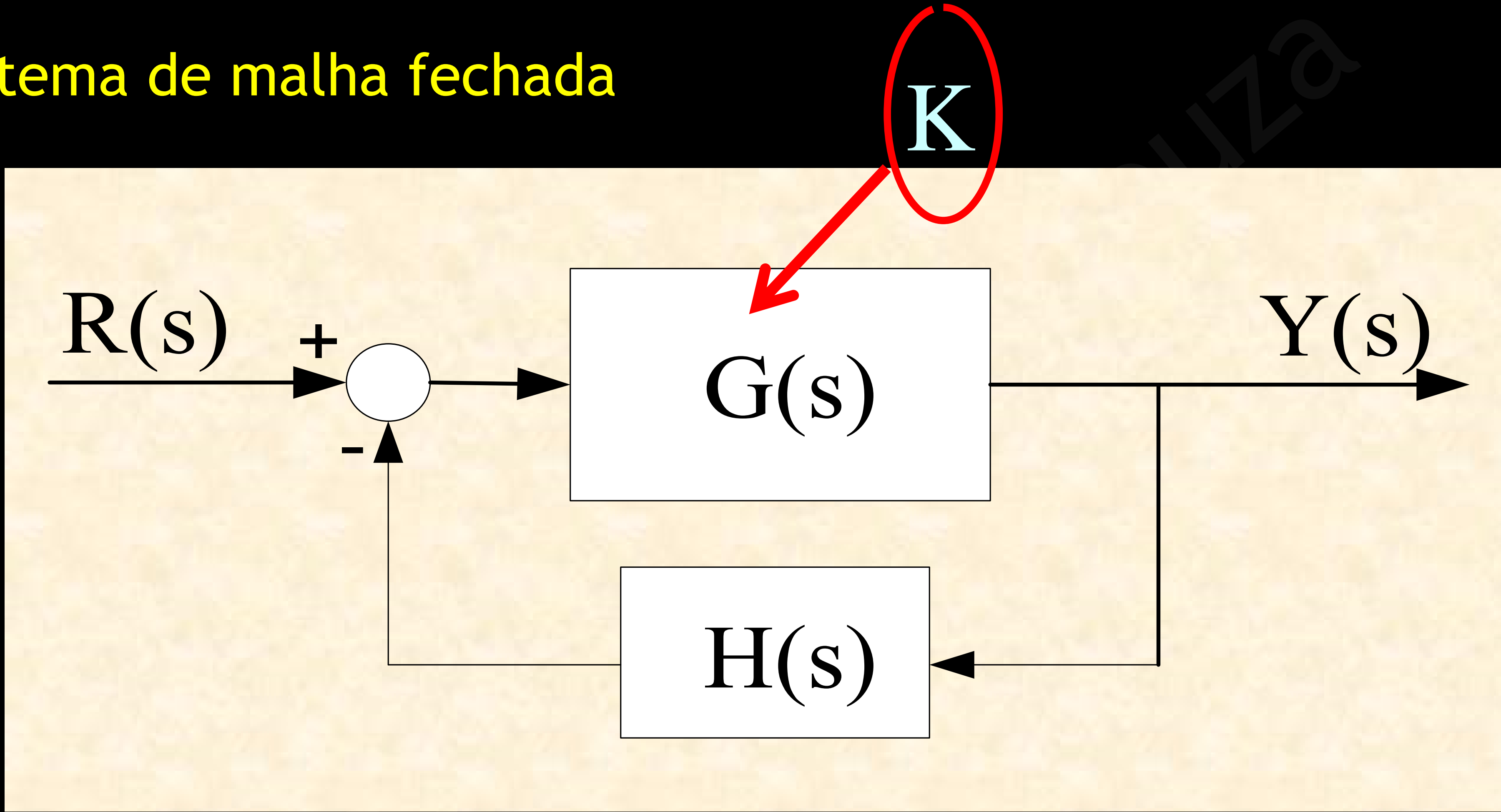
Controlo de Sistemas

12
“Root Locus – LGR”
(*Lugar Geométrico das Raízes*)
parte II

J. A. M. Felippe de Souza

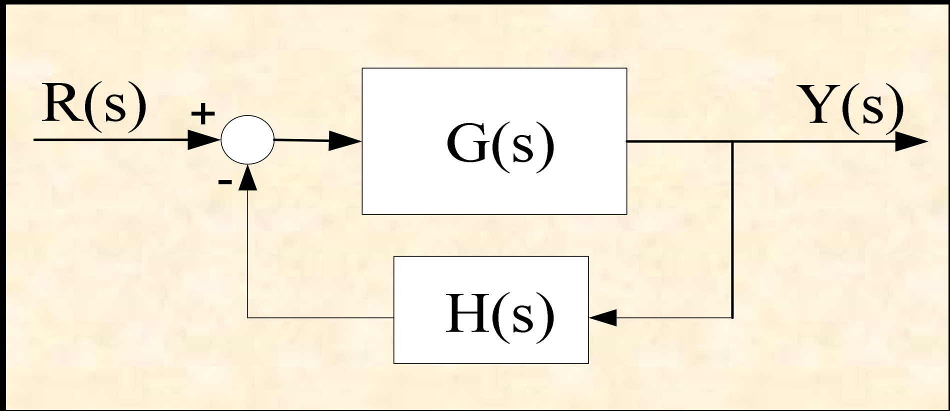
Recapitulando (*da parte I*):

Sistema de malha fechada



O "*Root Locus*" é o lugar geométrico dos *polos* do sistema de *malha fechada*, quando K varia.

Root Locus – LGR (*Lugar Geométrico das Raízes*) parte II



Logo, o "*Root Locus*" é traçado no *plano complexo*

É fácil de observar que o "*Root Locus*" é SIMÉTRICO em relação ao *eixo real*

Ou seja, a *parte de cima* é um espelho da *parte de baixo*

Além disso, as *raízes* da *equação característica* da FTMF são as mesmas *raízes* que

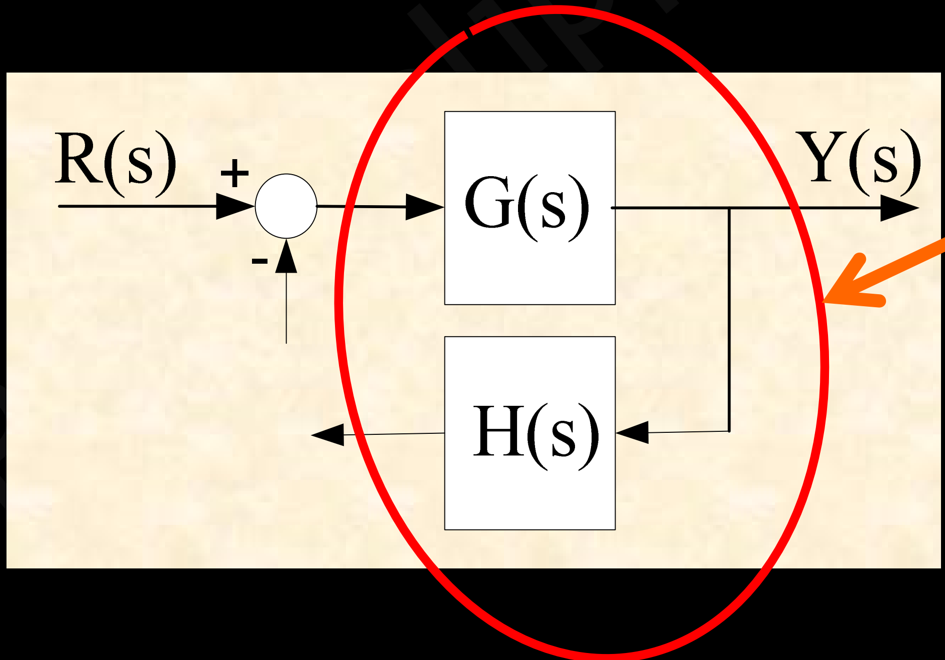
$$1 + G(s) \cdot H(s) = 0$$

Note que "*Root Locus*" depende apenas do produto $G(s)\cdot H(s)$ e não de $G(s)$ ou de $H(s)$ separadamente

A expressão

$$G(s)\cdot H(s)$$

é chamada de *função de transferência* do *sistema* em *malha aberta* (FTMA).



$G(s)\cdot H(s)$
(FTMA)

Regras para a construção do "*Root Locus*"

Chamamos de

n = número de *polos* de *malha aberta*

m = número de *zeros* de *malha aberta*

Regra #1 – Número de ramos

O número de *ramos* n de um "*Root Locus*" é o número de *polos* de malha aberta, ou seja, o número de *polos* de $G(s) \cdot H(s)$.

$$\boxed{n = \text{n}^\circ \textit{ ramos} = \text{n}^\circ \textit{ polos} \text{ de } G(s) \cdot H(s)}$$

Regra #2 – Intervalos com e sem "*Root Locus*" no *eixo real*

Um ponto s no *eixo real* pertencerá ao "*Root Locus*" se houver um número ímpar de *polos* e *zeros* reais de *malha aberta* a direita de s.

ou seja, se houver um número ímpar de *polos* e *zeros* reais de $G(s) \cdot H(s)$ a direita de s.

Regra #3 - Pontos início e término dos ramos do "*Root Locus*"

Os n ramos do "*Root Locus*" começam nos n *polos* de malha aberta

ou seja, começam nos n *polos* de $G(s)\cdot H(s)$

m dos n ramos do "*Root Locus*" terminam nos m *zeros* de malha aberta

ou seja, terminam nos m *zeros* de $G(s)\cdot H(s)$

e os restantes:

$(n - m)$ ramos do "*Root Locus*" terminam no *infinito* (∞)

Regra #4 - Assíntotas no infinito

Para os $(n - m)$ ramos do "*Root Locus*" que não terminam nos m *zeros de malha aberta*, isto é, os m *zeros finitos* de $G(s) \cdot H(s)$, pode-se determinar a direção que eles vão para o *infinito* no *plano complexo*.

γ = ângulo da assíntota com o *eixo real*

$$\boxed{\gamma = \frac{180^\circ \cdot (2i+1)}{(n-m)}}$$

$$\boxed{i = 0, 1, 2, \cdots}$$

Regra #5 - Ponto de interseção das assíntotas com o *eixo real*

As $(n - m)$ assimptotas no infinito ficam determinadas pelas suas direções (*ângulos* γ) e pelo *ponto* de onde partem no *eixo real*, σ_o dado pela expressão:

$$\sigma_o = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(p_i) - \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Re}(z_j) \right)}{(n-m)}$$

Regra #6 – Pontos do *eixo real* onde há encontro de *ramos*

Primeiro constrói-se a equação

$$1 + G(s)\cdot H(s) = 0,$$

e daí obtém-se uma expressão para K em função de s:

$$K(s)$$

então calcula-se a derivada de K em relação a s, dK/ds

Agora, através da equação abaixo em s

$$\boxed{\frac{dK}{ds} = 0}$$

obtém-se os pontos s do *eixo real* onde há encontro de *ramos*

Regra #7 - Encontro de mais de dois ramos

Na aplicação da *regra anterior* se

$$\boxed{\left.\frac{d^2K}{ds^2}\right|_{s=s'} = 0}$$

isto significa que há encontro de *mais de dois ramos* e tem que se continuar a derivar $K(s)$ para *derivadas* de ordem mais altas

$$\boxed{\frac{d^kK}{ds^k}} \qquad \boxed{k = 3, 4, 5, \cdots}$$

até que

$$\boxed{\left.\frac{d^\eta K}{ds^\eta}\right|_{s=s'} \neq 0}$$

para algum η

Regra #7 – Encontro de mais de dois ramos (*continuação*)

Se $\boxed{\left.\dfrac{d^{\eta}K}{ds^{\eta}}\right|_{s=s'} \neq 0}$ e $\boxed{\left.\dfrac{d^{k}K}{ds^{k}}\right|_{s=s'} = 0}$ para $\forall\ k < \eta$

isto significa que há encontro de η *ramos* em s'

ou seja, η ramos chegam e η *ramos* partem em s'

Nesta parte II veremos a *última regra* (Regra #8) e alguns exemplos de *Root Locus*

Regra #8

Pontos interseção "*Root Locus*" com *eixo imaginário*

Regra #8 – Pontos interseção "*Root Locus*" com *eixo imaginário*

Usa-se o Tabela de Routh-Hurwitz com a *equação característica* de *malha fechada* do *sistema* que é obtida a partir de

$$1 + G(s) \cdot H(s) = 0$$

Note que a *equação característica M.F.* obtida será em função de K, e com ela constrói-se a Tabela de Routh-Hurwitz para se aplicar o *Critério de Routh*

Para se aplicar o *Critério de Routh* temos que encontrar os valores de K que anulam os elementos da *coluna pivô* da *Tabela de Routh*

Exemplo 9: Tabela Routh-Hurwitz para uma *eq. característica* em função de K obtida através de $1 + G(s) \cdot H(s) = 0$

$$p(s) = s^4 + s^3 + Ks^2 + 3s + (K-10)$$

s^4	1	K	$(K-10)$	
s^3	1	3	0	← etc...
s^2	$(K-3)$	$(K-10)$		← antepenúltima linha
s^1	$(2K+1)/(K-3)$			← penúltima linha
s^0	$(K-10)$			← última linha

↑ *coluna pivô*

Nitidamente, os únicos valor de $K > 0$ que anulam elementos da *coluna pivô* são

$K = 3$ (na antepenúltima linha) e

$K = 10$ (na última linha)

Regra #8 – Pontos interseção "*Root Locus*" com *eixo imaginário* (*continuação*)

Se $\nexists$ $K > 0$ que anule elementos da *coluna pivô*

⇒ o "*Root Locus*" não interceta o eixo imaginário.

Se $\exists$ $K > 0$ que anula o ÚLTIMO elemento da *coluna pivô*

⇒ o "*Root Locus*" interceta o eixo imaginário em *um ponto*, *na origem* ($s = 0$).

Se $\exists$ $K > 0$ que anula o PENÚLTIMO elemento da *coluna pivô*

⇒ o "*Root Locus*" pode intercetar o eixo imaginário em *dois pontos* ($s = \pm j\omega'$).

Se $\exists$ $K > 0$ que anula o ANTEPENÚLTIMO elemento da *coluna pivô*

⇒ o "*Root Locus*" pode intercetar o eixo imaginário em *três pontos* ($s = 0$ e $s = \pm j\omega'$).

e assim por diante...

Regra #8 – Pontos interseção “*Root Locus*” com *eixo imaginário* (*continuação*)

Para saber os pontos exatos onde o “*Root Locus*” intercepta o *eixo imaginário* temos que reescrever a *equação característica* $p(s)$ substituindo K por cada um dos valores de K que anula elementos da *coluna pivô*.

Depois disso, calcula-se as raízes de $p(s)$

Nelas encontrar-se-ão os eventuais *pontos de intersecção* do “*Root Locus*” com *eixo imaginário*.

