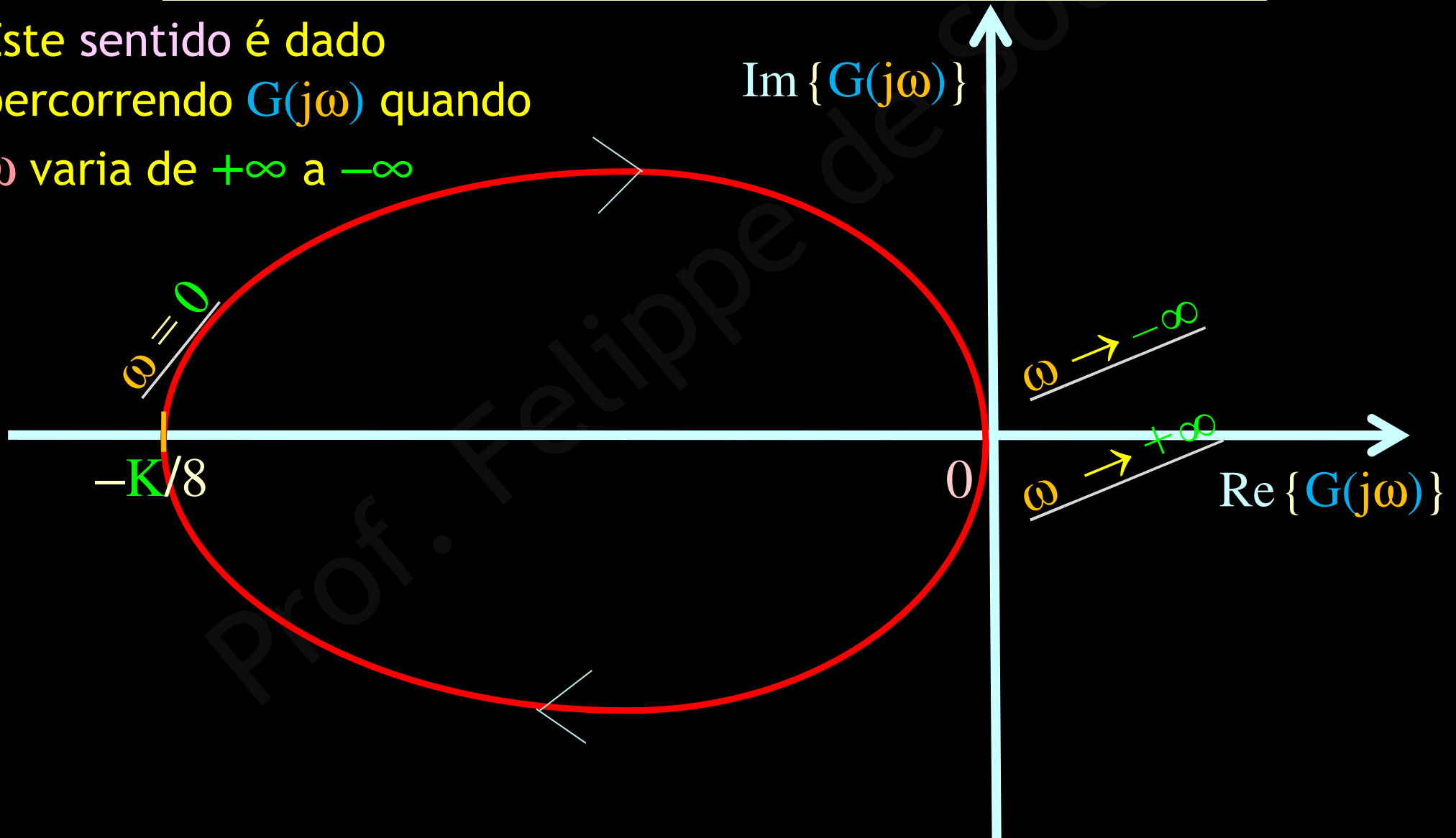
Mas ainda falta dar um sentido (uma *direção*) para este “*Gráfico de Nyquist*” ficar completo



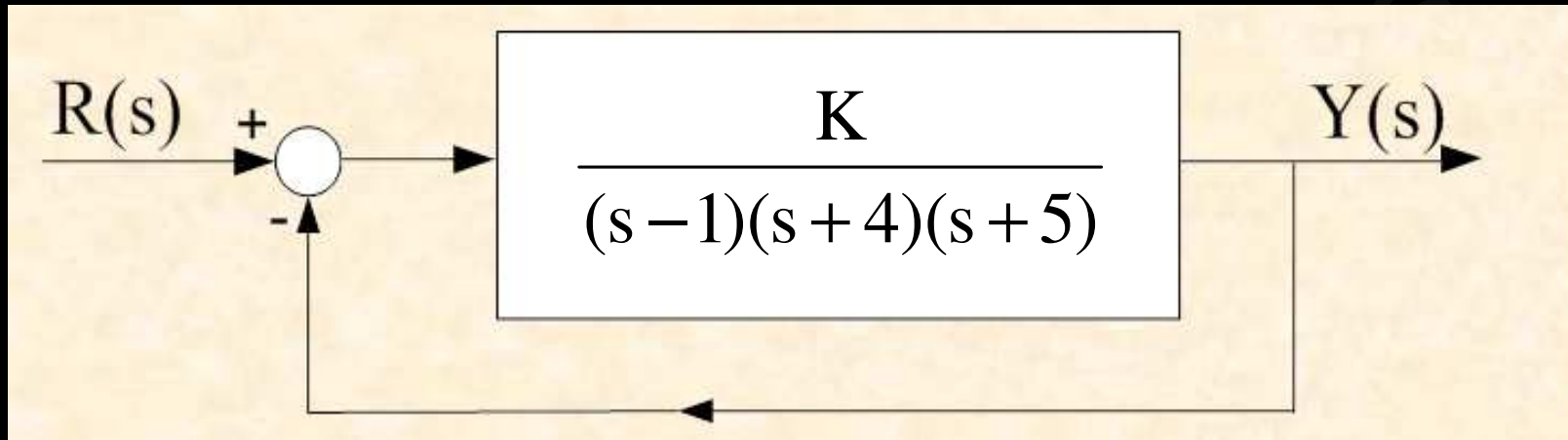
Exemplo 1 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{-K(\omega^2 + 8)}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)} + j \frac{-2K\omega}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)}$$

Este sentido é dado
percorrendo $G(j\omega)$ quando
 ω varia de $+\infty$ a $-\infty$



Exemplo 2: Considere o sistema de malha fechada abaixo



logo,

$$G(s) = \frac{K}{(s-1)(s+4)(s+5)}$$

e substituindo $s = j\omega$, obtemos:

$$G(j\omega) = \frac{-(8\omega^2 + 20)K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)} + j \frac{(\omega^2 - 11)\omega K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)}$$

Exemplo 2 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{-(8\omega^2 + 20)K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)} + j \frac{(\omega^2 - 11)\omega K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)}$$

Interseção com *eixo real* (parte imaginária = 0)

$$\omega = 0 \Rightarrow G(j\omega) = G(j0) = -K/20$$

$$\omega^2 = 11 \Rightarrow \omega = \pm 3,317 \Rightarrow G(j\omega) = G(\pm j3,317) = -K/108$$

Interseção com *eixo imaginário* (parte real = 0)

$\nexists \omega$ real que anula $\text{Re}\{G(j\omega)\}$, a parte real de $G(j\omega) \Rightarrow$

➡ este Gráfico de Nyquist não intersesta o *eixo imaginário*

Exemplo 2 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{-(8\omega^2 + 20) K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)} + j \frac{(\omega^2 - 11)\omega K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)}$$

Limites no infinito ($G(j\omega)$ para $\omega = \pm \infty$)

$$G(j\infty) = 0^- + j0^+$$

(2º quadrante)

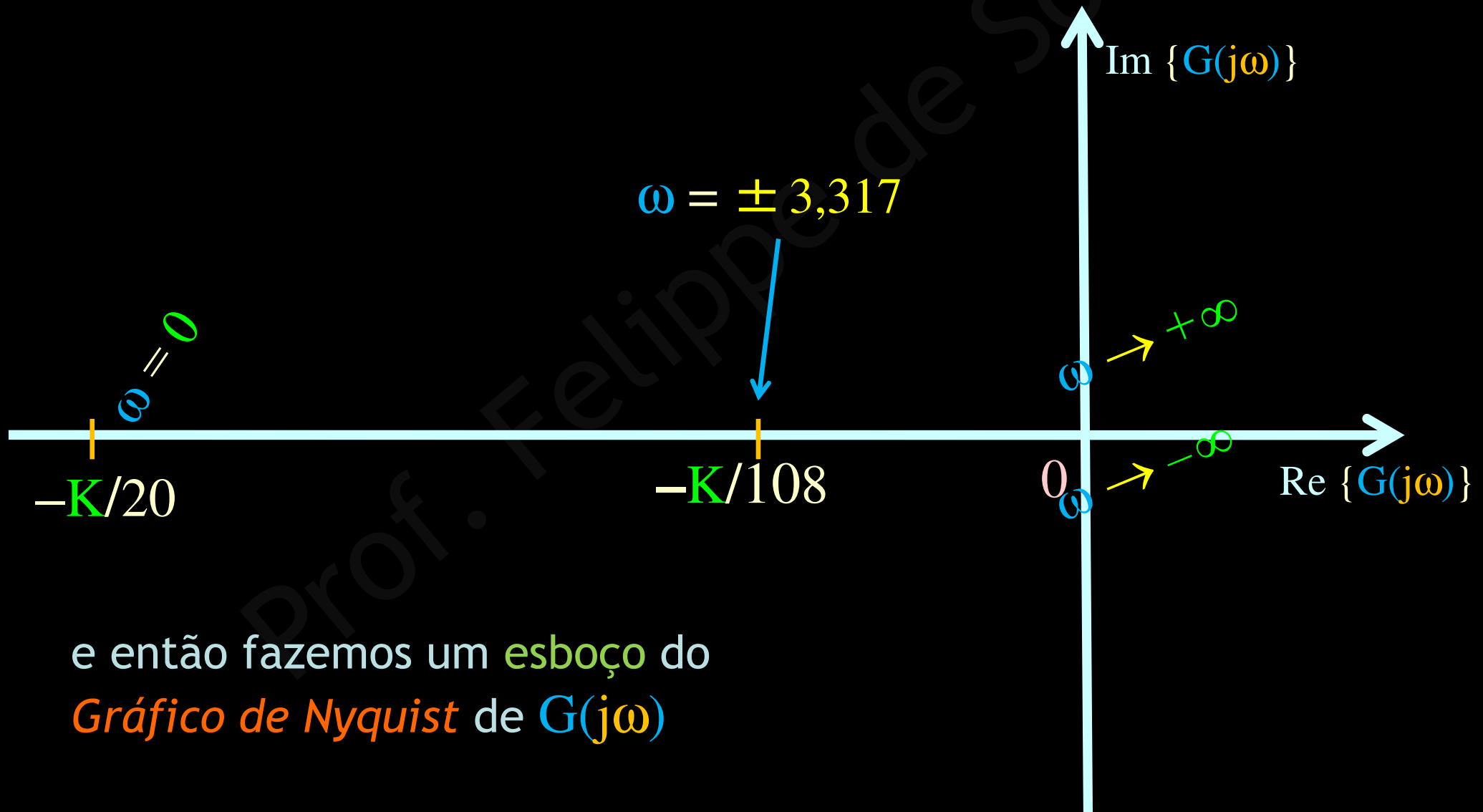
$$G(-j\infty) = 0^- + j0^-$$

(3º quadrante)

agora marcamos no plano complexo estes
pontos de interseção (já calculados) e os
limites no infinito

Exemplo 2 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{-(8\omega^2 + 20)K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)} + j \frac{(\omega^2 - 11)\omega K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)}$$

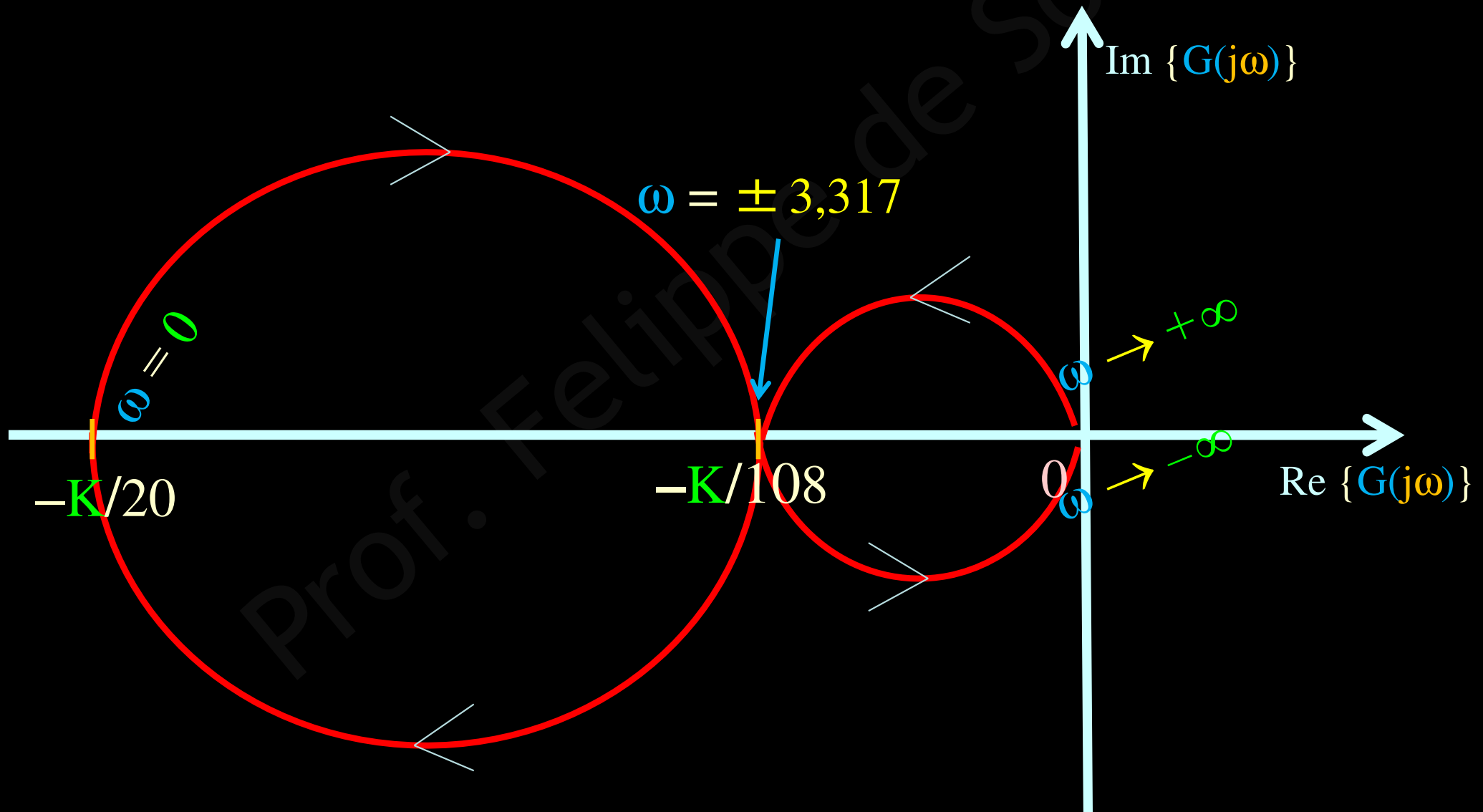


e então fazemos um **esboço** do
Gráfico de Nyquist de $G(j\omega)$

Análise no domínio da frequência

Exemplo 2 (continuação):

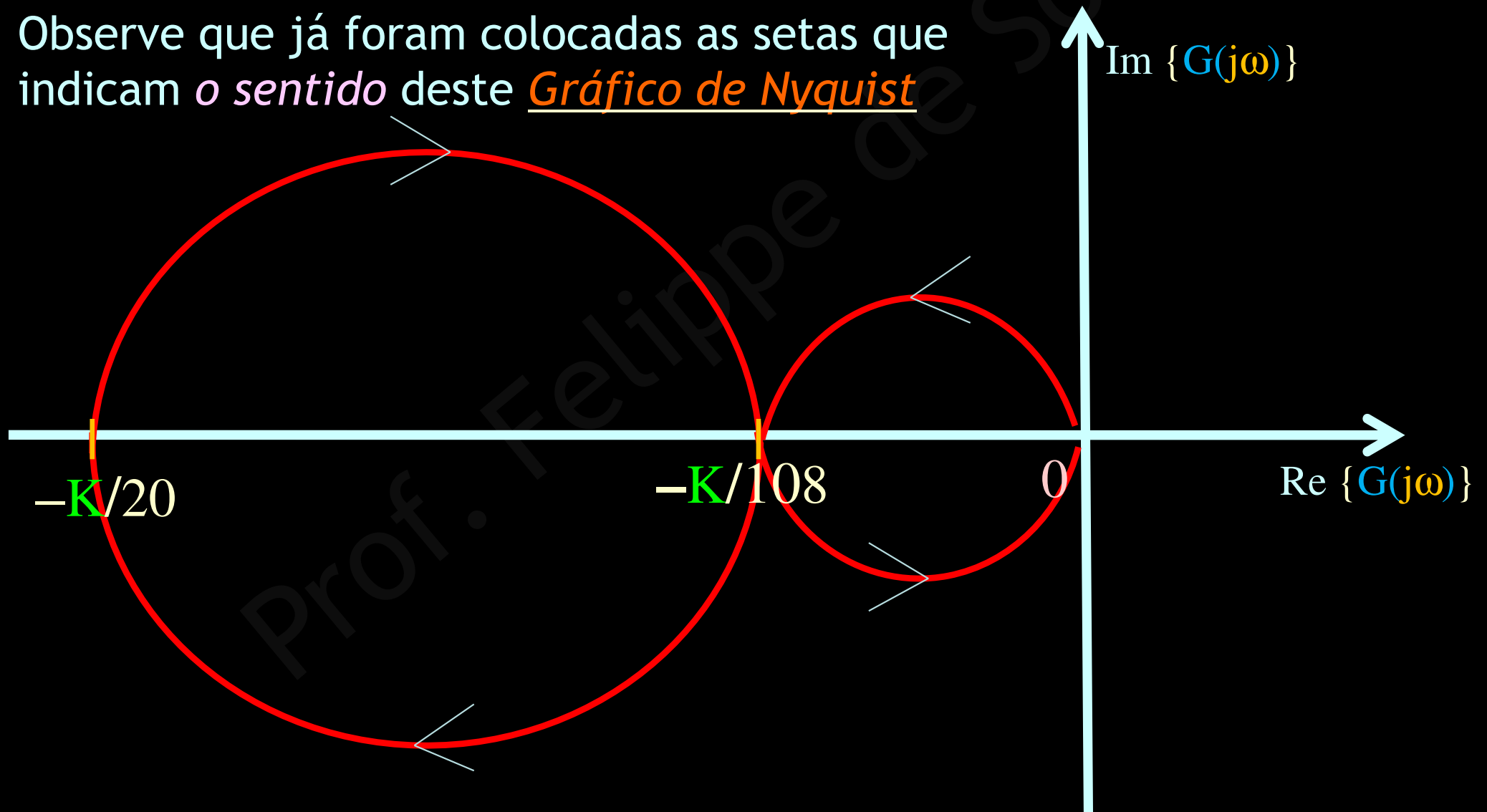
$$G(j\omega) = \frac{-(8\omega^2 + 20)K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)} + j \frac{(\omega^2 - 11)\omega K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)}$$