Se entretanto, em vez de $p(s)$ calcularmos as raízes do *polinómio* da *linha imediatamente acima* onde K anulou a coluna pivô (na *Tabela de Routh*), isso nos dará mais diretamente os *pontos de intersecção* do “*Root Locus*” com *eixo imaginário*

Exemplo 10

Aplicação da Regra #8 –
Pontos interseção "*Root Locus*" com *eixo imaginário*

Retornando ao Exemplo 1 (parte I), a *equação característica* da FTMF é dada por:

$$s^2 + (2K-4)\,s + K = 0$$

Construindo-se a *Tabela de Routh* (em função de K):

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & K \\ s^1 & (2K-4) & \\ s^0 & K & \end{array}$$

$(2K-4) \Rightarrow (2K-4) = 0 \Rightarrow \boxed{K = 2}$

$K \Rightarrow \boxed{K = 0}$

Analisando-se onde há $K \geq 0$ que anula elementos da *coluna pivô*, temos que este "*Root Locus*" interceta o *eixo imaginário* em 3 pontos:

na origem para $\boxed{K = 0}$ e também em $\pm j\omega'$ quando $\boxed{K = 2}$

Exemplo 10 (*continuação*) Aplicação da Regra #8

Agora, para se achar os 3 valores exatos onde o "*Root Locus*" interceta o *eixo imaginário*:

Para $K = 0$ (*que anula a última linha*), tomemos o polinómio da linha imediatamente acima (ou seja, a *penúltima linha*) e calculamos as raízes (neste caso a raiz):

$$p(s) = (2K - 4)\, s = -4s = 0$$

⟹ raiz: $s = 0$

(*conforme já previsto*)

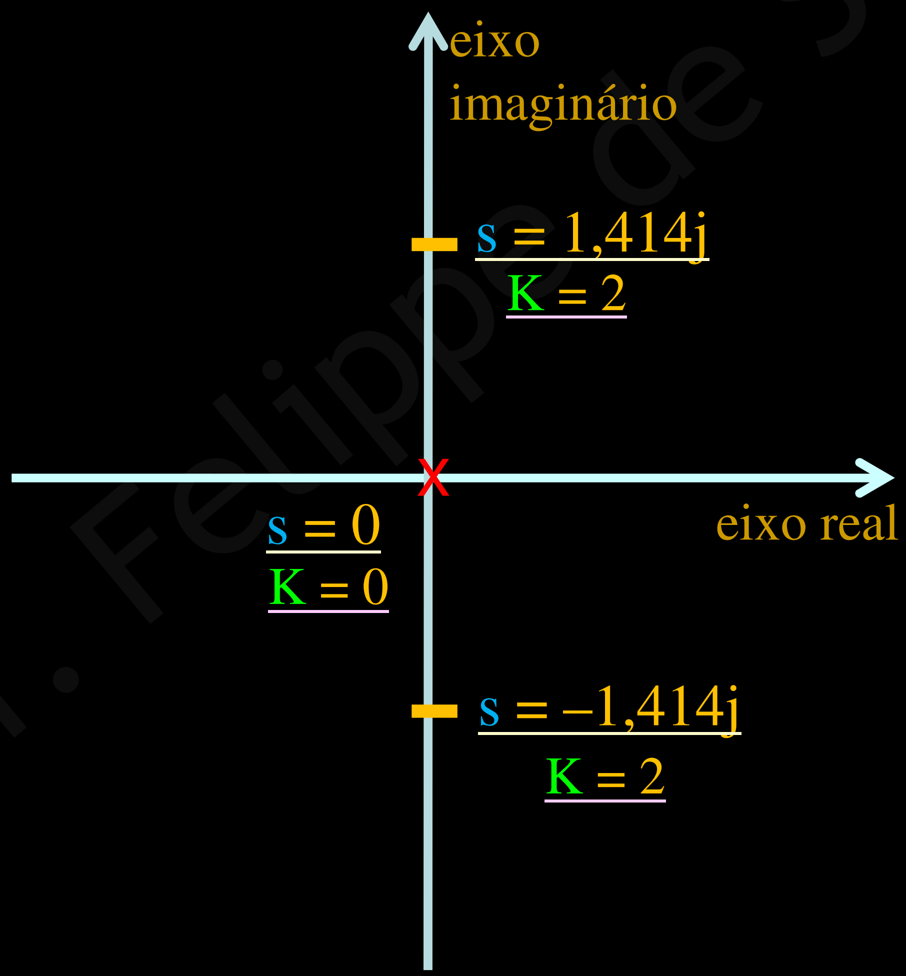
Para $K = 2$ (*que anula a penúltima linha*), tomemos o polinómio da linha imediatamente acima (ou seja, a *antepenúltima linha*) e calculamos as raízes:

$$p(s) = s^2 + K = s^2 + 2 = 0$$

⟹ raízes: $s = \pm\, 1{,}414j$ (logo, $\omega' = 1{,}414$)

Exemplo 10 (*continuação*) Aplicação da Regra #8

Concluindo, este "*Root Locus*" interceta o *eixo imaginário* nos 3 pontos assinalados abaixo



Exemplo 11

Aplicação da Regra #8 –
Pontos interseção "*Root Locus*" com *eixo imaginário*

Considere o *sistema* cuja FTMF é dada por

$$G(s)H(s) = \frac{K\cdot(s-2)^2}{(s^2+2s+2)\cdot(s+1)}$$

Fazendo-se:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

obtém-se a *equação característica* da FTMF:

$$s^3 + (K+3)\,s^2 + (4-4K)\,s + (4K+2) = 0$$

Exemplo 11 (*continuação*)   Aplicação da Regra #8

Construindo-se a *Tabela de Routh* (em função de K):

s^3	1	$(4-4K)$
s^2	$(K+3)$	$(4K+2)$
s^1	$(-4K^2-12K+10)/(K+3)$	
s^0	$(4K+2)$	

$$\Rightarrow -4K^2-12K+10=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K = \cancel{-3{,}68} \\ K = 0{,}679 \end{cases}$$

coluna pivô

O único valor de $K > 0$ que anula elementos da *coluna pivô* é $K \cong 0{,}68$

Este "*Root Locus*" interceta o *eixo imaginário* em 2 pontos $(\pm j\omega')$ para $K \cong 0{,}68$

Root Locus – LGR (*Lugar Geométrico das Raízes*) parte II

Exemplo 11 (*continuação*) Aplicação da Regra #8

Agora, para se achar estes 2 valores ($\pm j\omega'$) onde o "*Root Locus*" interceta o *eixo imaginário* quando $K \cong 0{,}68$, tomamos o polinómio da *linha imediatamente acima* (ou seja, a *antepenúltima linha*) e calculamos as raízes:

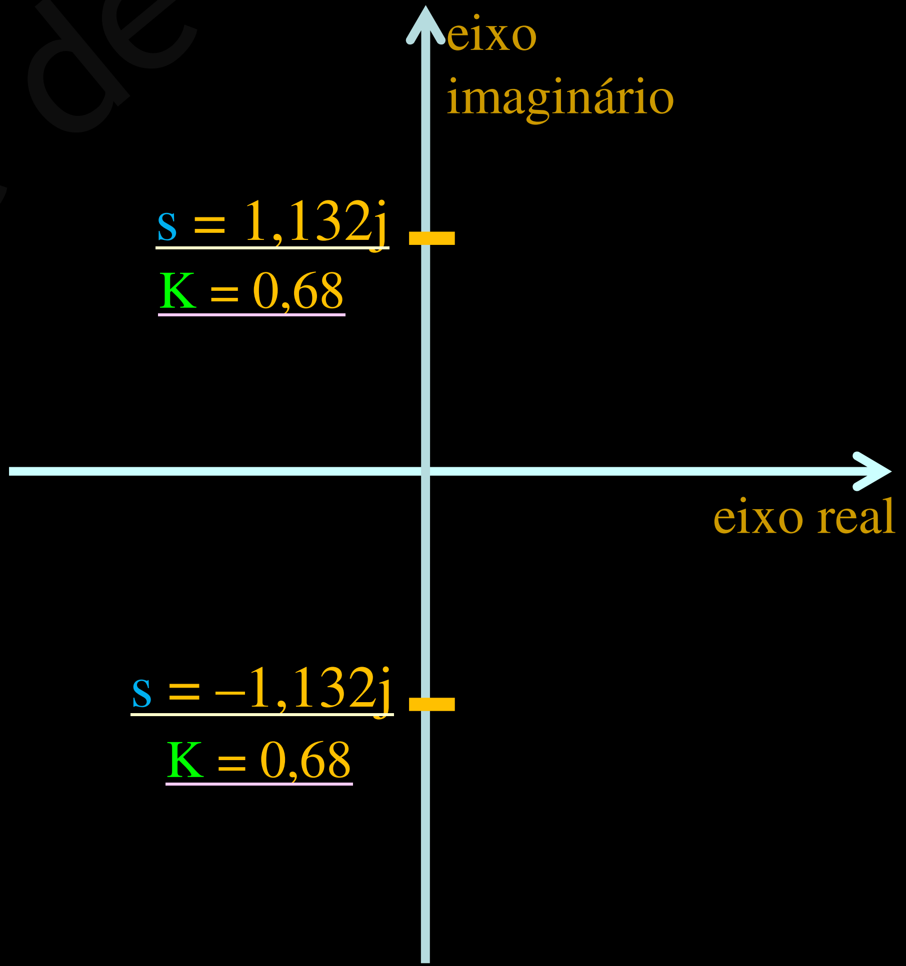
$$p(s) = (K+3)\,s^2 + (4K+2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3{,}68\,s^2 + 4{,}72 = 0$$

$\Rightarrow$ raízes: $s = \pm\, 1{,}132j$

(logo, $\omega' = 1{,}132$)

Concluindo, este "*Root Locus*" interceta o *eixo imaginário* nos 2 pontos assinalados ao lado



Exemplos

Esboço do Root Locus

(Aplicação de todas as regras)

Exemplo 12:

Esboço do "*Root Locus*" completo do sistema do Exemplo 4

$$G(s)H(s) = \frac{K \cdot (2s+1)}{(s-4)s}$$

$n = 2$

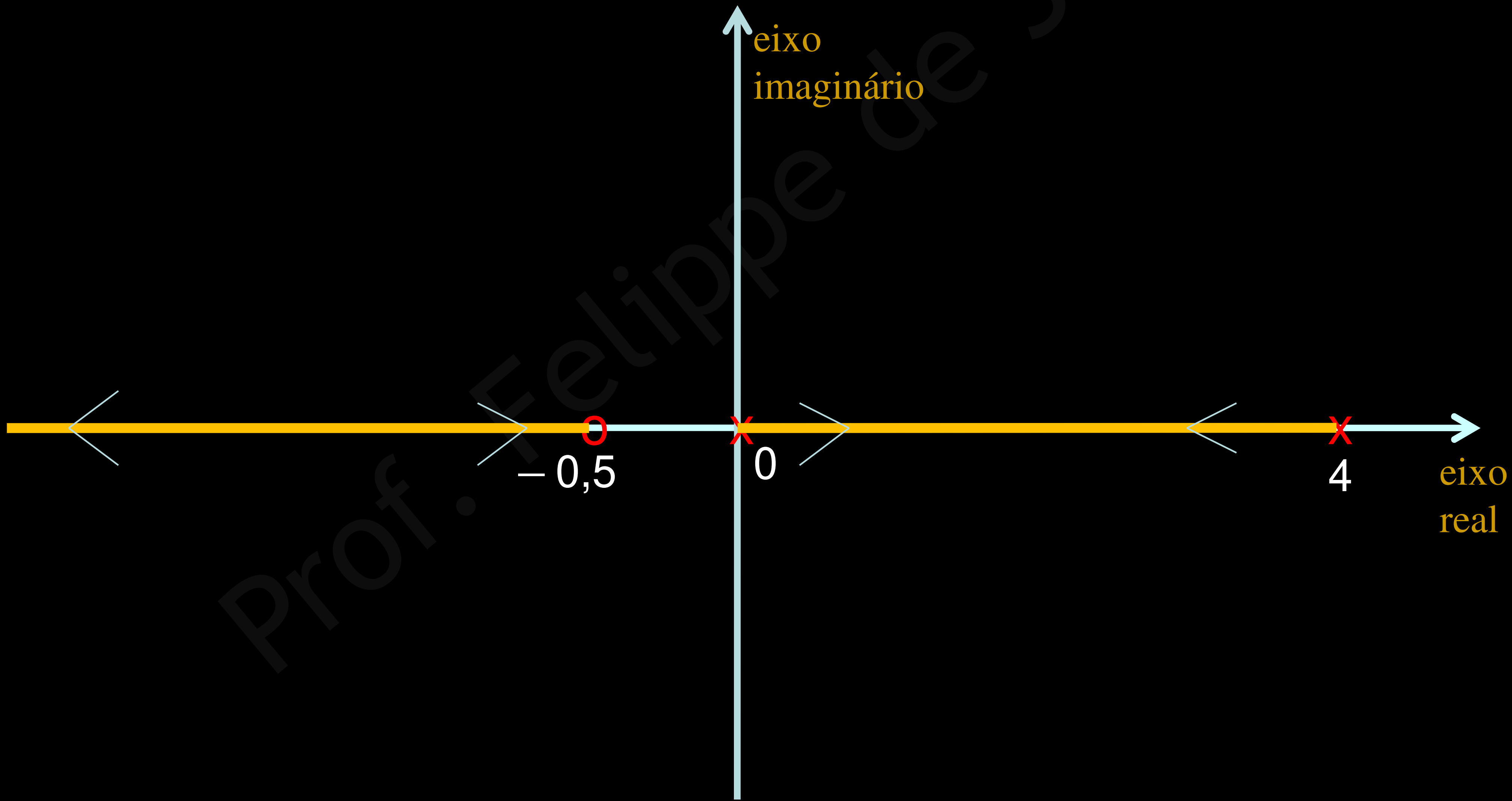
$m = 1$

Este "*Root Locus*" tem 2 *ramos* (*Regra #1*)

Este *sistema M.A.* já apareceu nos Exemplos 1 e 6 (na *parte I*) e 10 (nesta *parte II*)

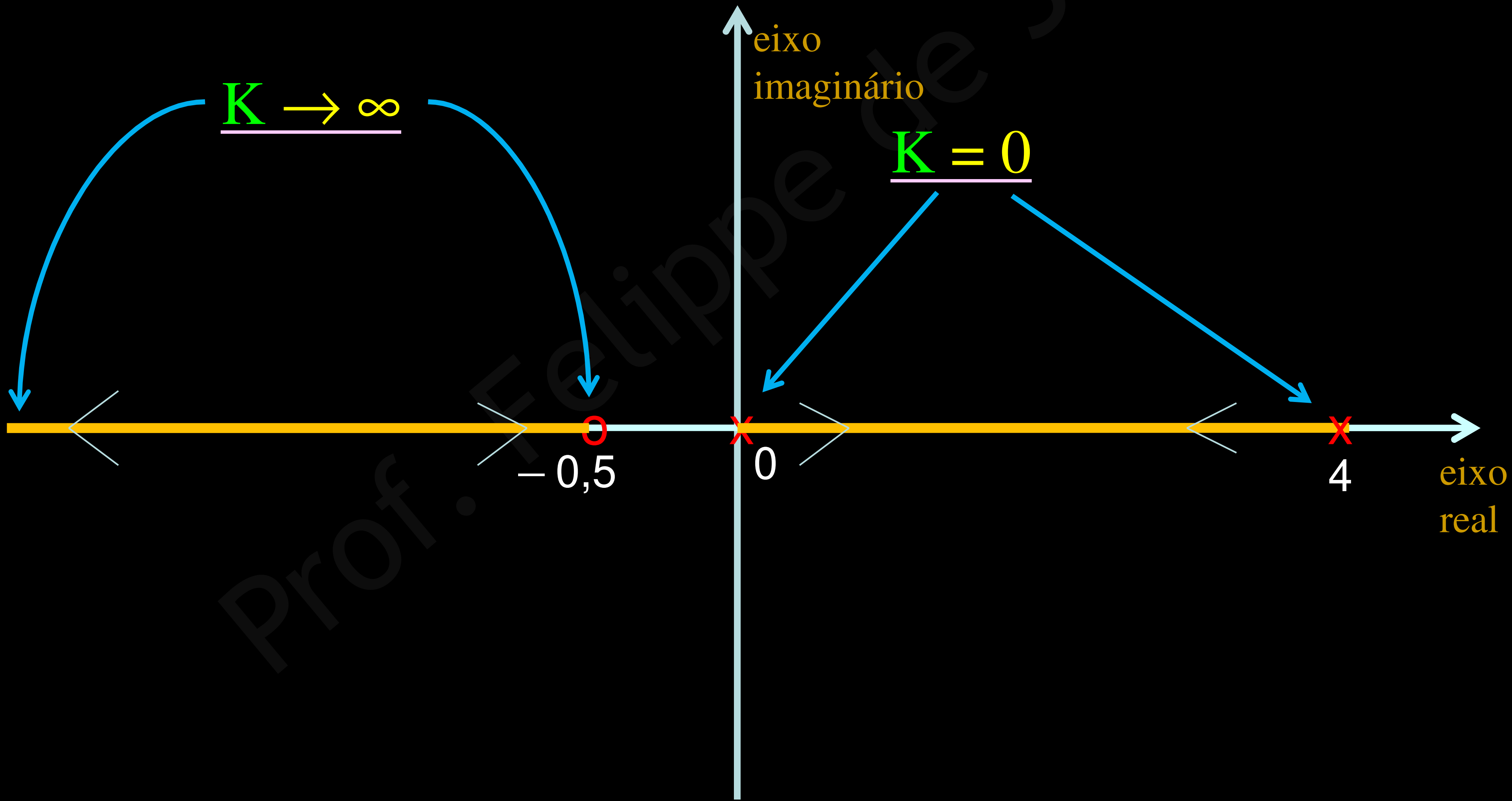
Exemplo 12 (*continuação*)

Os intervalos no *eixo real* (*Regra #2*), assim como os *pontos de início* e *término* dos ramos (*Regra #3*) estão assinalados abaixo.



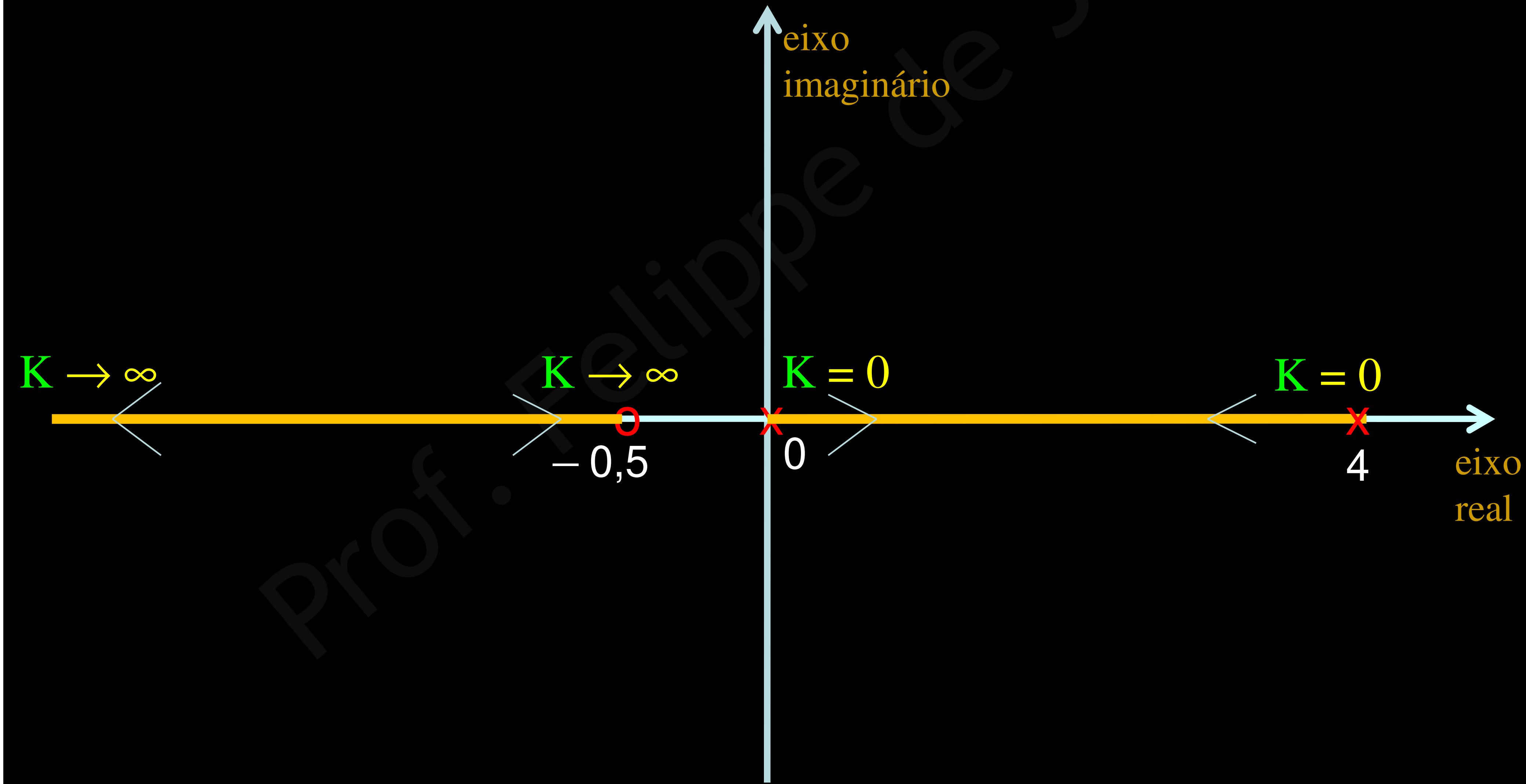
Exemplo 12 (*continuação*)

Os intervalos no *eixo real* (*Regra #2*), assim como os *pontos de início* e *término* dos ramos (*Regra #3*) estão assinalados abaixo.



Exemplo 12 (*continuação*)

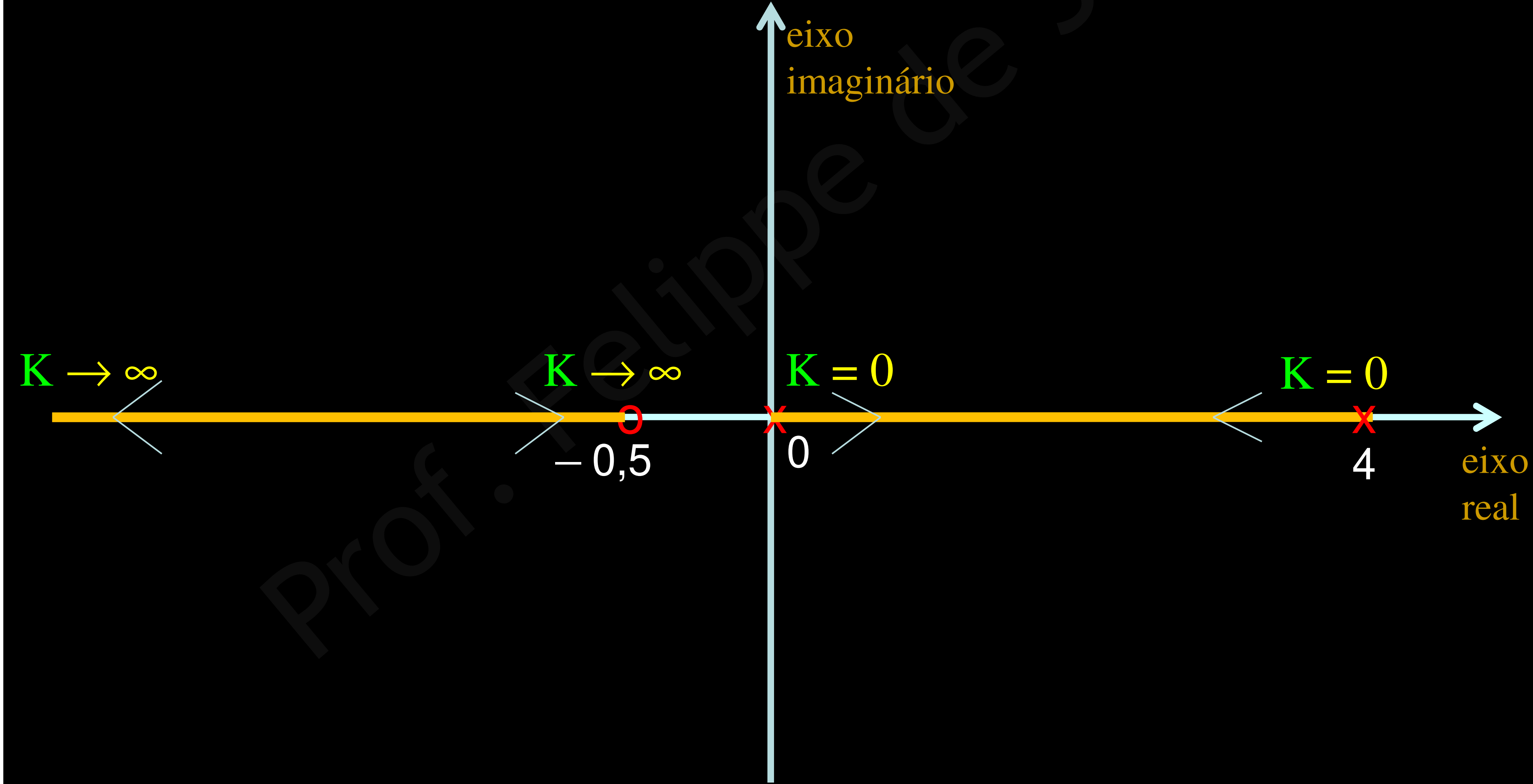
Os intervalos no *eixo real* (*Regra #2*), assim como os *pontos de início* e *término* dos ramos (*Regra #3*) estão assinalados abaixo.



Exemplo 12 (*continuação*)

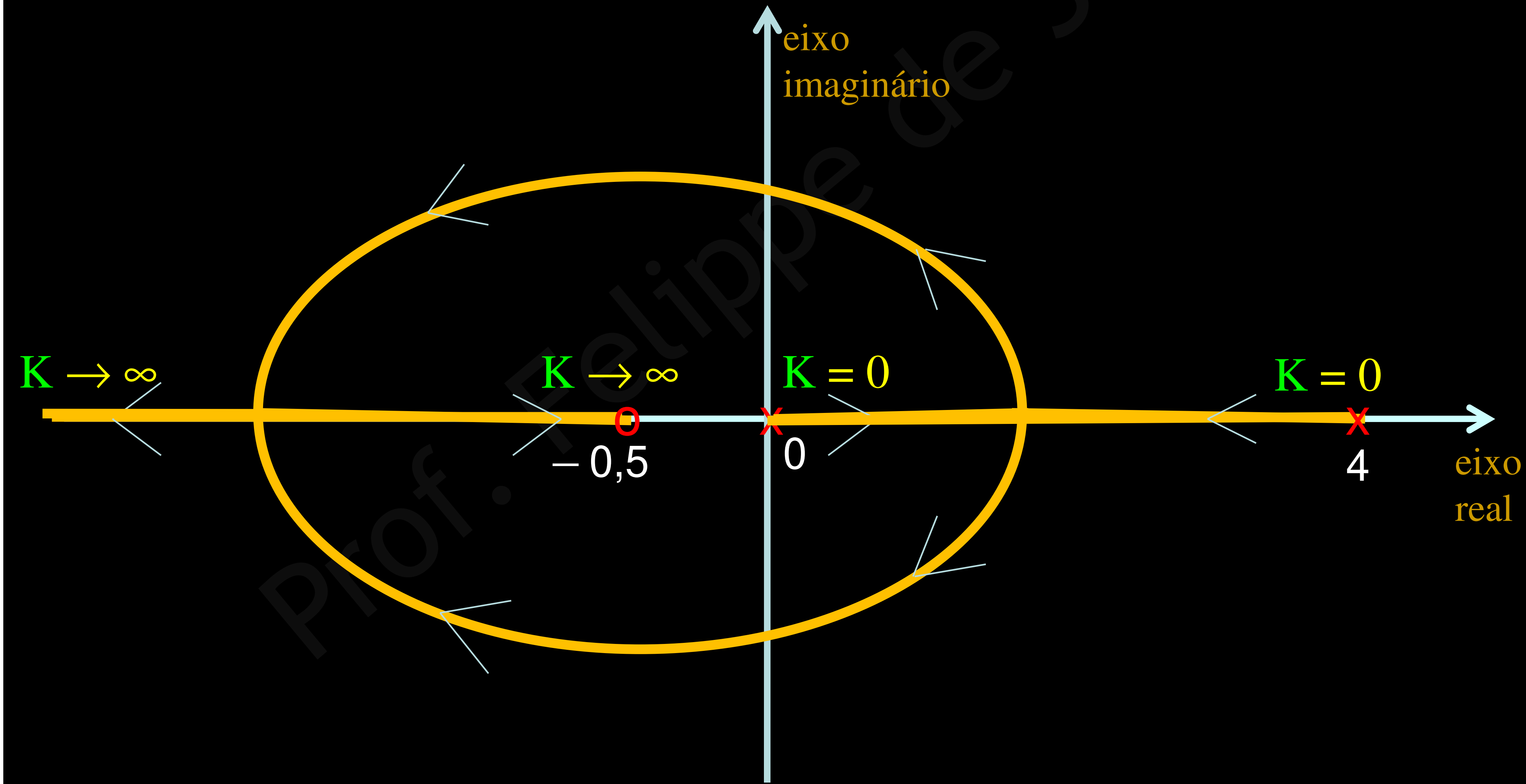
A única *assíntota* no infinito se dá em γ = 180° (*Regra #4*).

O ponto de intersecção da *assíntota* σ_o = 4,5 (*Regra #5*), embora neste caso não seja necessário pois o *Root Locus* se encontra inteiramente no *eixo real*.



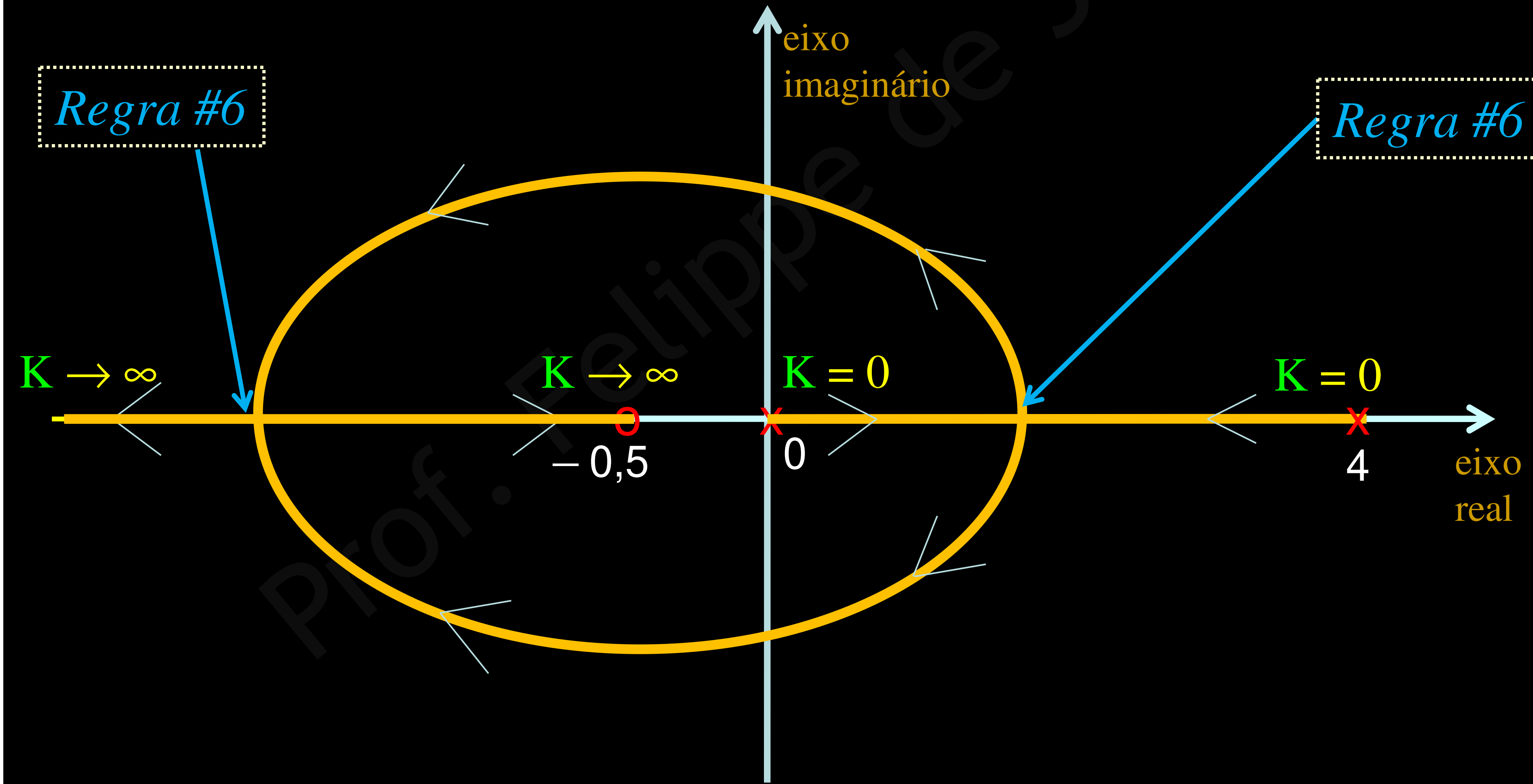
Exemplo 12 (*continuação*)

Já é possível se prever que os 2 *ramos* se encontram na *direita* e PARTEM do ***eixo real*** para voltarem a se encontrar na *esquerda* quando ENTRAM novamente no ***eixo real***.