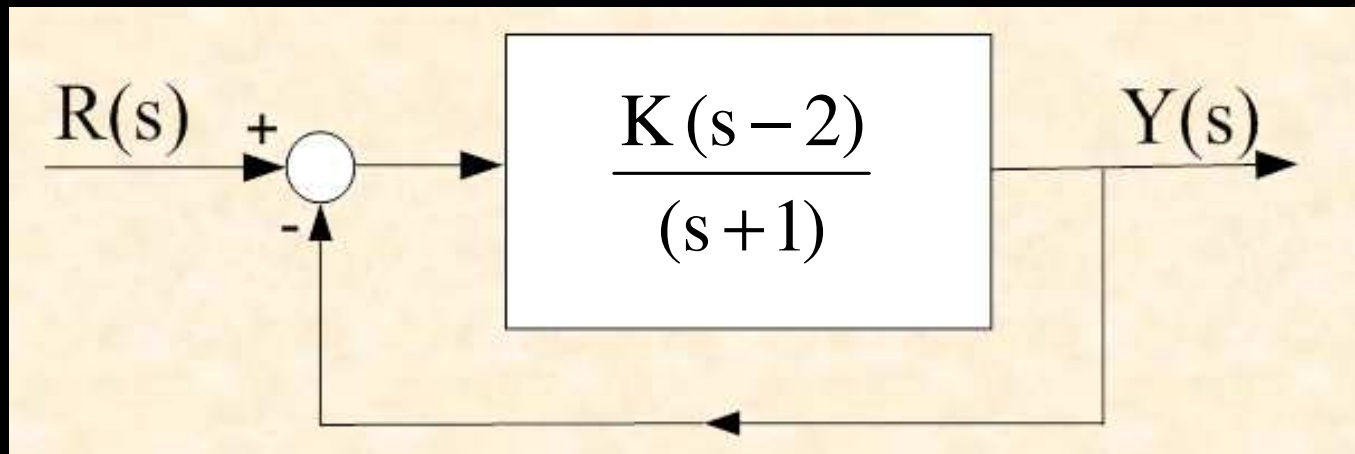
Exemplo 2 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{-(8\omega^2 + 20)K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)} + j \frac{(\omega^2 - 11)\omega K}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 25)}$$

Observe que já foram colocadas as setas que indicam o *sentido* deste Gráfico de Nyquist



Exemplo 3: Considere o *sistema* de malha fechada abaixo:



logo,

$$G(s) = \frac{K(s-2)}{(s+1)}$$

e substituindo $s = j\omega$, obtemos:

$$G(j\omega) = \frac{(\omega^2 - 2)K}{(\omega^2 + 1)} + j \frac{3\omega K}{(\omega^2 + 1)}$$

Exemplo 3 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{(\omega^2 - 2)K}{(\omega^2 + 1)} + j \frac{3\omega K}{(\omega^2 + 1)}$$

Interseção com *eixo real* (parte imaginária = 0)

$$\omega = 0 \Rightarrow G(j\omega) = G(j0) = -2K = -K / (1/2)$$

Interseção com *eixo imaginário* (parte real = 0)

$$\omega^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \omega = +1,412 \Rightarrow G(j\omega) = +j 1,412 \cdot K \\ \omega = -1,412 \Rightarrow G(j\omega) = -j 1,412 \cdot K \end{cases}$$

Exemplo 3 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{(\omega^2 - 2)K}{(\omega^2 + 1)} + j \frac{3\omega K}{(\omega^2 + 1)}$$

Limites no infinito ($G(j\omega)$ para $\omega = \pm \infty$)

$$G(j\infty) = K + j0^+$$

(1º quadrante)

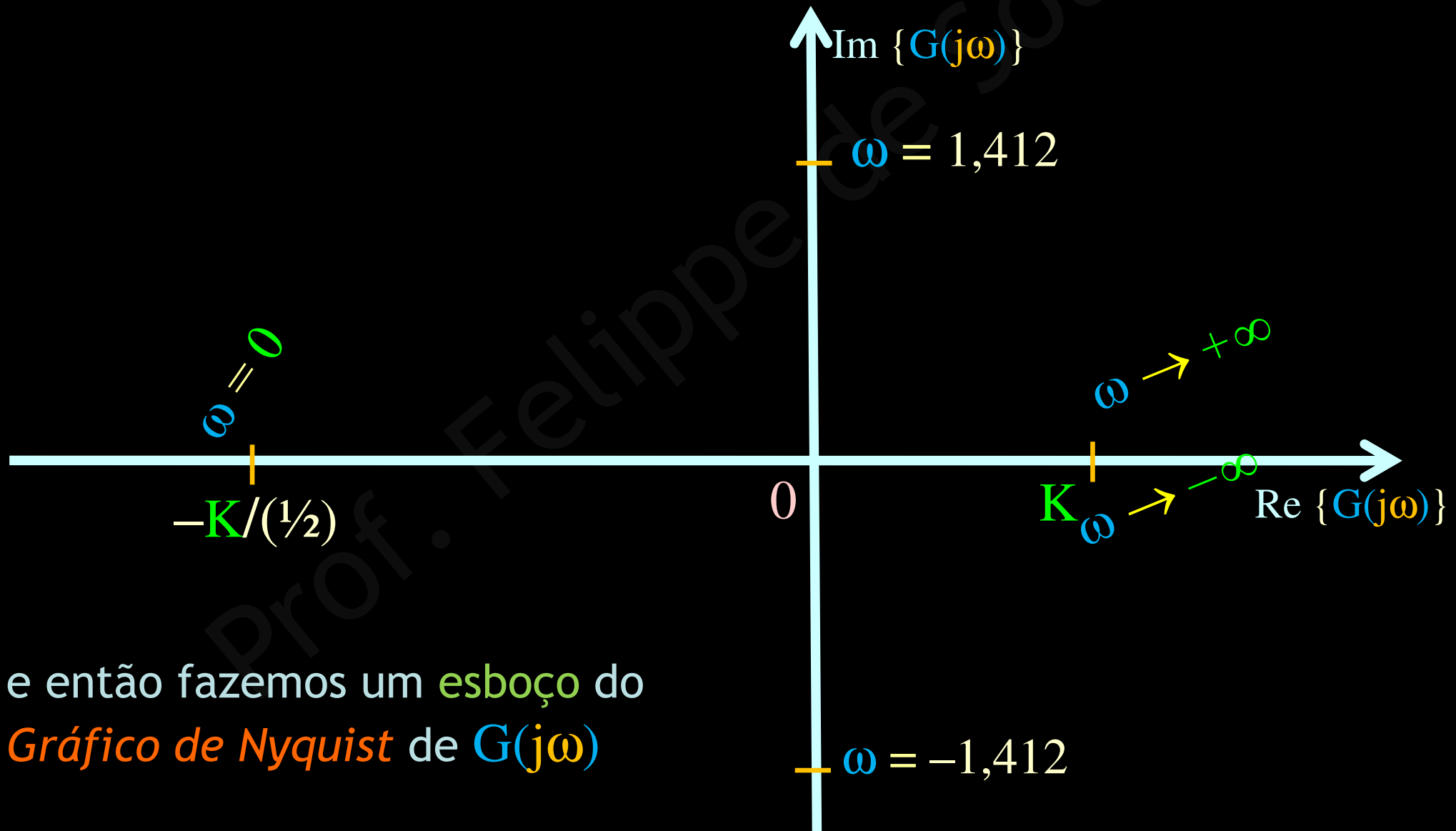
$$G(-j\infty) = K + j0^-$$

(4º quadrante)

agora marcamos no plano complexo estes
pontos de interseção e os *limites no infinito*

Exemplo 3 (continuação):