Exemplo 12 (*continuação*)

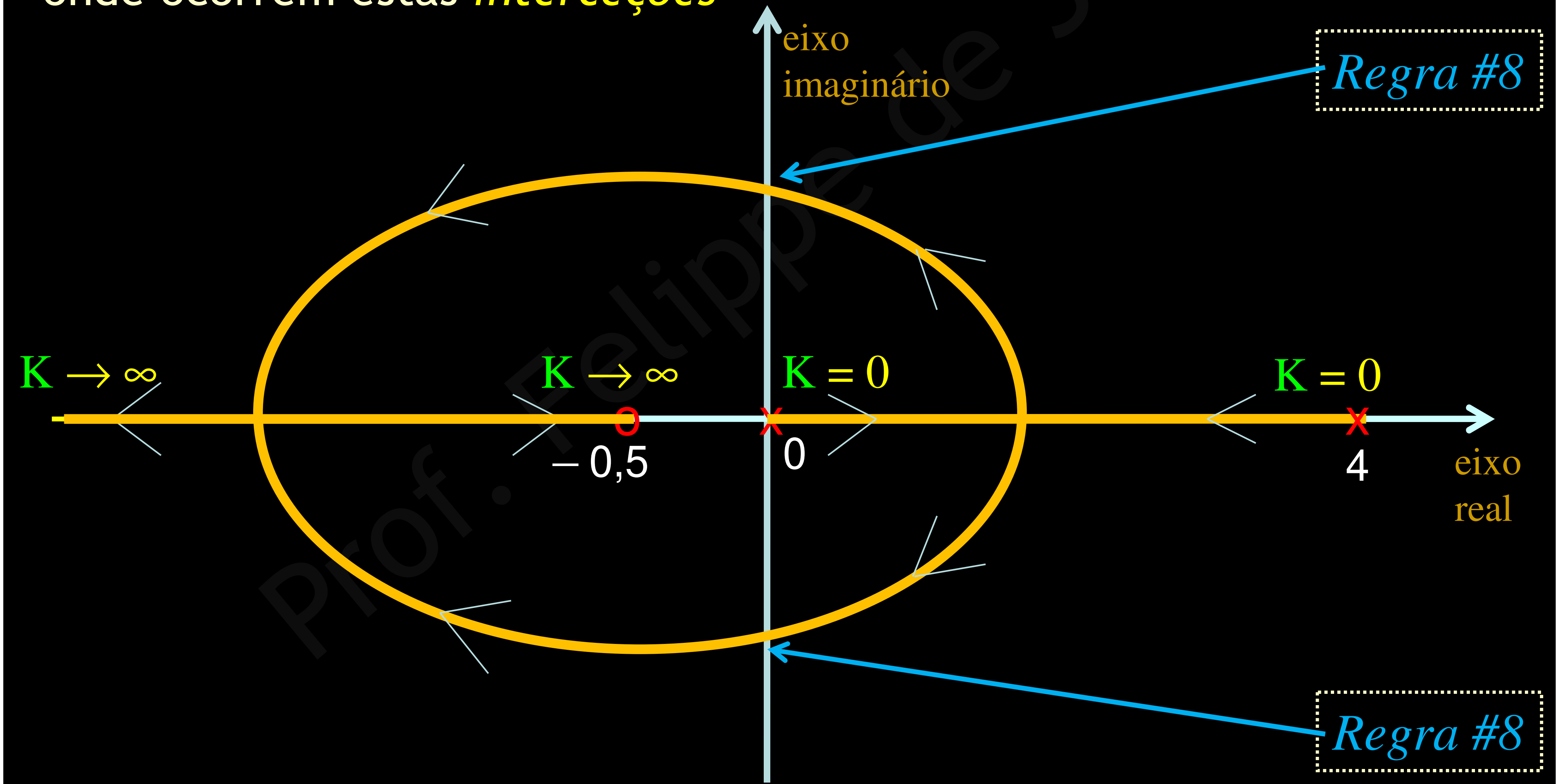
Entretanto somente pela *Regra #6* se poderá determinar exactamente quais são estes *pontos*



Exemplo 12 (*continuação*)

Por outro lado, também já é possível se prever que os 2 *ramos* intercetam o *eixo imaginário*

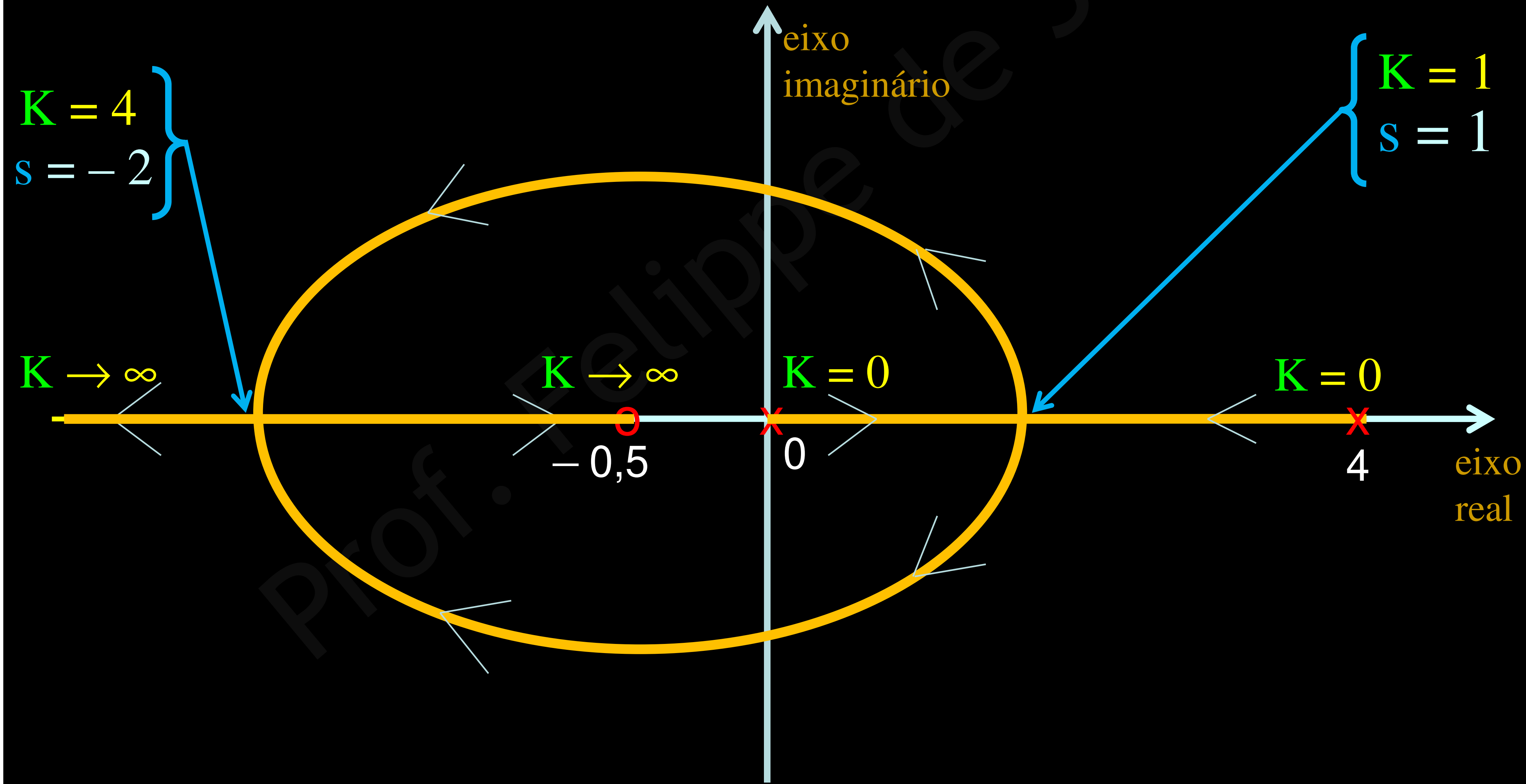
Entretanto somente pela *Regra #8* se poderá determinar exatamente onde ocorrem estas *interceções*



Exemplo 12 (*continuação*)

Os *pontos* do *eixo real* onde há encontro de ramos (*Regra #6*), conforme já vimos (Exemplo 6, parte 1), são:

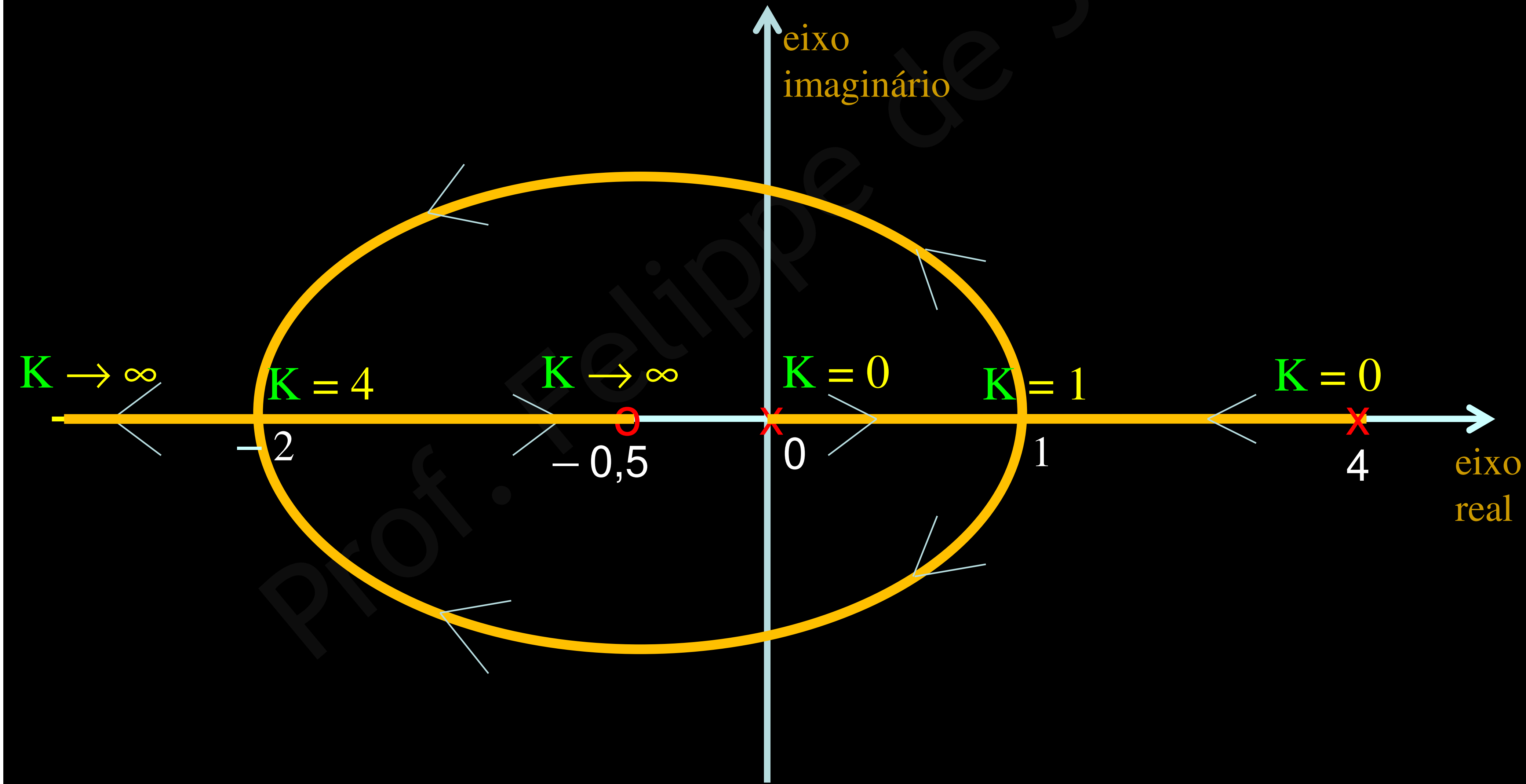
$s = 1$ (para $K = 1$) e $s = -2$ (para $K = 4$)



Exemplo 12 (*continuação*)

Os *pontos* do *eixo real* onde há encontro de ramos (*Regra #6*), conforme já vimos (Exemplo 6, parte 1), são:

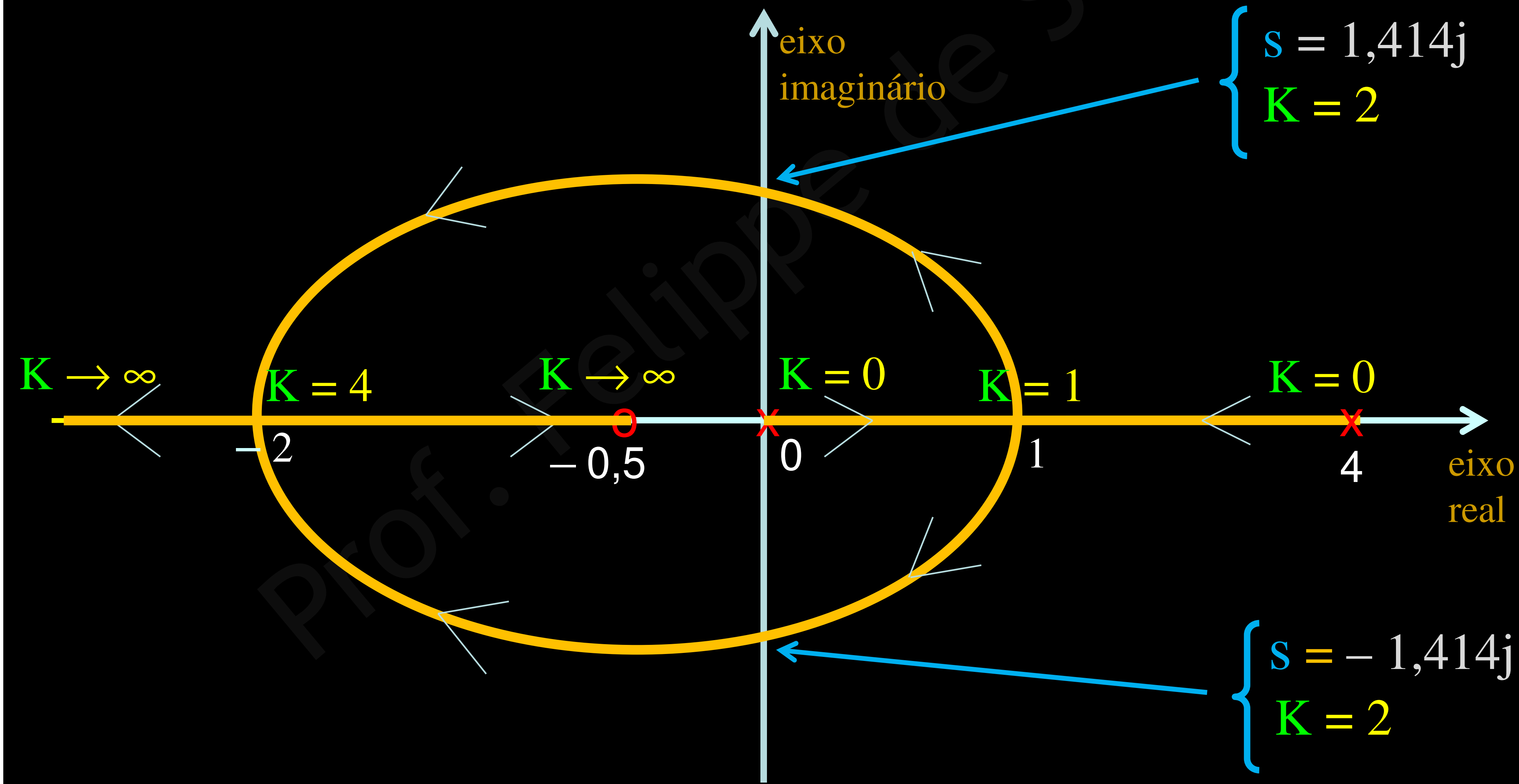
$\underline{s = 1}$ (para $\underline{K = 1}$) e $\underline{s = -2}$ (para $\underline{K = 4}$)



Exemplo 12 (*continuação*)

Os *pontos de interseção* com *eixo imaginário* (*Regra #8*), conforme já vimos (Exemplo 10), são:

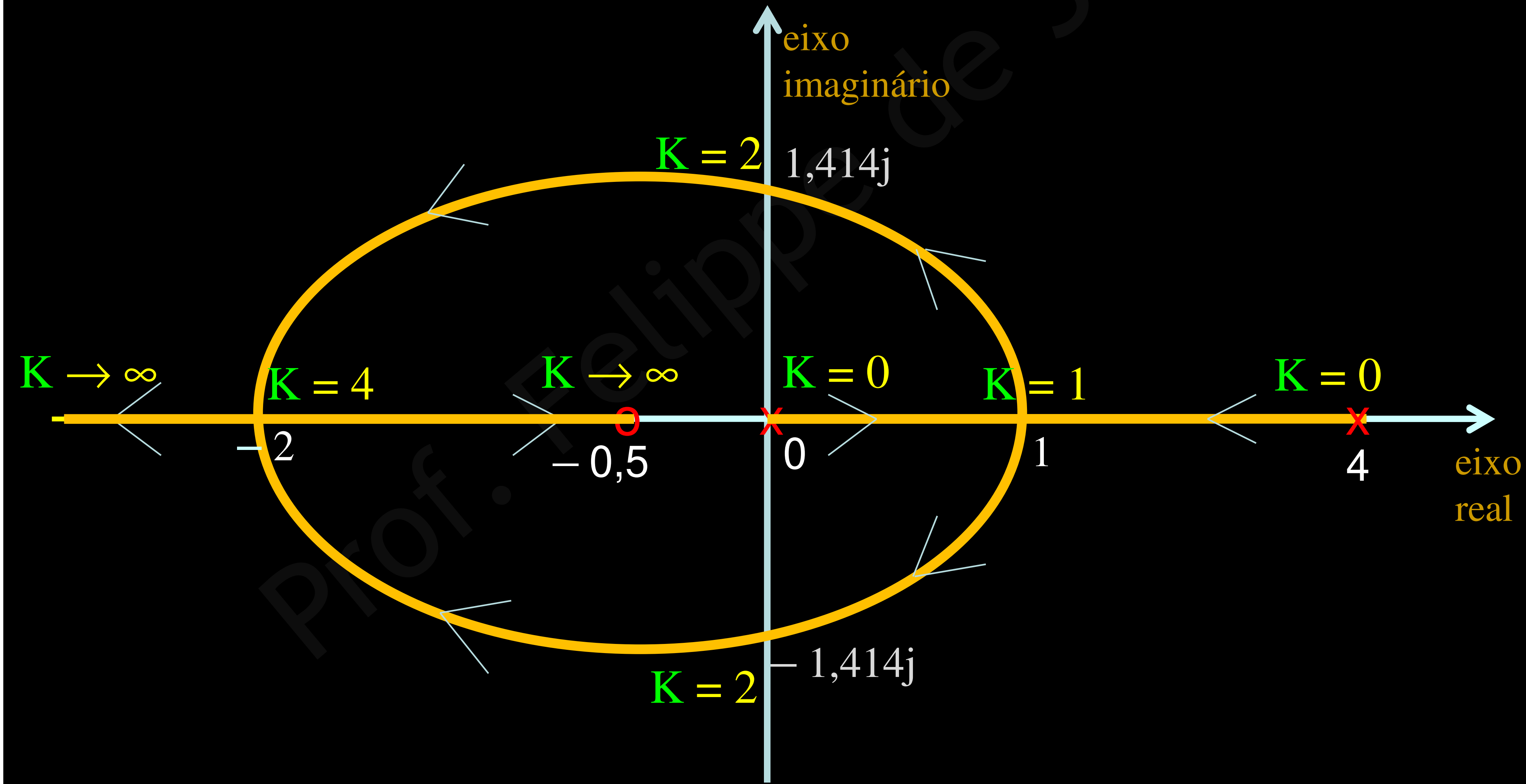
$s = \pm 1,414j$ (para $K = 2$)



Exemplo 12 (*continuação*)

Os *pontos de interseção* com *eixo imaginário* (*Regra #8*), conforme já vimos (Exemplo 10), são:

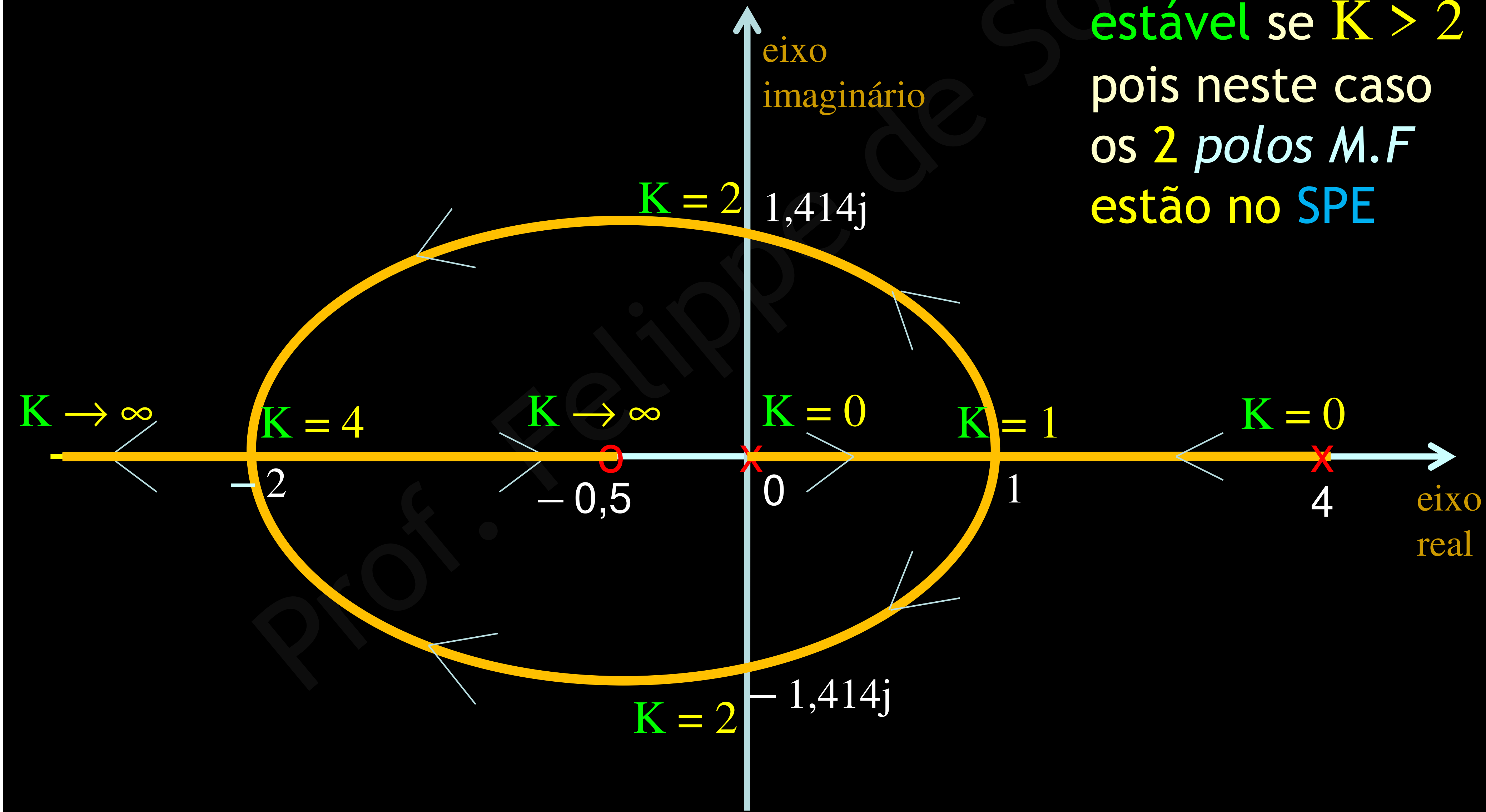
$$s = \pm\, 1{,}414j \quad \text{(para } K = 2\text{)}$$



Exemplo 12 (*continuação*)

e o "*Root Locus*" fica assim completo.

Observe que o *sistema M.F.* é estável se $K > 2$ pois neste caso os 2 *polos M.F* estão no SPE



Exemplo 13:

Esboço do "*Root Locus*" para

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$n = 3$

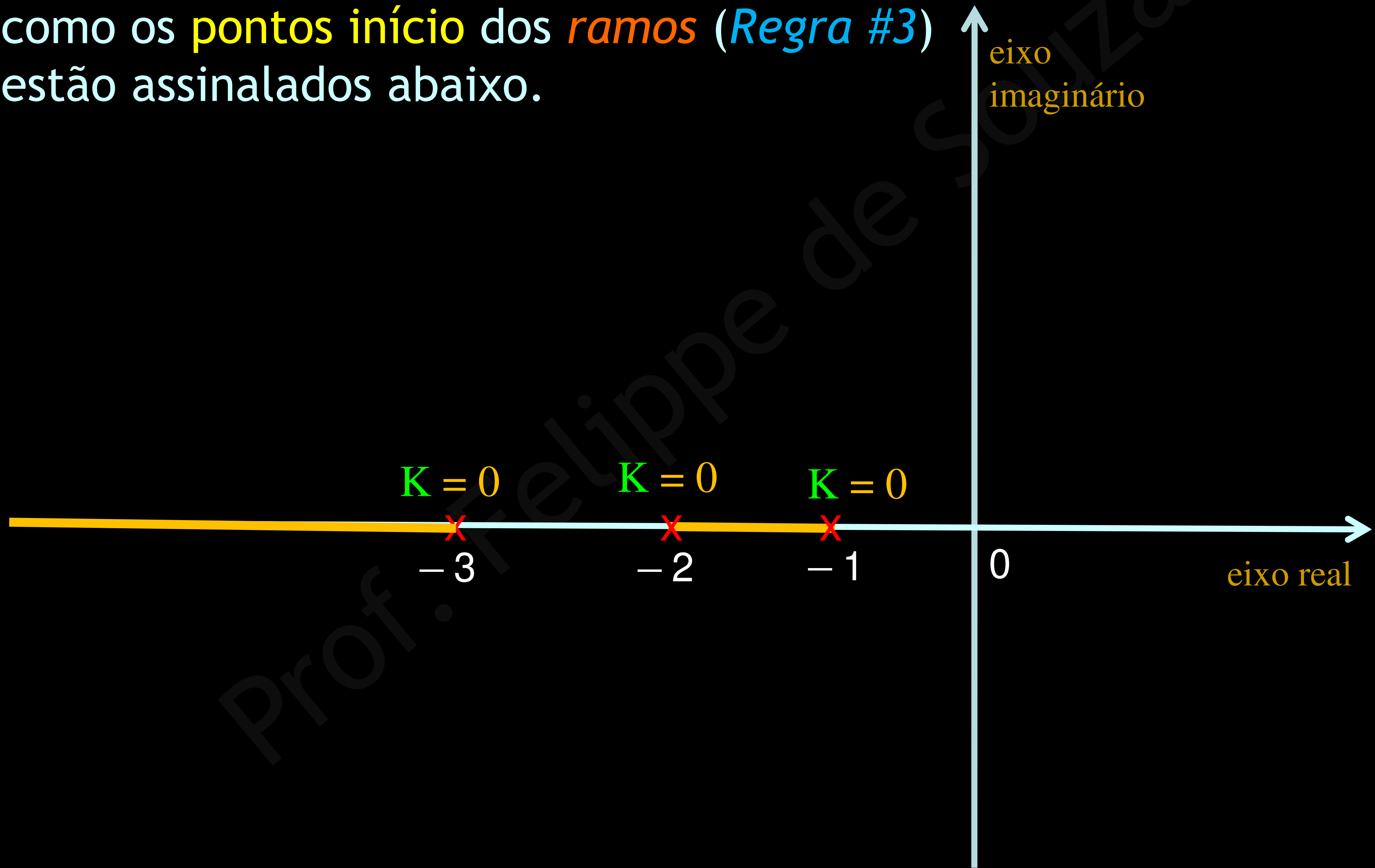
$m = 0$

Este "*Root Locus*" tem 3 *ramos* (*Regra #1*)

Este *sistema M.F.* já apareceu nos Exemplos 5 e 7 (parte I)

Exemplo 13 (*continuação*)

Os intervalos no *eixo real* (*Regra #2*), assim como os pontos início dos *ramos* (*Regra #3*) estão assinalados abaixo.