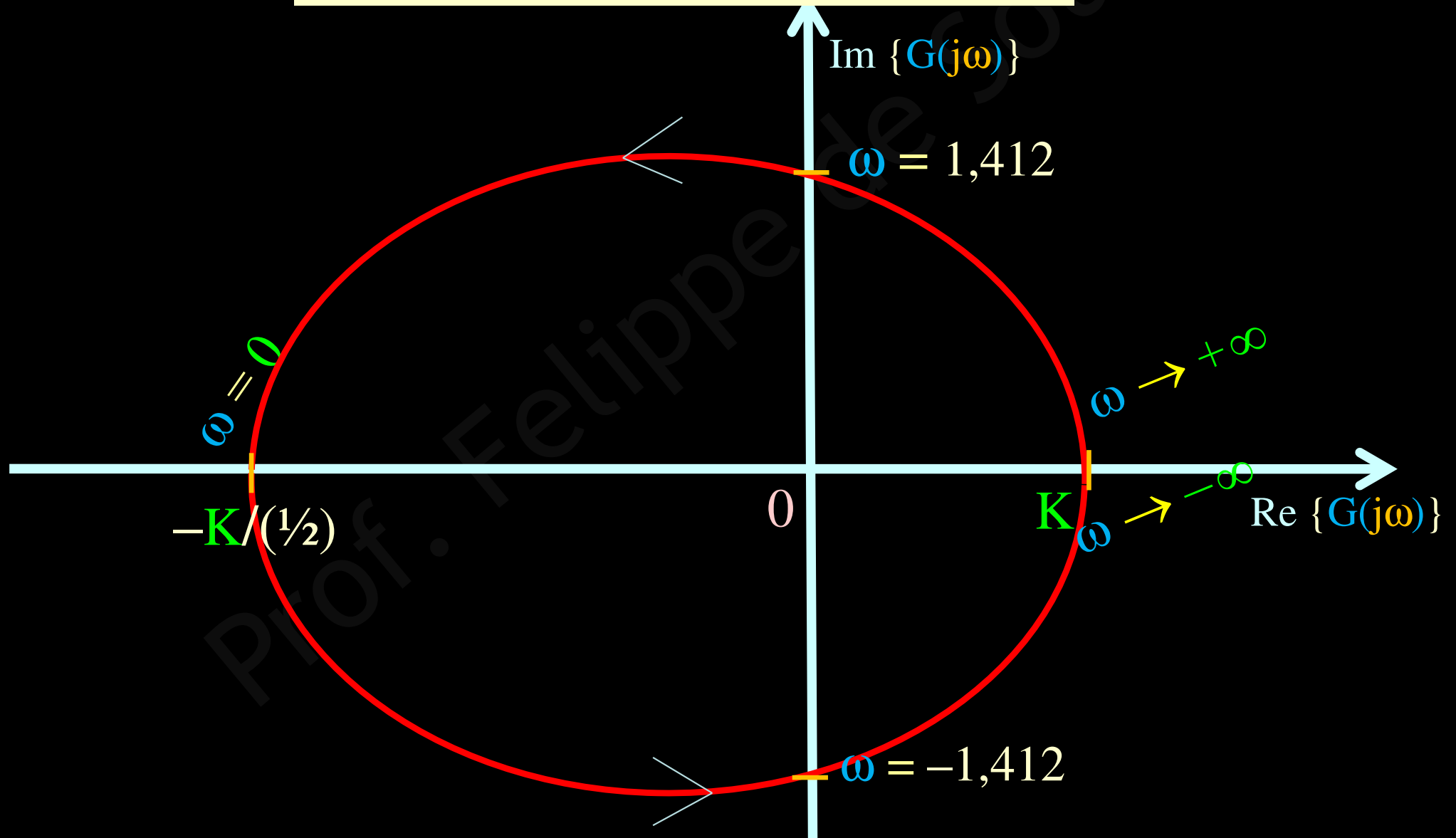
$$G(j\omega) = \frac{(\omega^2 - 2)K}{(\omega^2 + 1)} + j \frac{3\omega K}{(\omega^2 + 1)}$$



e então fazemos um **esboço** do
Gráfico de Nyquist de $G(j\omega)$

Exemplo 3 (continuação):

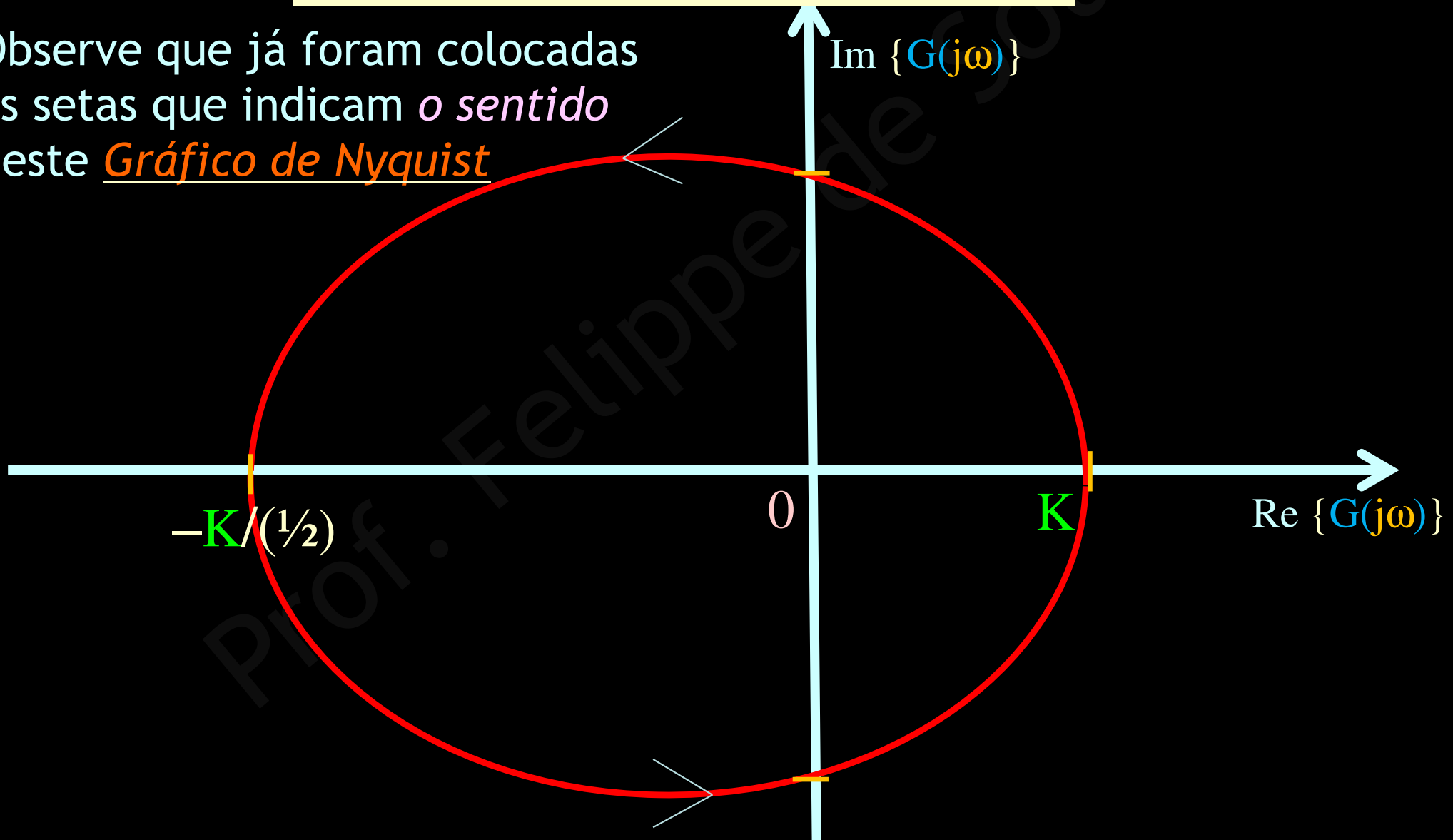
$$G(j\omega) = \frac{(\omega^2 - 2)K}{(\omega^2 + 1)} + j \frac{3\omega K}{(\omega^2 + 1)}$$



Exemplo 3 (continuação):

$$G(j\omega) = \frac{(\omega^2 - 2)K}{(\omega^2 + 1)} + j \frac{3\omega K}{(\omega^2 + 1)}$$

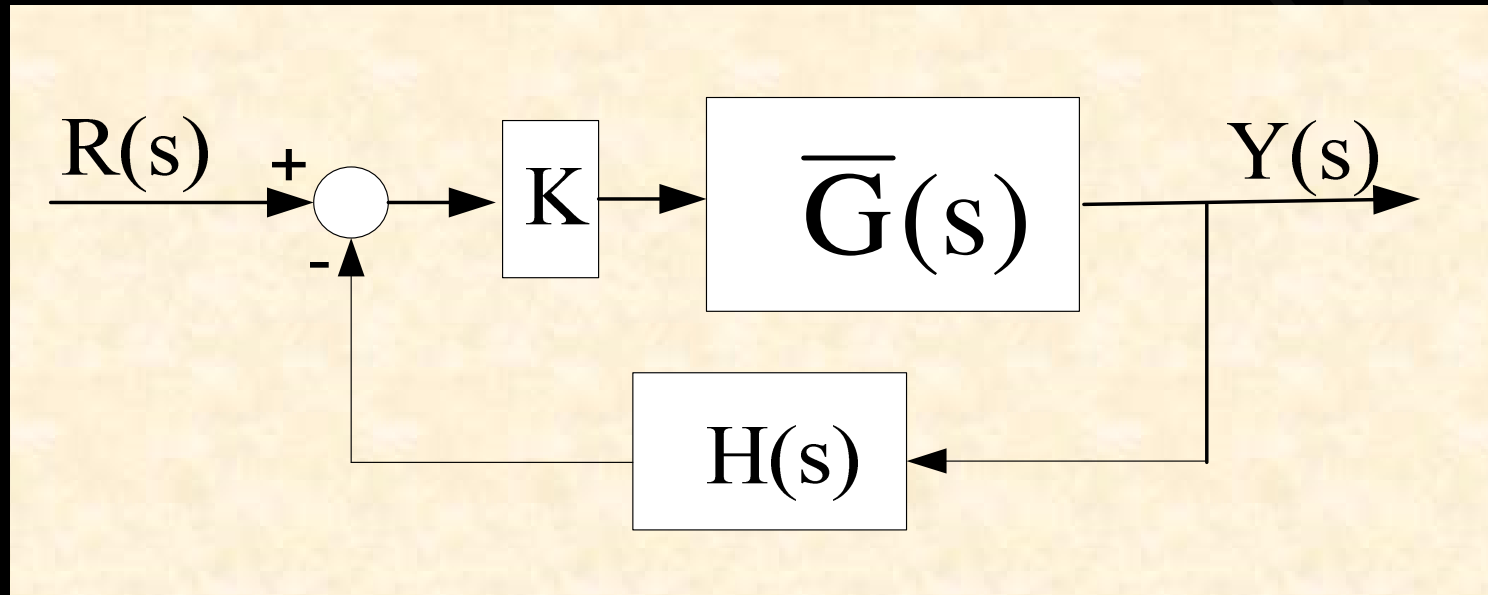
Observe que já foram colocadas as setas que indicam *o sentido* deste Gráfico de Nyquist



Com o *Gráfico de Nyquist* de $G(j\omega)$ podemos aplicar o '*Critério de Nyquist*' para determinar a estabilidade do sistema em M.F.