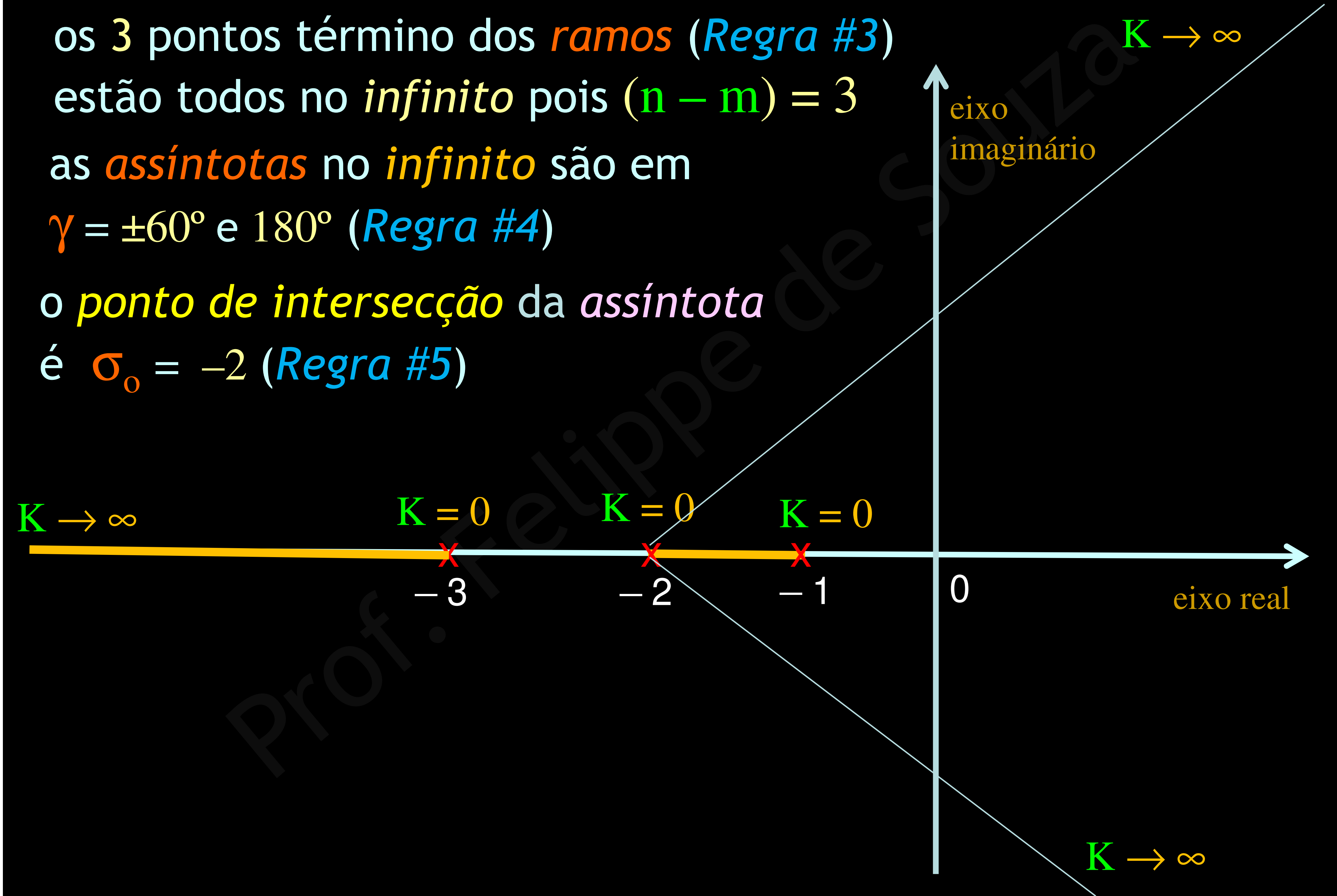


Exemplo 13 (*continuação*)

os 3 pontos término dos *ramos* (*Regra #3*) estão todos no *infinito* pois $(n - m) = 3$

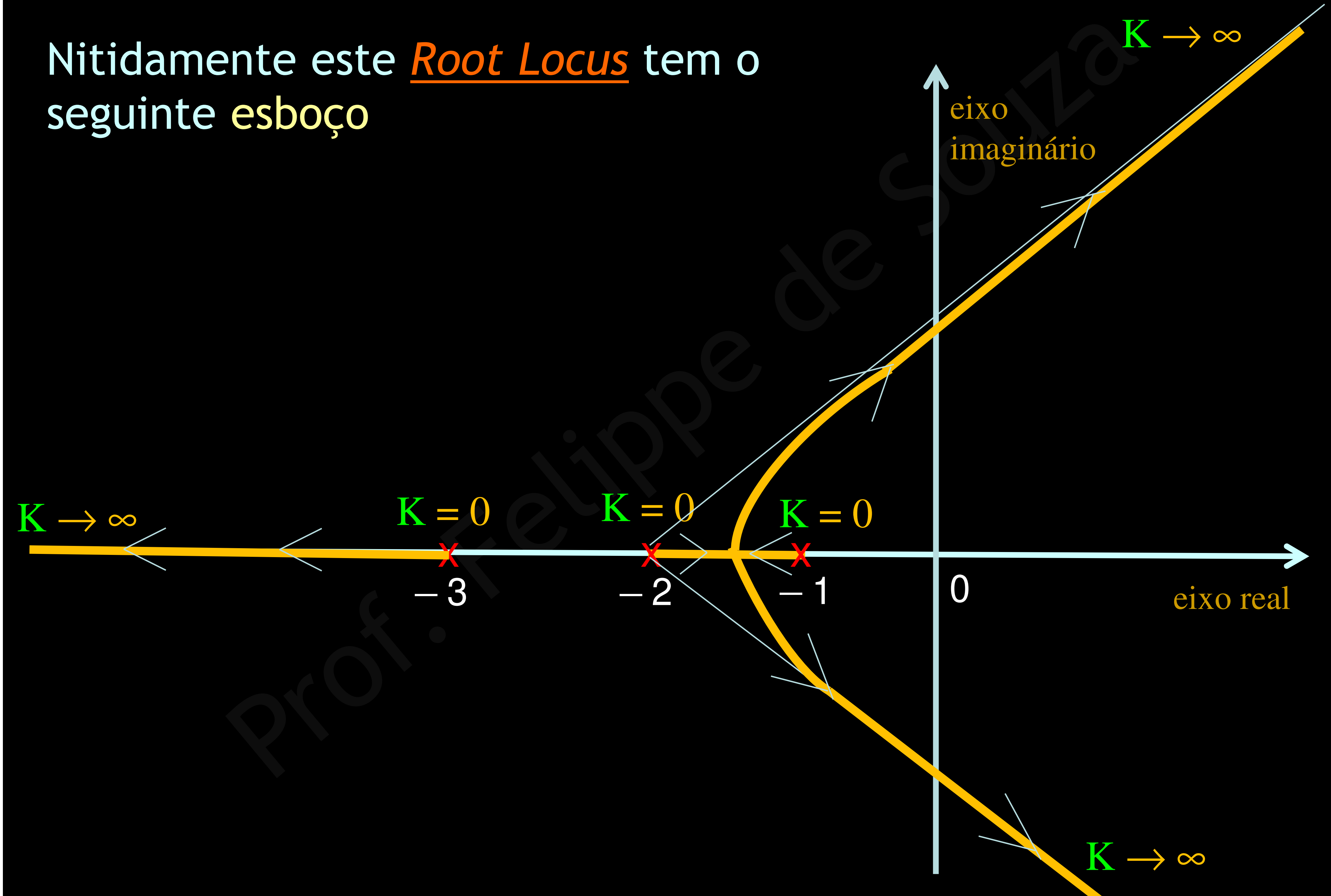
as *assíntotas* no *infinito* são em $\gamma = \pm 60^{\circ}$ e 180° (*Regra #4*)

o *ponto de intersecção* da *assíntota* é $\sigma_o = -2$ (*Regra #5*)



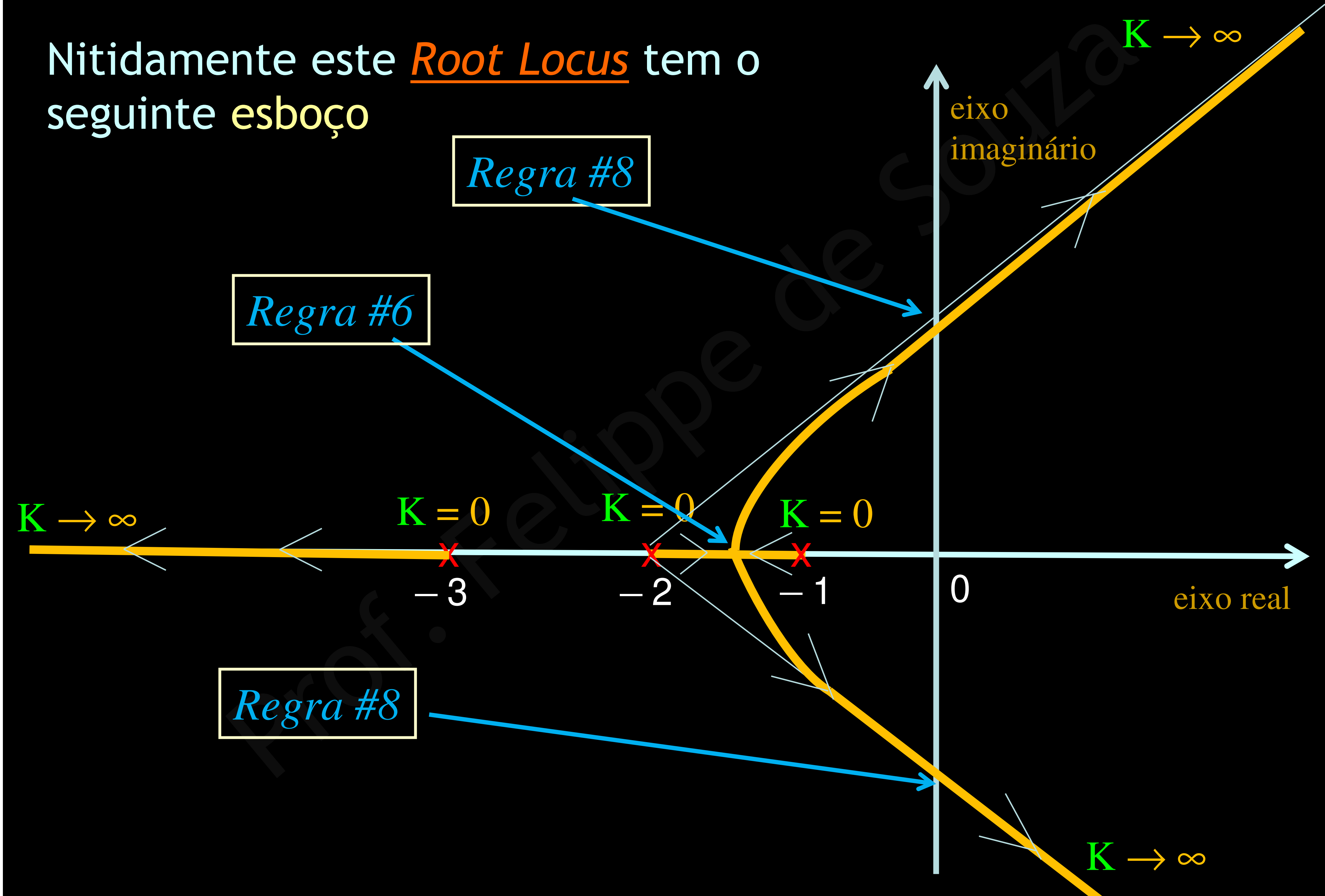
Exemplo 13 (*continuação*)

Nitidamente este *Root Locus* tem o seguinte esboço



Exemplo 13 (*continuação*)

Nitidamente este *Root Locus* tem o seguinte esboço

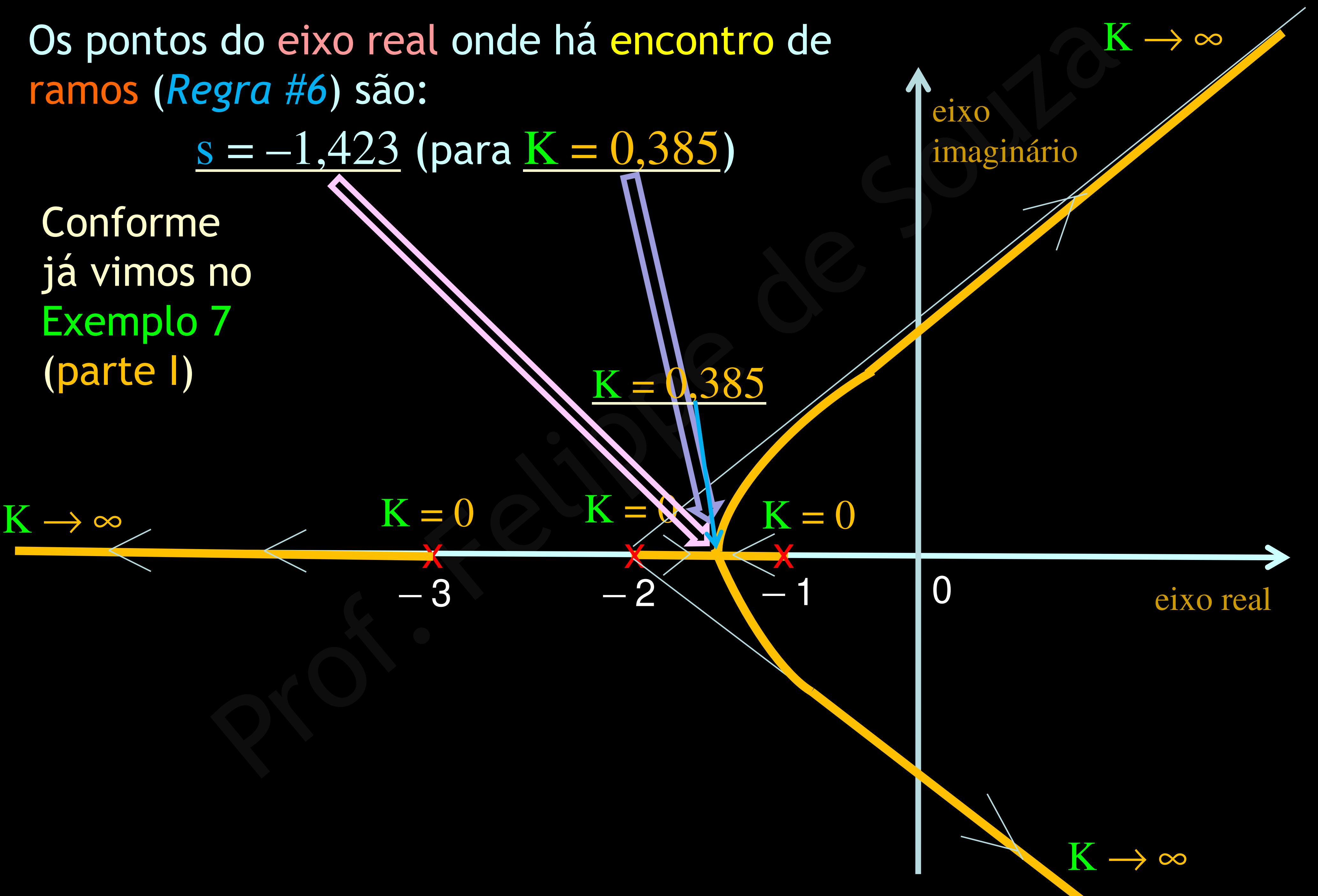


Exemplo 13 (*continuação*)

Os pontos do eixo real onde há encontro de ramos (*Regra #6*) são:

$s = -1{,}423$ (para $K = 0{,}385$)