Critério de Nyquist (para estabilidade)

Sistema de malha fechada



a FTMA (função de transferência malha aberta) é dada por:

$$G(s) = K \bar{G}(s) H(s)$$

Critério de Nyquist (para estabilidade)

$$N_{-1} = P_{M.F.} - P_{M.A.}$$

Nº de circundações
do Gráfico de
Nyquist em torno
do ponto -1

Nº de polos
de malha
fechada no
SPD

Nº de polos
de malha
aberta no
SPD

N_{-1} = nº de circundações de $G(j\omega)$ em torno do ponto -1, que pode ser
'positivo' (se o sentido é anti-horário), ou
'negativo' (se o sentido é horário)

Critério de Nyquist (para estabilidade)

ou seja,

$$P_{M.F.} = N_{-1} + P_{M.A.}$$

$P_{M.F.}$ = N° de polos de *malha fechada* no SPD

N_{-1} = N° de circundações do Gráfico de Nyquist em torno do ponto -1

$P_{M.A.}$ = N° de polos de *malha aberta* no SPD

E, claro, o sistema de malha fechada será *estável* se

$$P_{M.F.} = 0$$

Aplicação do Critério de Nyquist
ao sistema do Exemplo 1

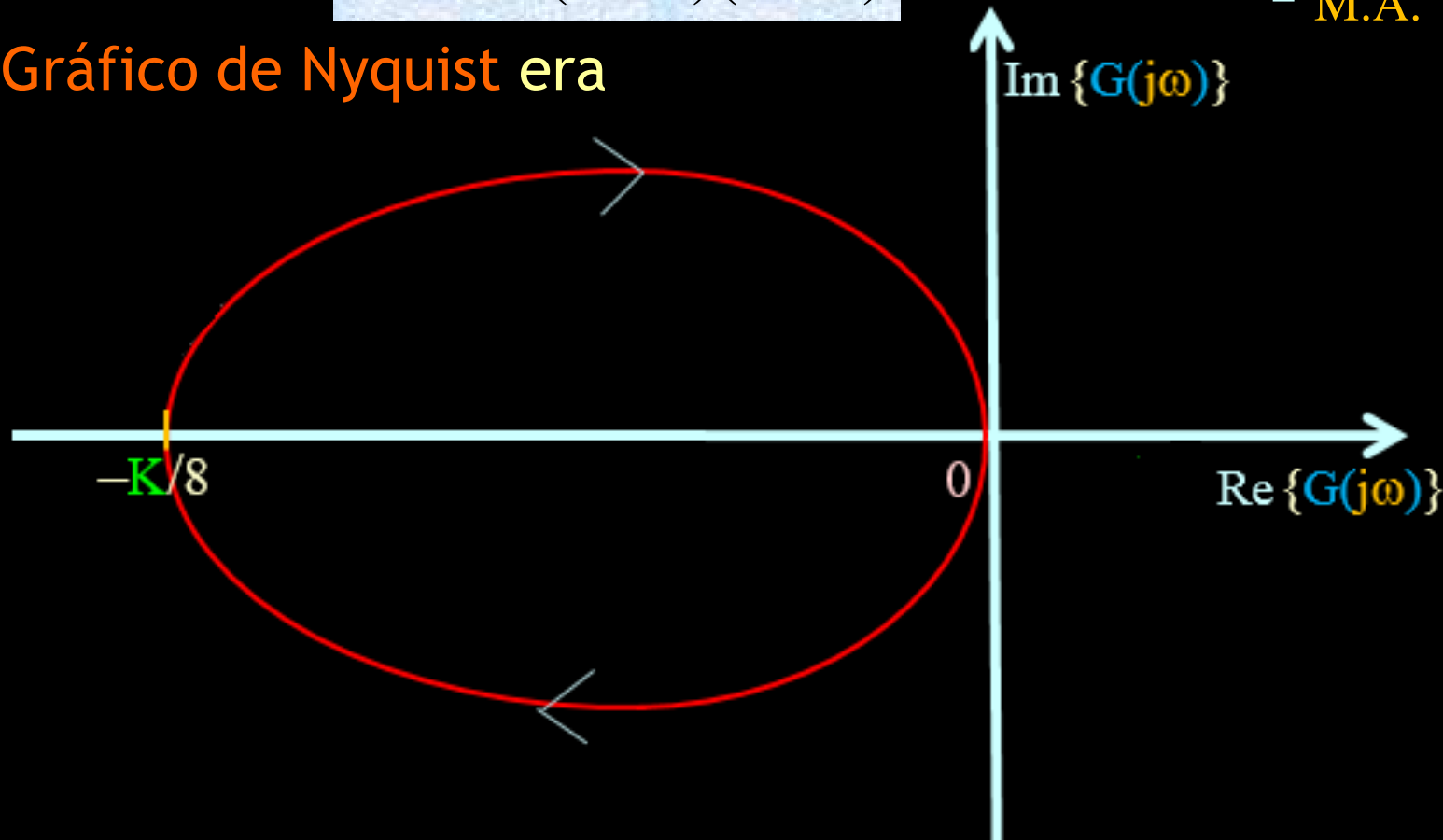
Análise no domínio da frequência

Exemplo 1 (continuação): Vamos retomar este problema

$$G(s) = \frac{K}{(s-2)(s+4)}$$

$$\text{logo, } P_{\text{M.A.}} = 1$$

cujo Gráfico de Nyquist era

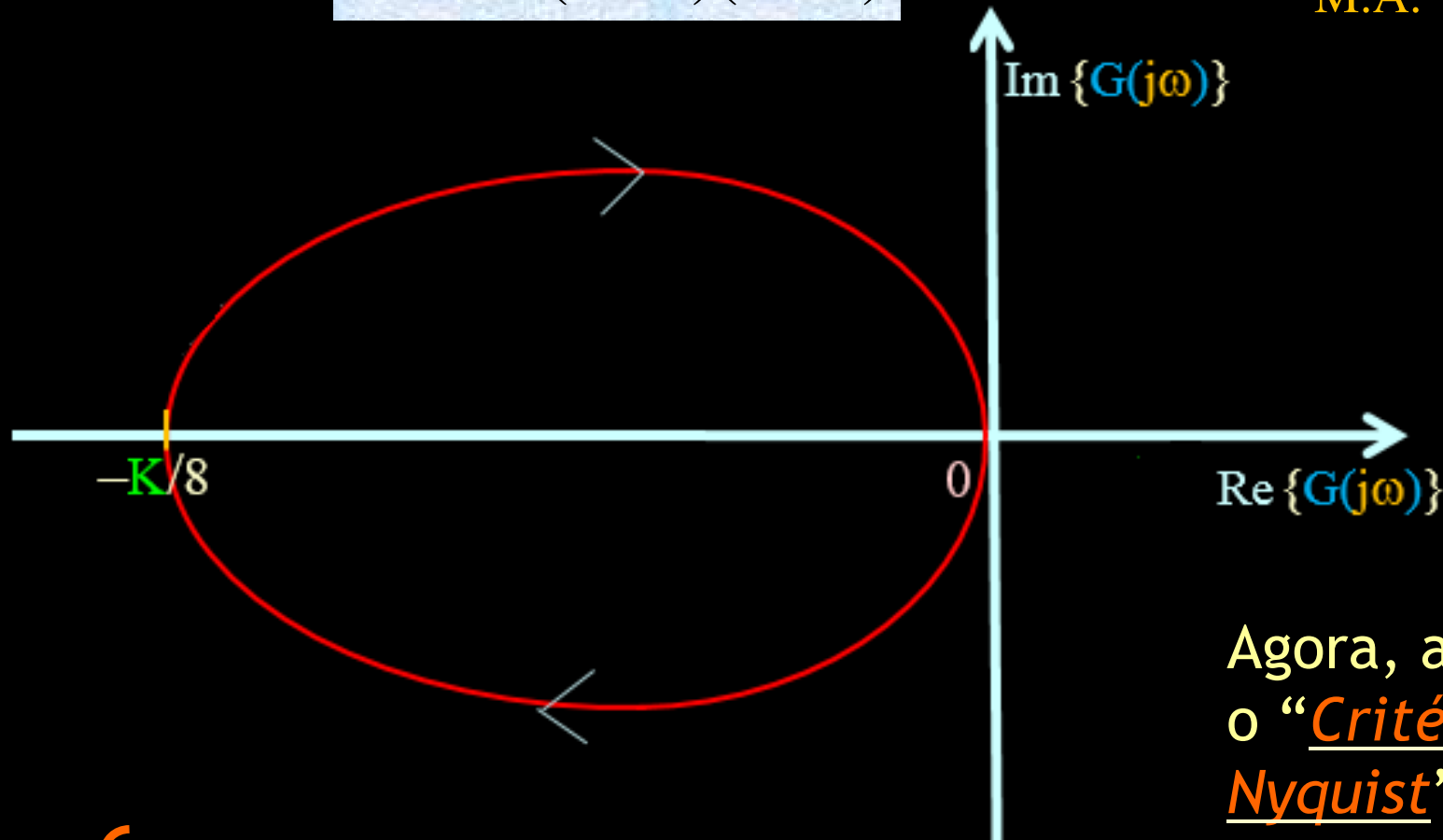


Fazendo agora uma análise do nº de circundações do Gráfico de Nyquist em torno do ponto -1 , temos