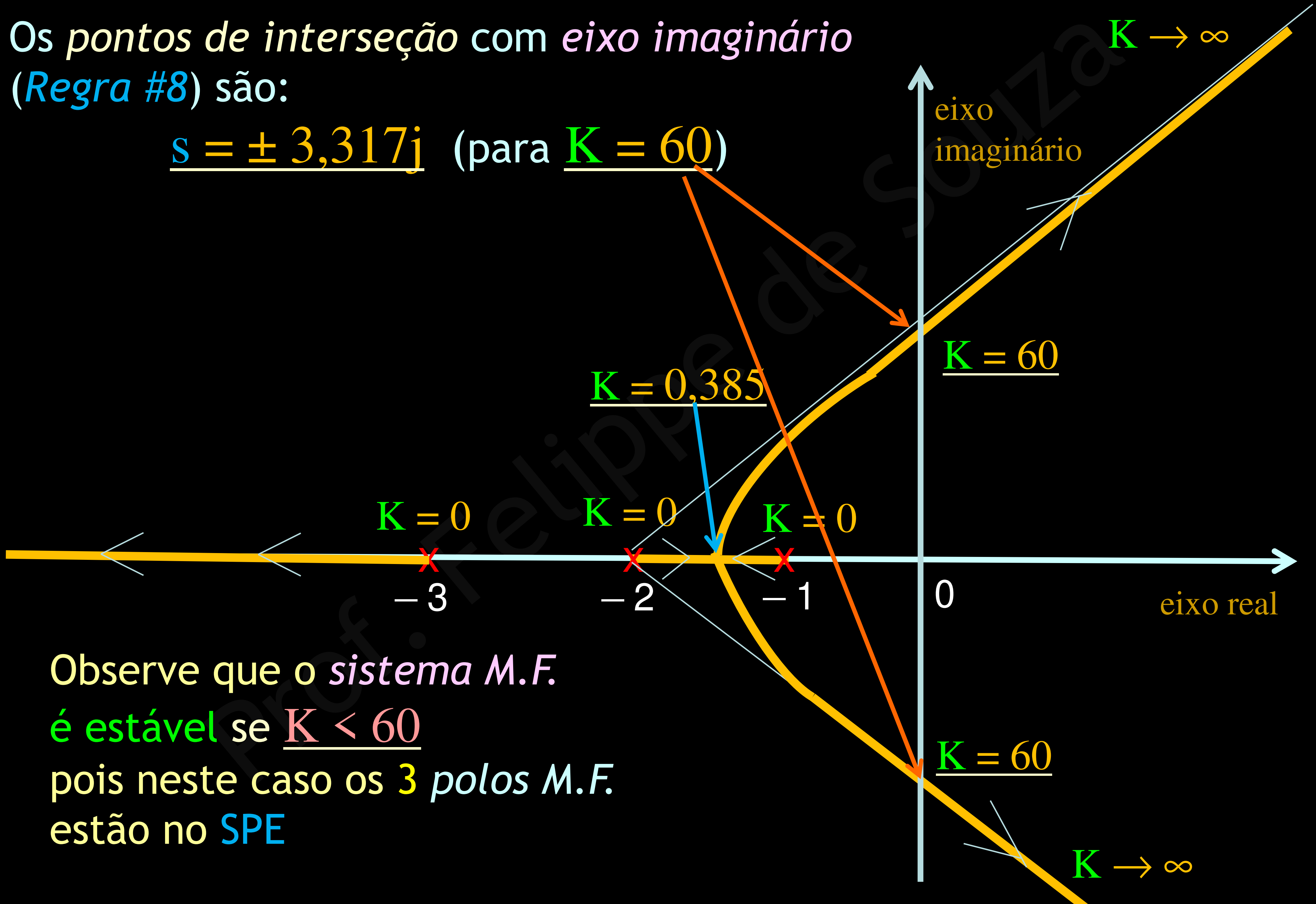
Conforme já vimos no Exemplo 7 (parte I)



Exemplo 13 (*continuação*)

Os *pontos de interseção* com *eixo imaginário* (*Regra #8*) são:

$s = \pm\, 3{,}317j$ (para $K = 60$)



Observe que o *sistema M.F.* é estável se $K < 60$ pois neste caso os 3 *polos M.F.* estão no SPE

Exemplo 14:

Esboço do "*Root Locus*" para

$$G(s)H(s) = \frac{K \cdot (s-2)^2}{(s^2+2s+2) \cdot (s+1)}$$

$n = 3$

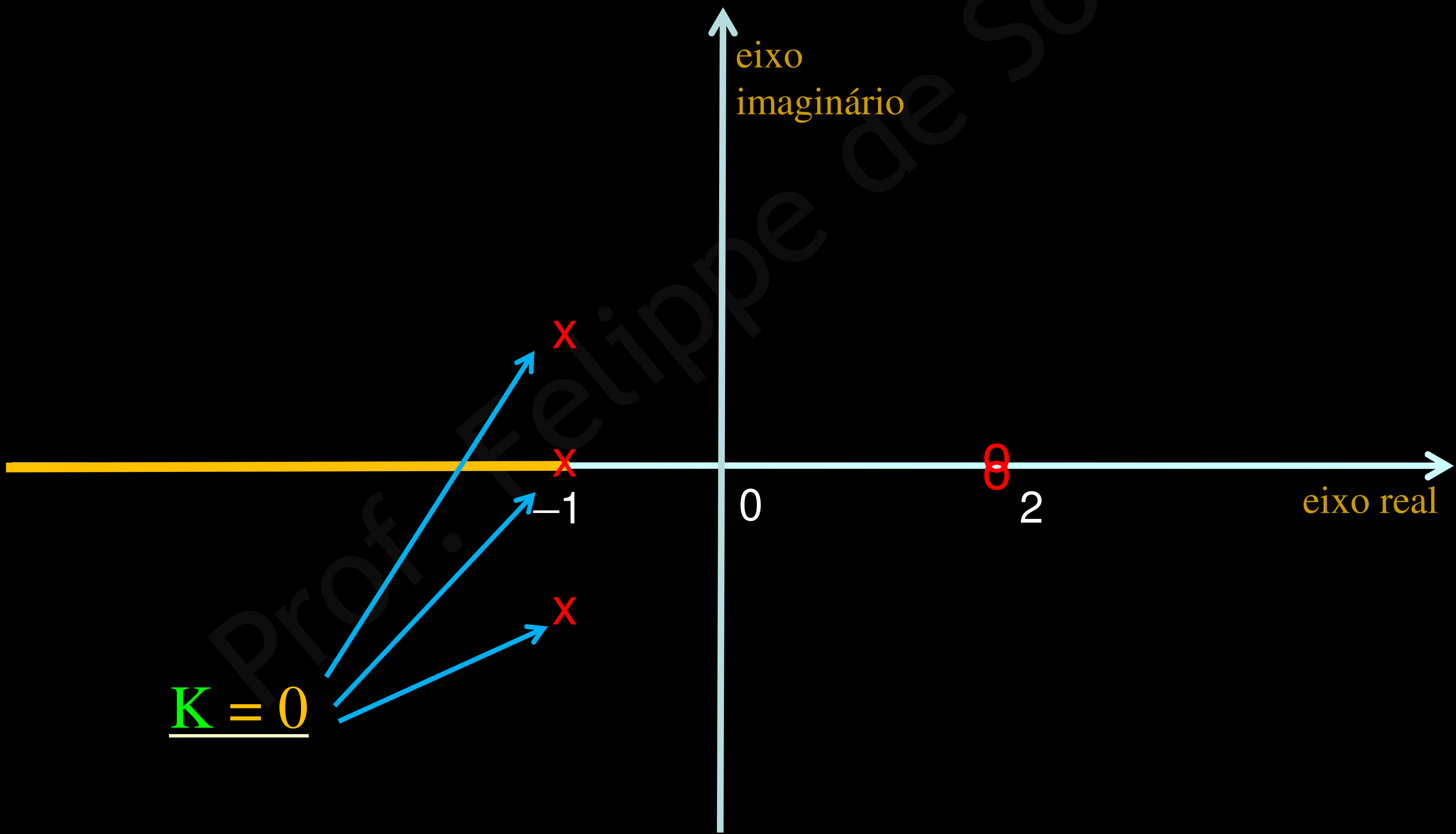
$m = 2$

Este "*Root Locus*" tem 3 *ramos* (*Regra #1*)

Este *sistema M.A.* já apareceu no Exemplo 11 (desta parte II)

Exemplo 14 (*continuação*)

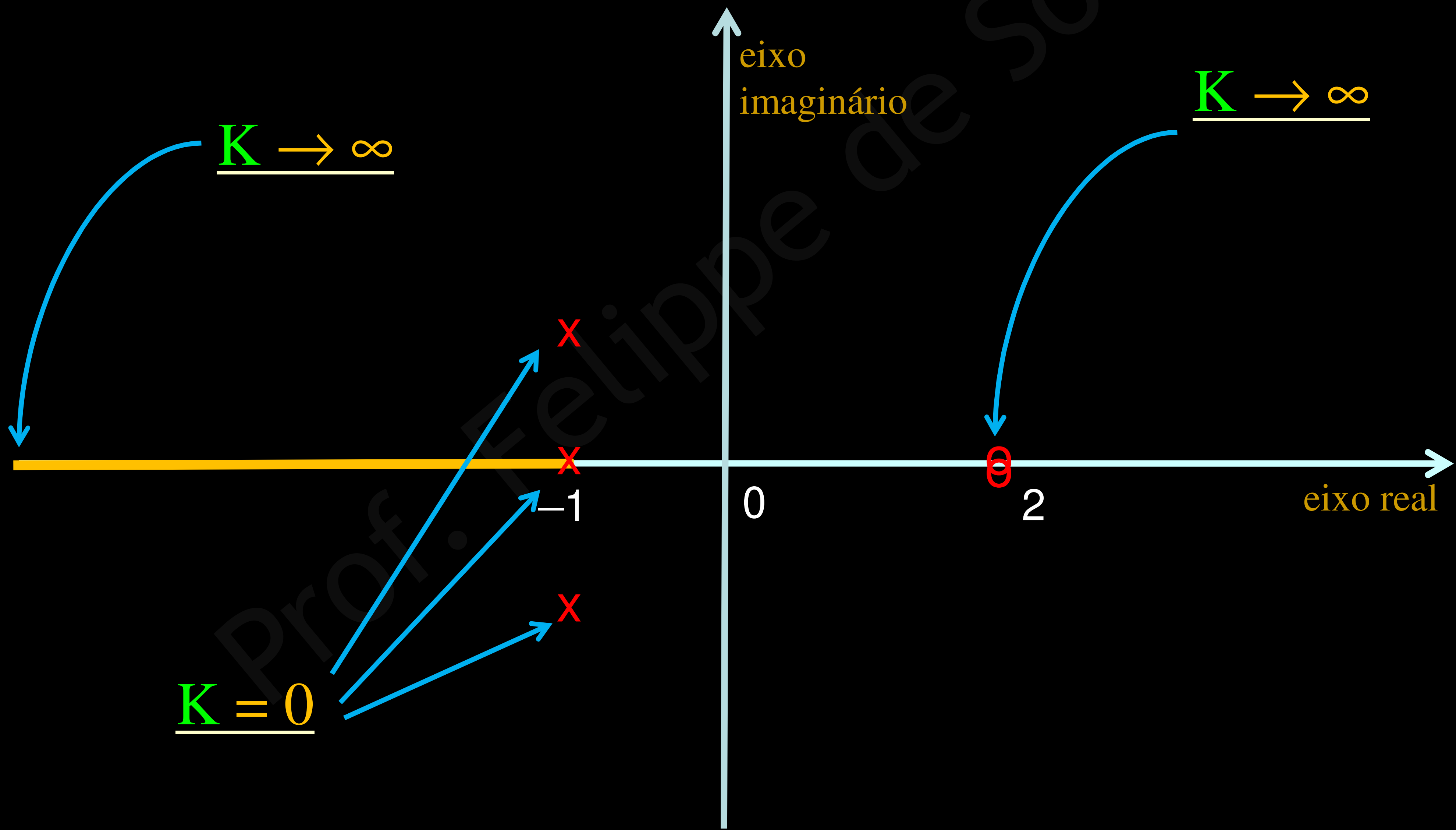
Os intervalos no *eixo real* (*Regra #2*), assim como os *pontos* de início e término dos *ramos* (*Regra #3*) estão assinalados abaixo.



Exemplo 14 (*continuação*)

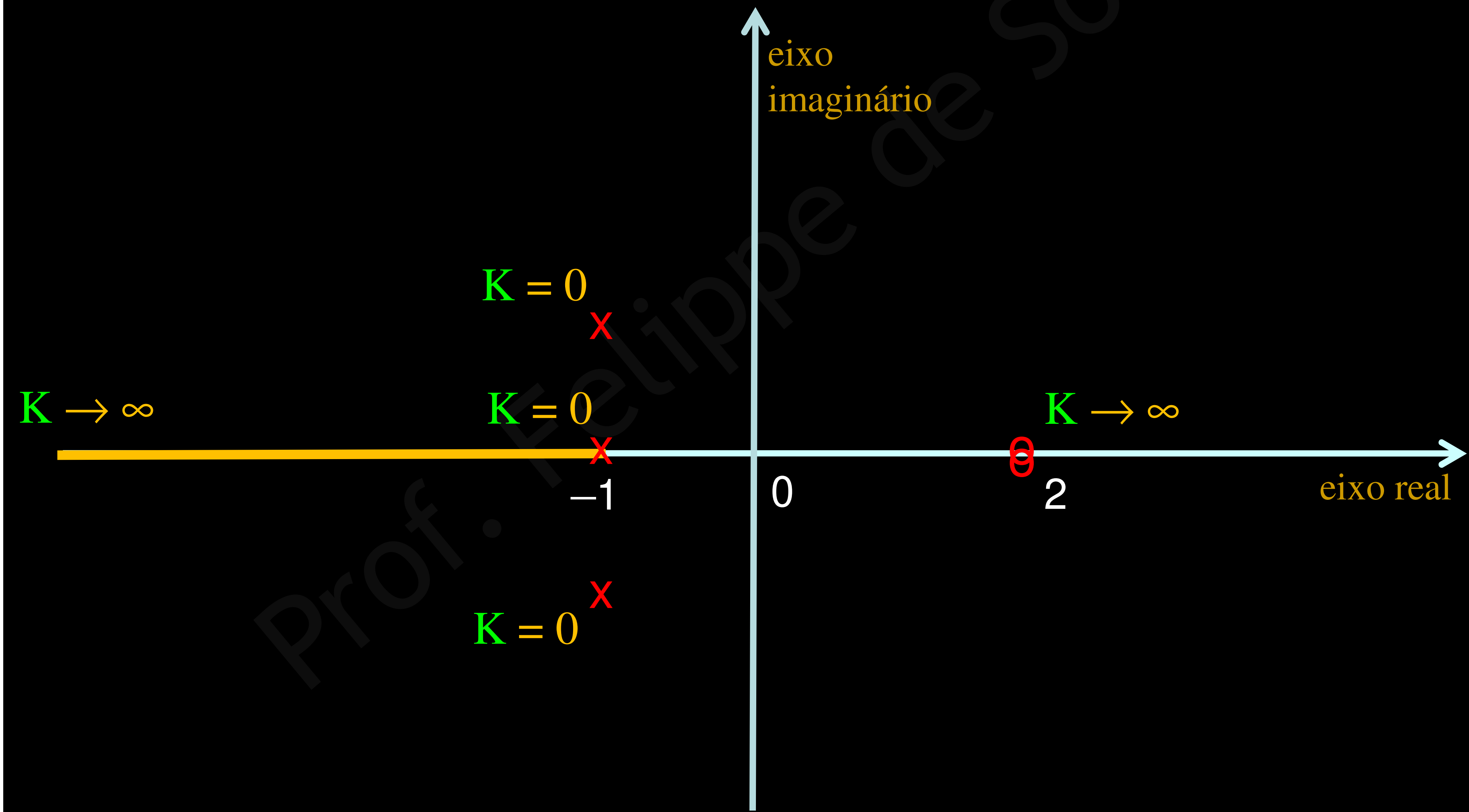
A única *assíntota* no infinito se dá em $\gamma = 180^\circ$ (*Regra #4*)

O *ponto* de intersecção da *assíntota* $\sigma_o = -7$ (*Regra #5*), embora neste caso não seja necessário.