Exemplo 1 (continuação):

$$G(s) = \frac{K}{(s-2)(s+4)}$$

$$P_{M.A.} = 1$$



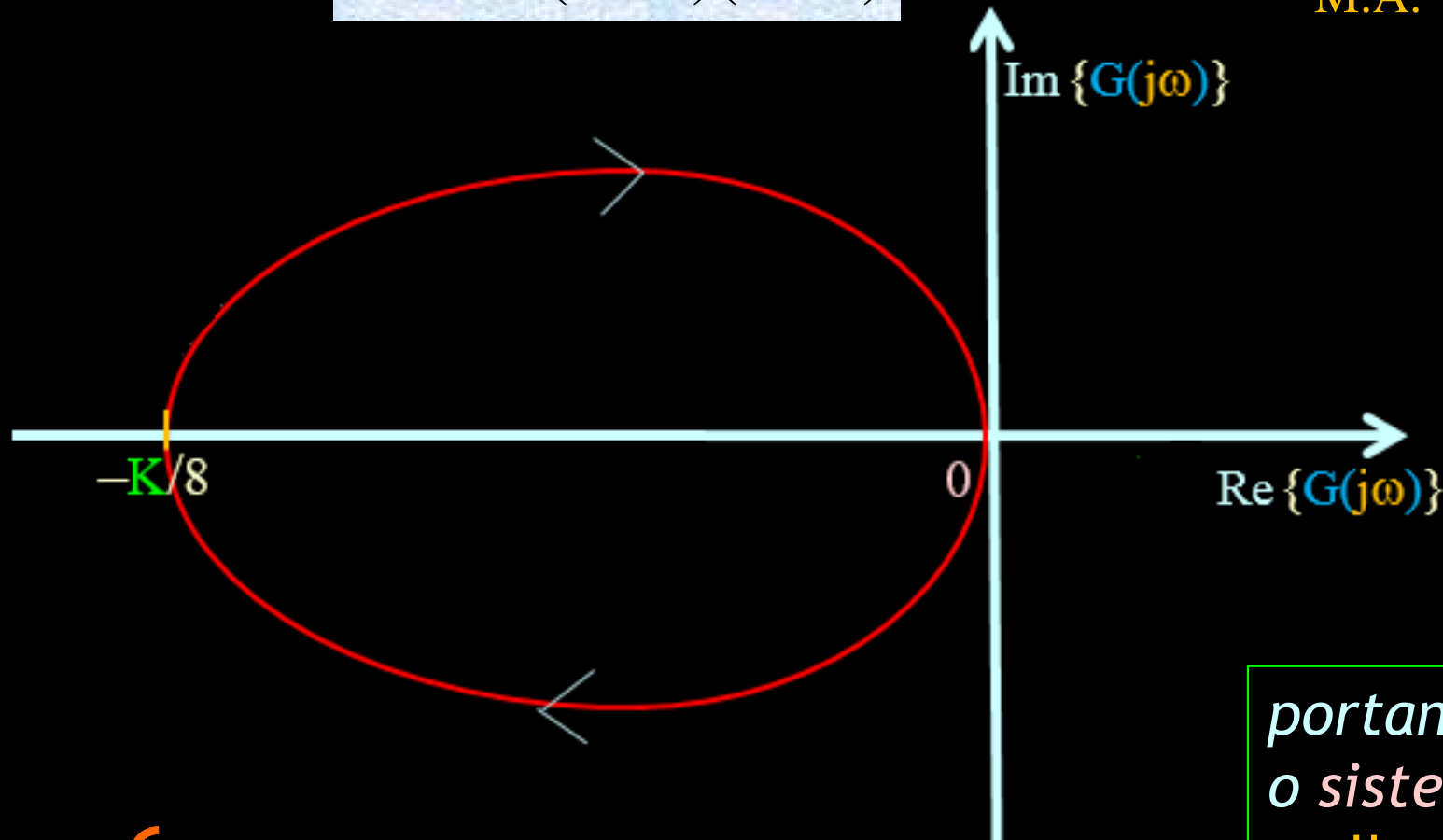
$$N_{-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } K < 8 \\ -1 & \text{se } K > 8 \end{cases}$$

Agora, aplicando o “Critério de Nyquist” para determinar *estabilidade M.F.*, obtemos

Exemplo 1 (continuação):

$$G(s) = \frac{K}{(s-2)(s+4)}$$

$$P_{M.A.} = 1$$



$$P_{M.F.} = \begin{cases} 0 + 1 = 1 & \text{se } K < 8 \\ -1 + 1 = 0 & \text{se } K > 8 \end{cases}$$

portanto,
o sistema de
malha fechada
é *estável* para
 $K > 8$

Aplicação do Critério de Nyquist
ao sistema do Exemplo 2

Análise no domínio da frequência

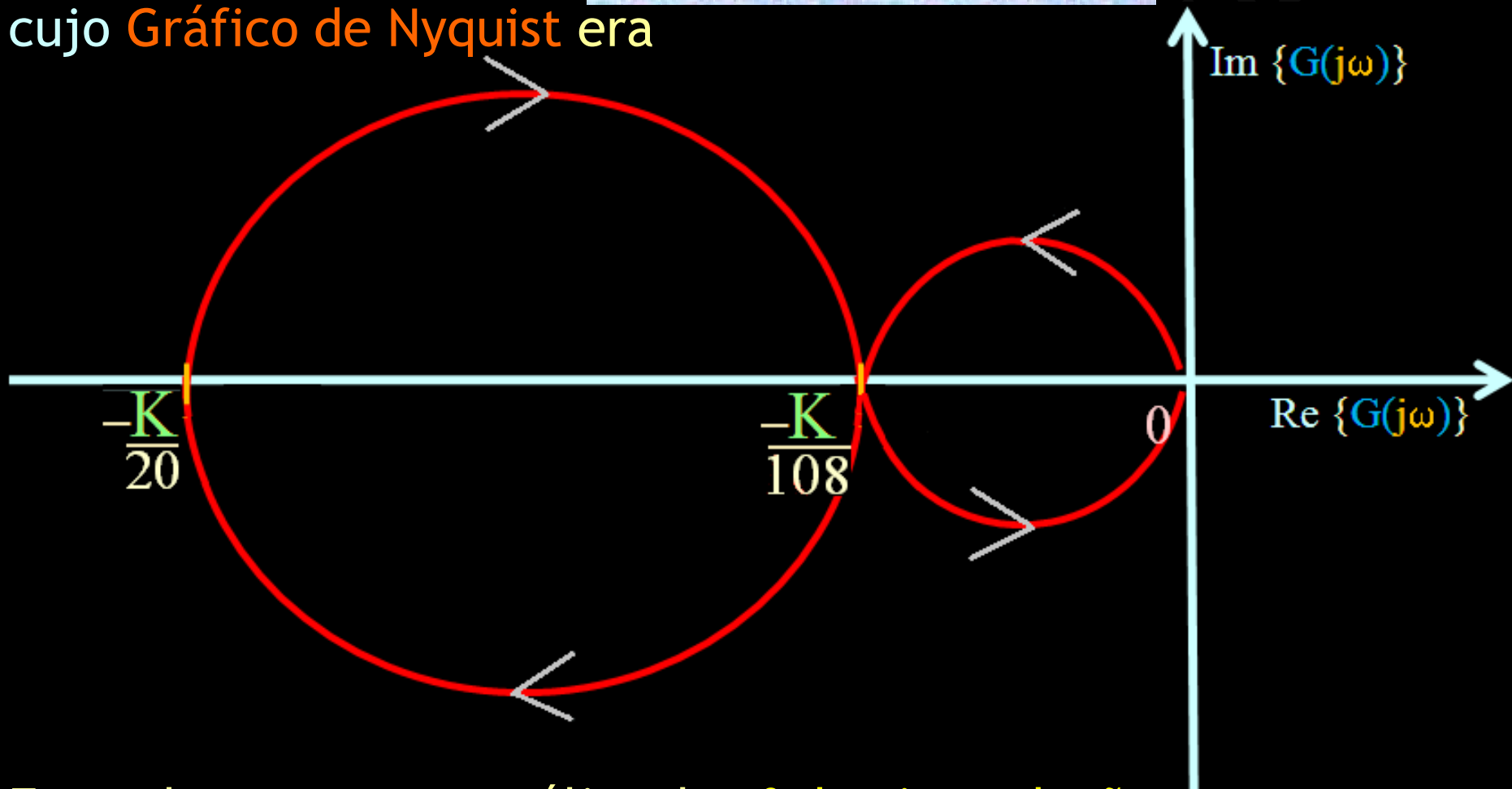
Exemplo 2 (continuação): Vamos retomar este outro problema

$$G(s) = \frac{K}{(s-1)(s+4)(s+5)}$$

logo,

$$P_{M.A.} = 1$$

cujo Gráfico de Nyquist era

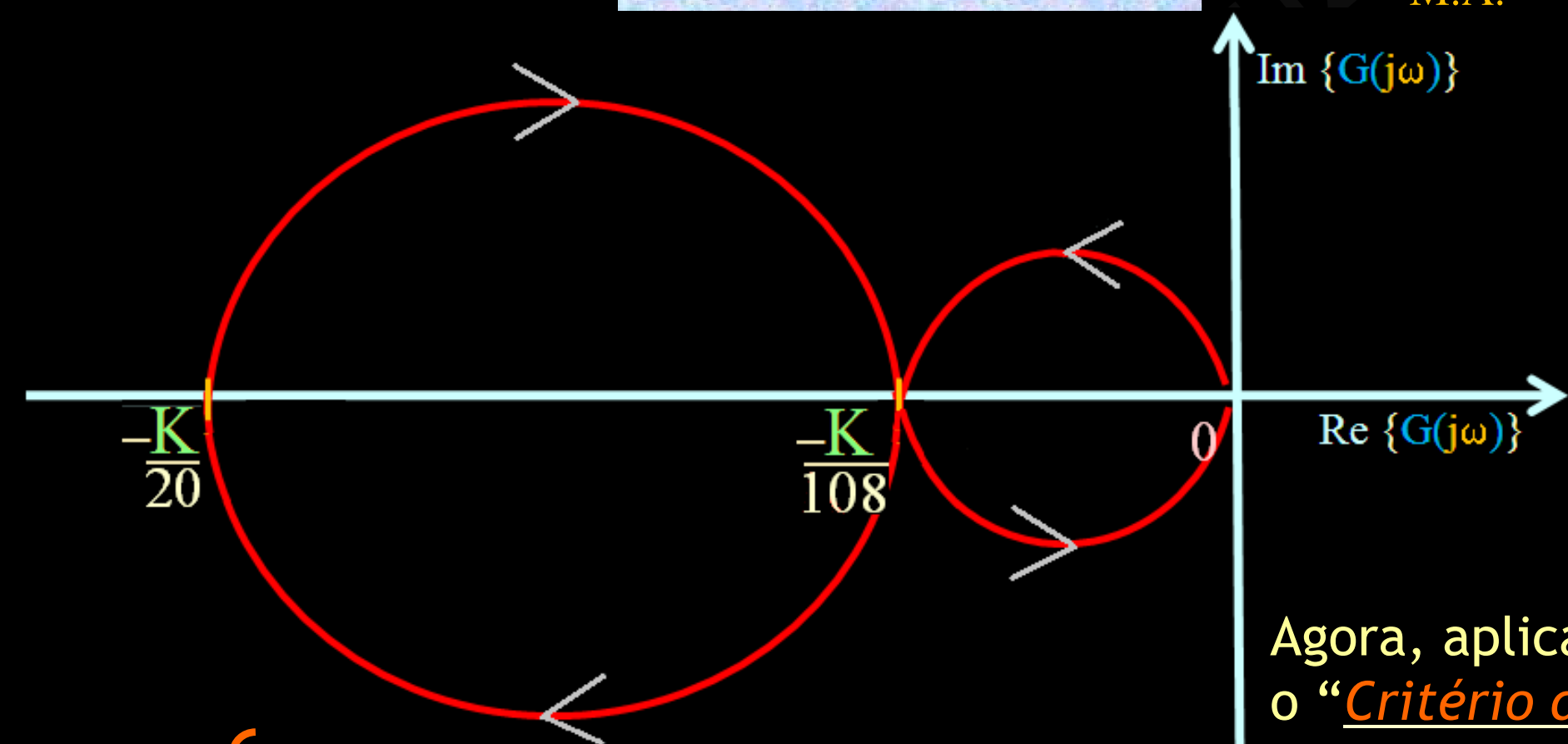


Fazendo agora uma análise do nº de circundações do Gráfico de Nyquist em torno do ponto -1 , temos

Exemplo 2 (continuação):

$$G(s) = \frac{K}{(s-1)(s+4)(s+5)}$$

$$P_{M.A.} = 1$$



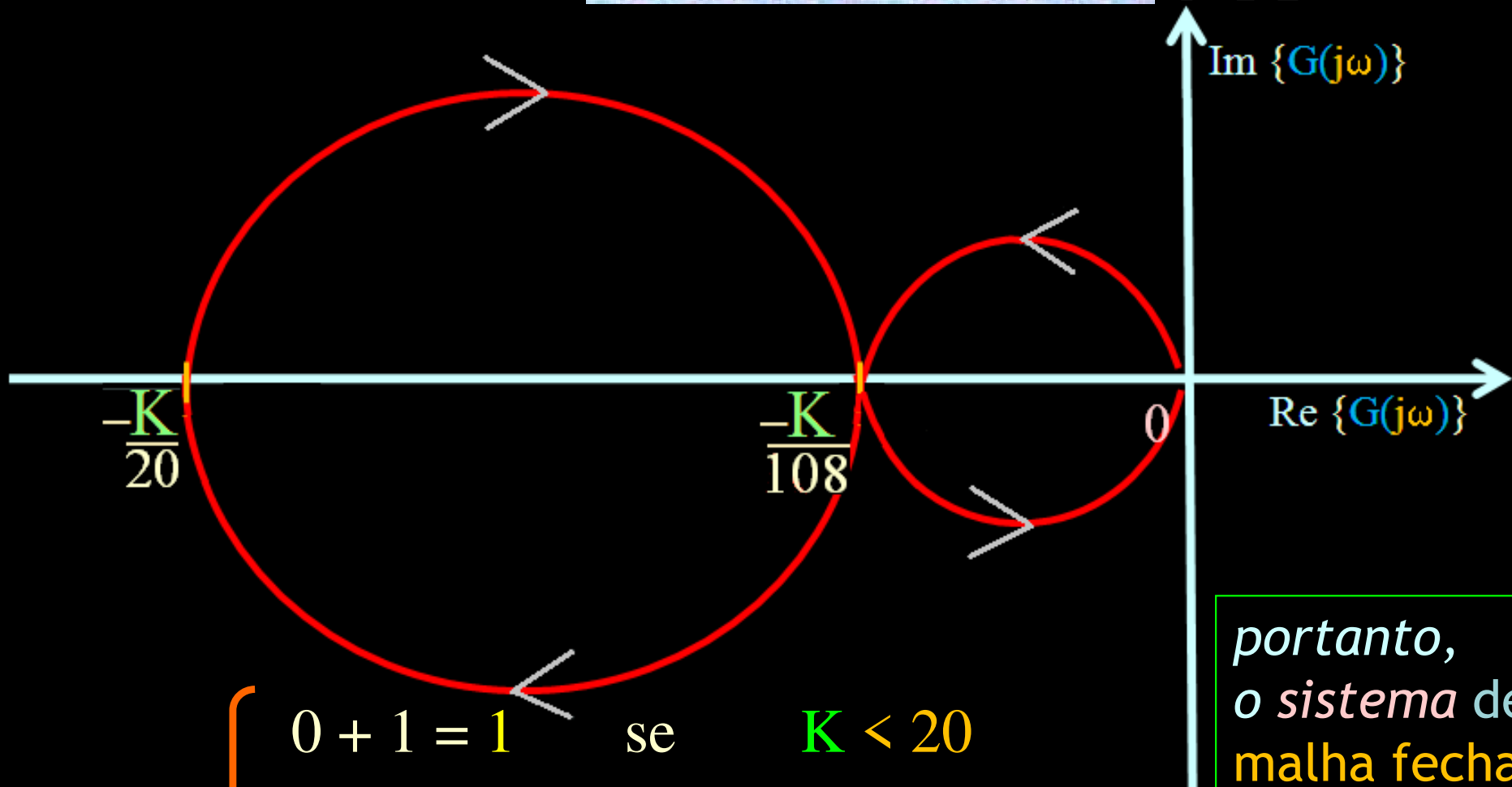
$$N_{-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } K < 20 \\ -1 & \text{se } 20 < K < 108 \\ 1 & \text{se } K > 108 \end{cases}$$

Agora, aplicando o “Critério de Nyquist” para determinar estabilidade M.F., obtemos

Exemplo 2 (continuação):

$$G(s) = \frac{K}{(s-1)(s+4)(s+5)}$$

$$P_{M.A.} = 1$$



$$P_{M.F.} = \begin{cases} 0 + 1 = 1 & \text{se } K < 20 \\ -1 + 1 = 0 & \text{se } 20 < K < 108 \\ 1 + 1 = 2 & \text{se } K > 108 \end{cases}$$

portanto,
o sistema de
malha fechada
é *estável* para
 $20 < K < 108$

Aplicação do Critério de Nyquist
ao sistema do Exemplo 3

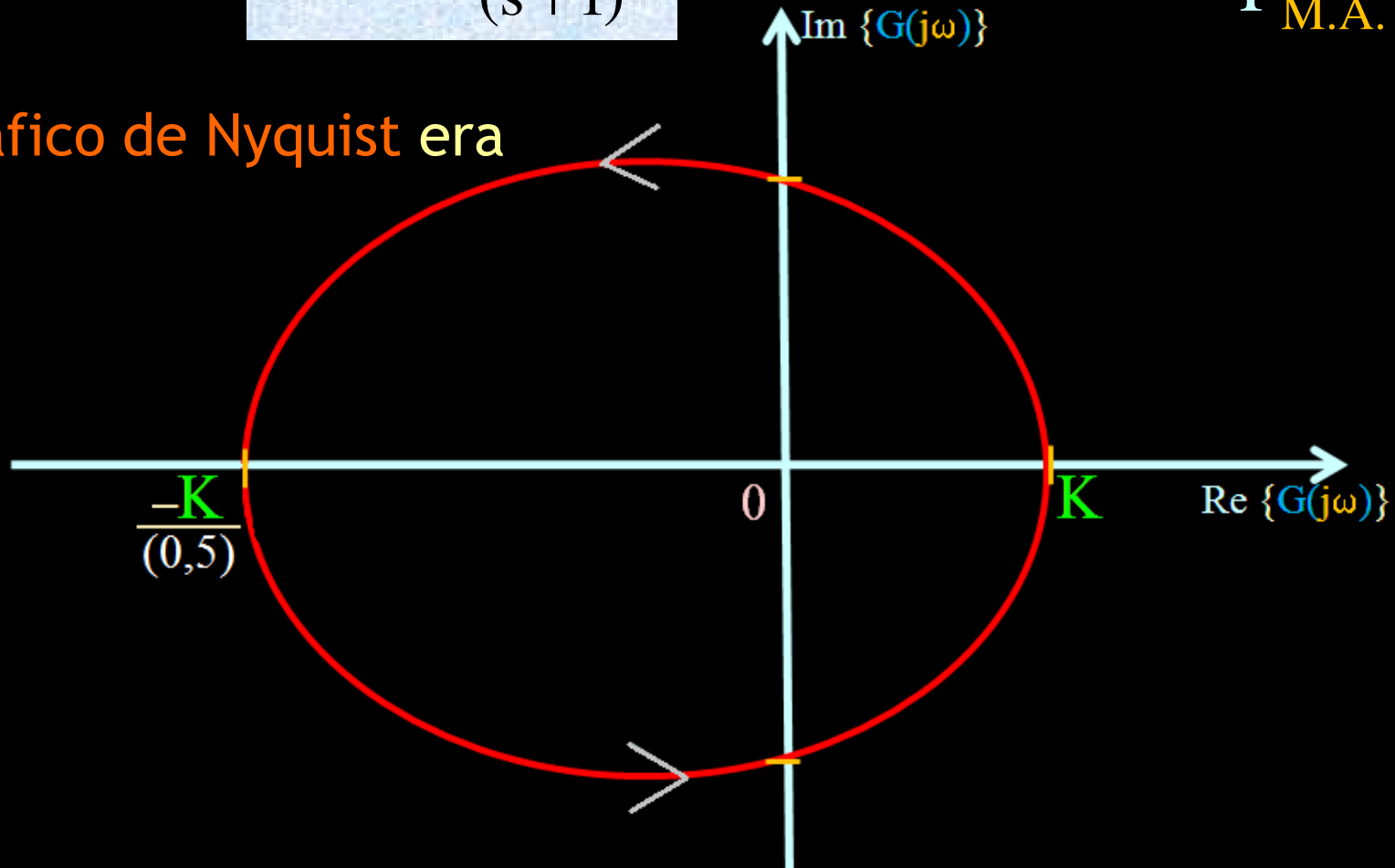
Análise no domínio da frequência

Exemplo 3 (continuação): Finalmente, vamos retomar este problema

$$G(s) = \frac{K(s-2)}{(s+1)}$$

logo,
 $P_{M.A.} = 0$

cujo **Gráfico de Nyquist** era

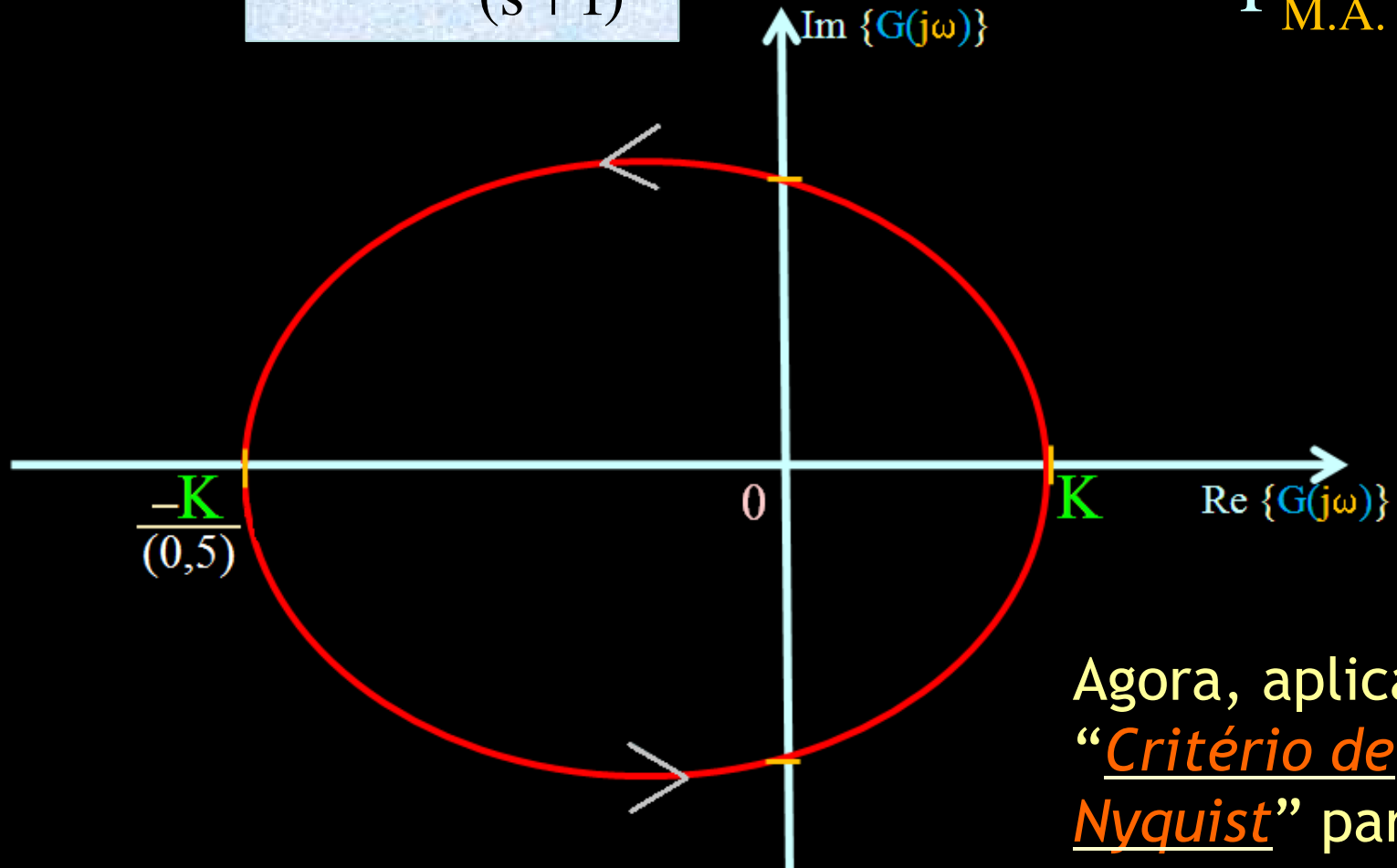


Fazendo agora uma análise do nº de circundações do **Gráfico de Nyquist** em torno do ponto -1 , temos

Exemplo 3 (continuação):

$$G(s) = \frac{K(s-2)}{(s+1)}$$

$$P_{M.A.} = 0$$



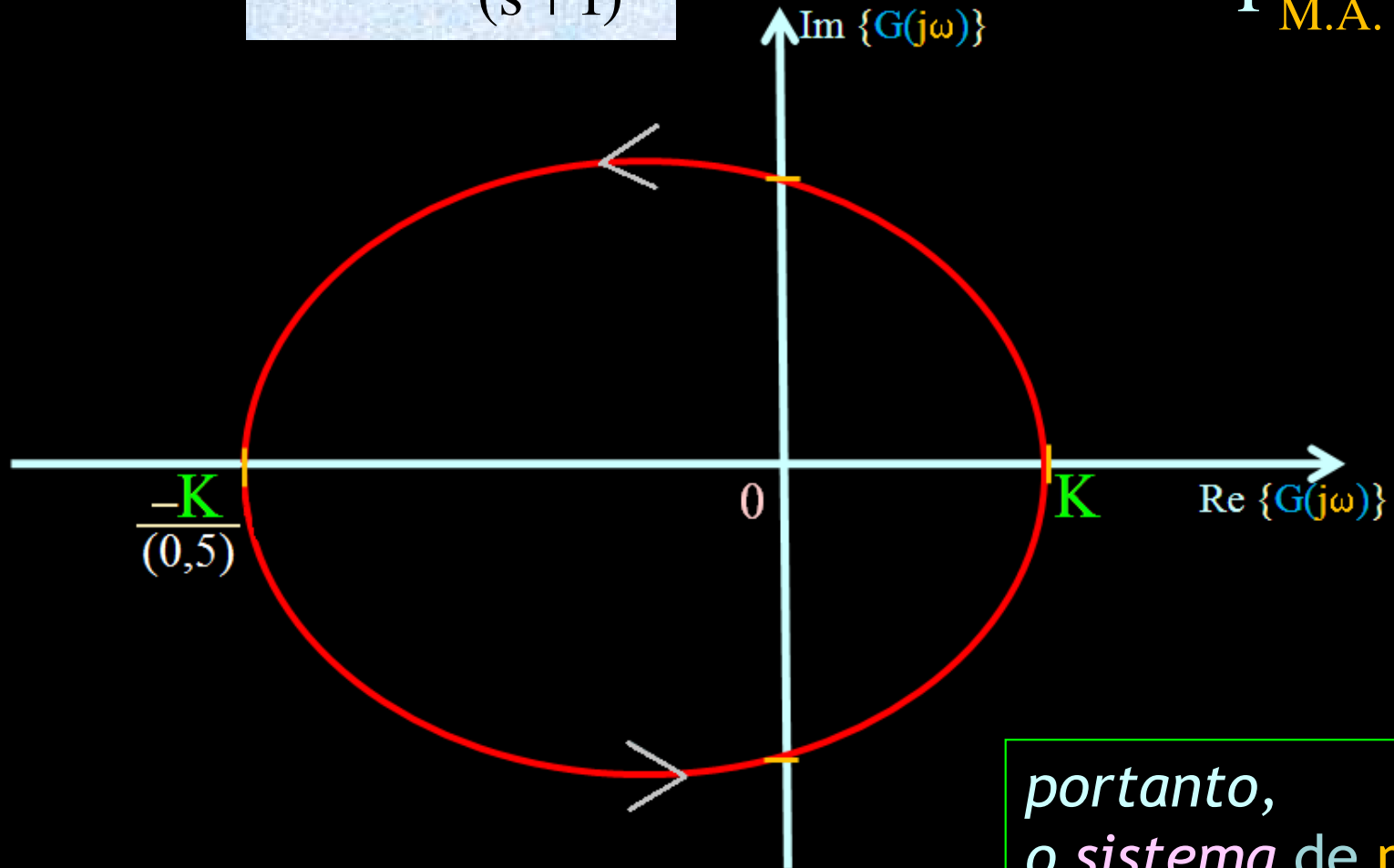
$$N_{-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } K < 0,5 \\ 1 & \text{se } K > 0,5 \end{cases}$$

Agora, aplicando o “Critério de Nyquist” para determinar *estabilidade* M.F., obtemos

Exemplo 3 (continuação):

$$G(s) = \frac{K(s-2)}{(s+1)}$$

$$P_{M.A.} = 0$$



$$P_{M.F.} = \begin{cases} 0 + 0 = 0 & \text{se } K < 0,5 \\ 1 + 0 = 1 & \text{se } K > 0,5 \end{cases}$$

portanto,
o sistema de malha
fechada é estável
para $K < 0,5$



Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!
Thank you!

Felippe de Souza
felippe@ubi.pt