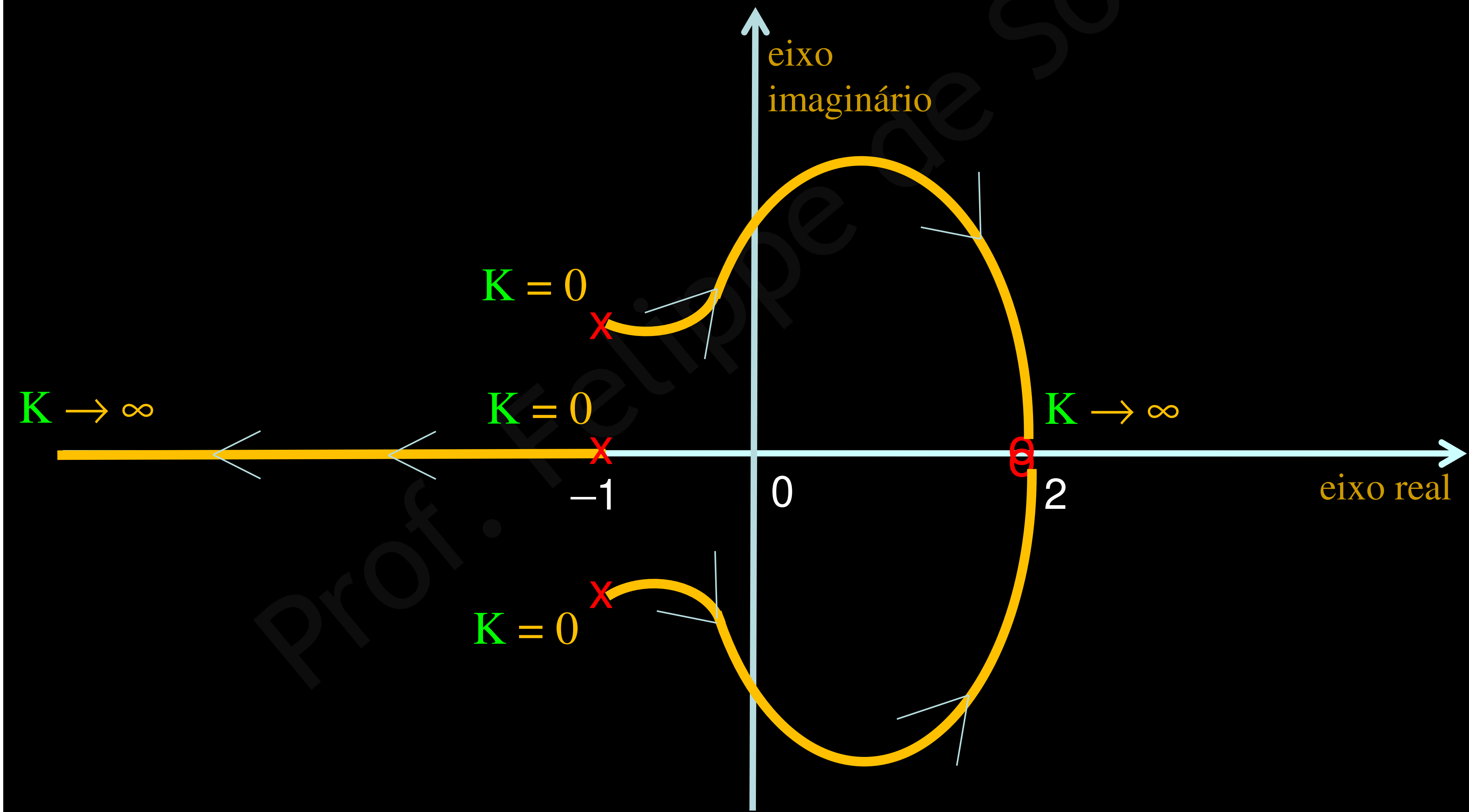
Exemplo 14 (*continuação*)

Resumindo, os intervalos no *eixo real* (*Regra #2*), assim como os *pontos* início e término dos *ramos* (*Regra #3*) estão assinalados abaixo.



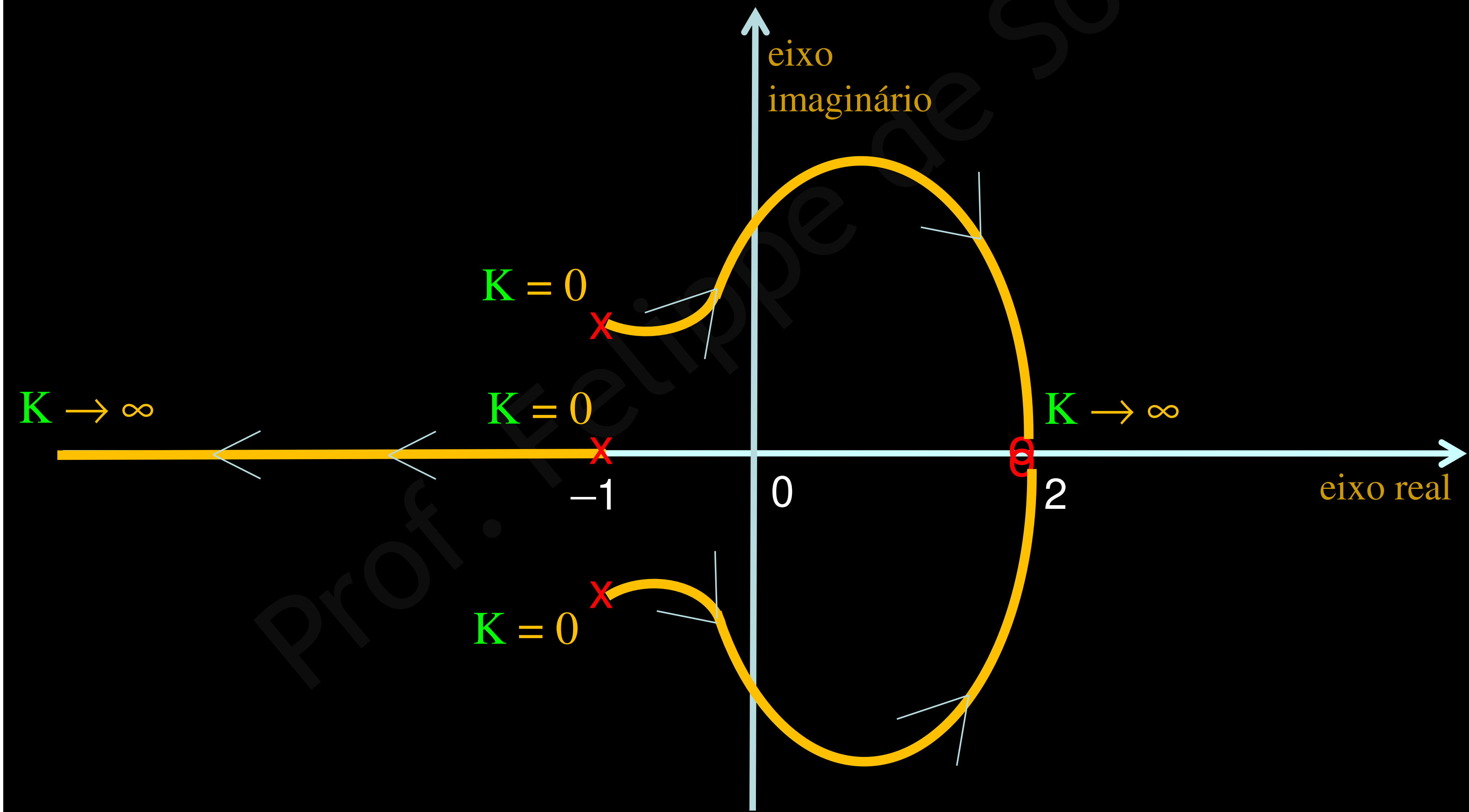
Exemplo 14 (*continuação*)

Pode-se prever que os 2 *ramos* que nascem nos 2 polos *complexos* $s = -1 \pm j$ vão para direita ao encontro dos zeros (duplos) em $s = 2$



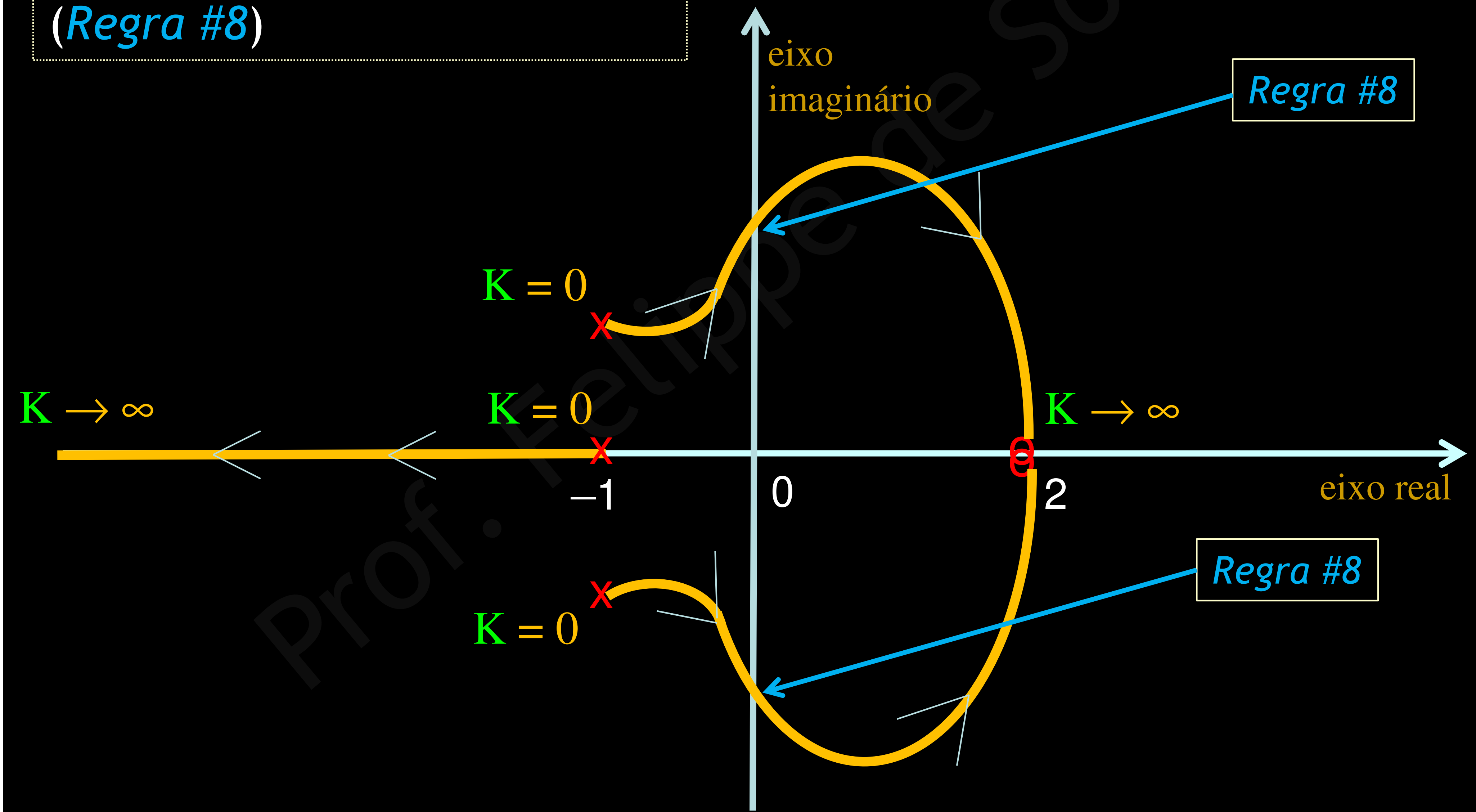
Exemplo 14 (*continuação*)

e além disso, um terceiro *ramo*, que nasce do *polo real* em $s = -1$ vai para esquerda morrer na *assíntota* no ∞.



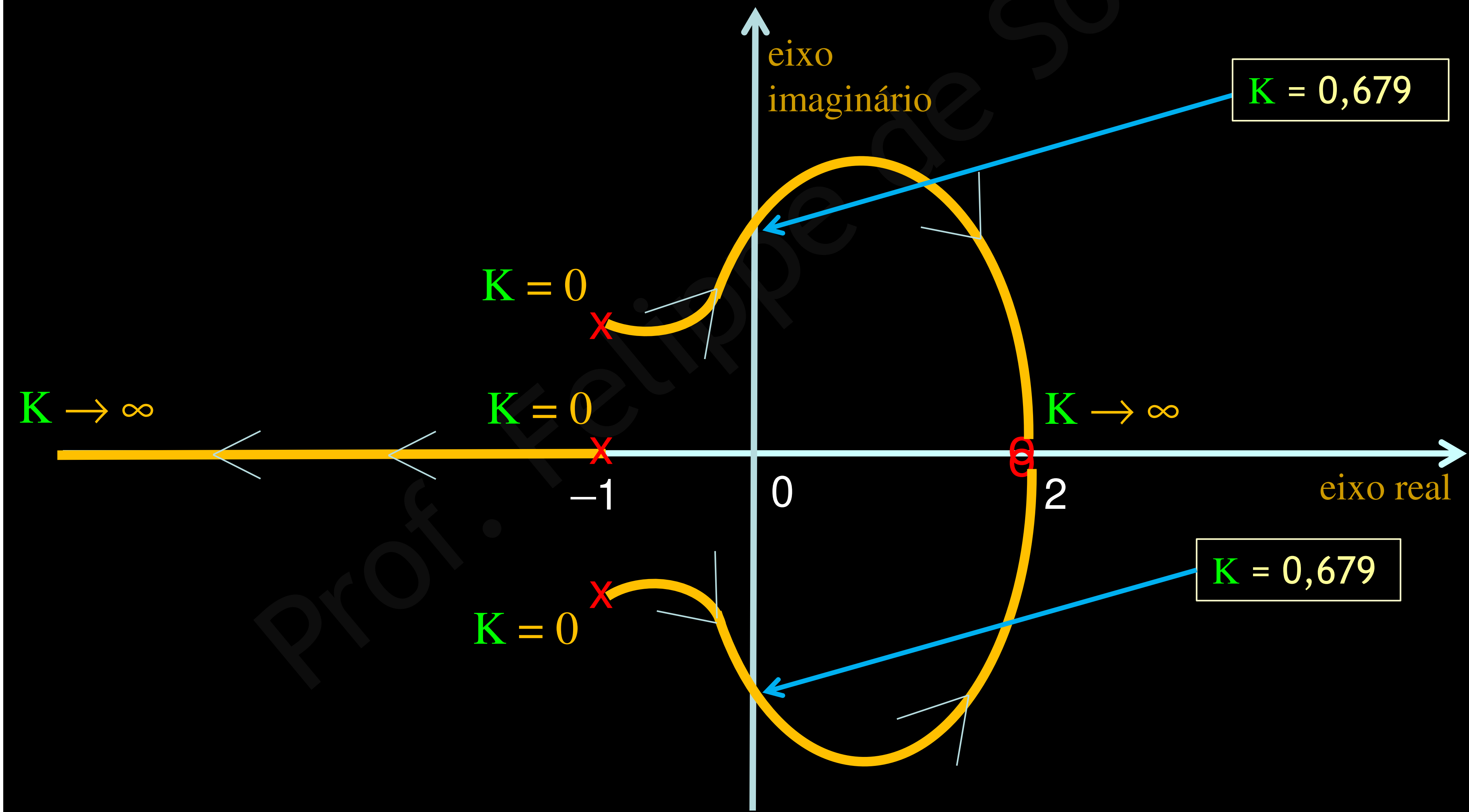
Exemplo 14 (*continuação*)

Mas ainda falta acrescentar os *pontos* que o *Root Locus* interceta o *eixo imaginário* (*Regra #8*)



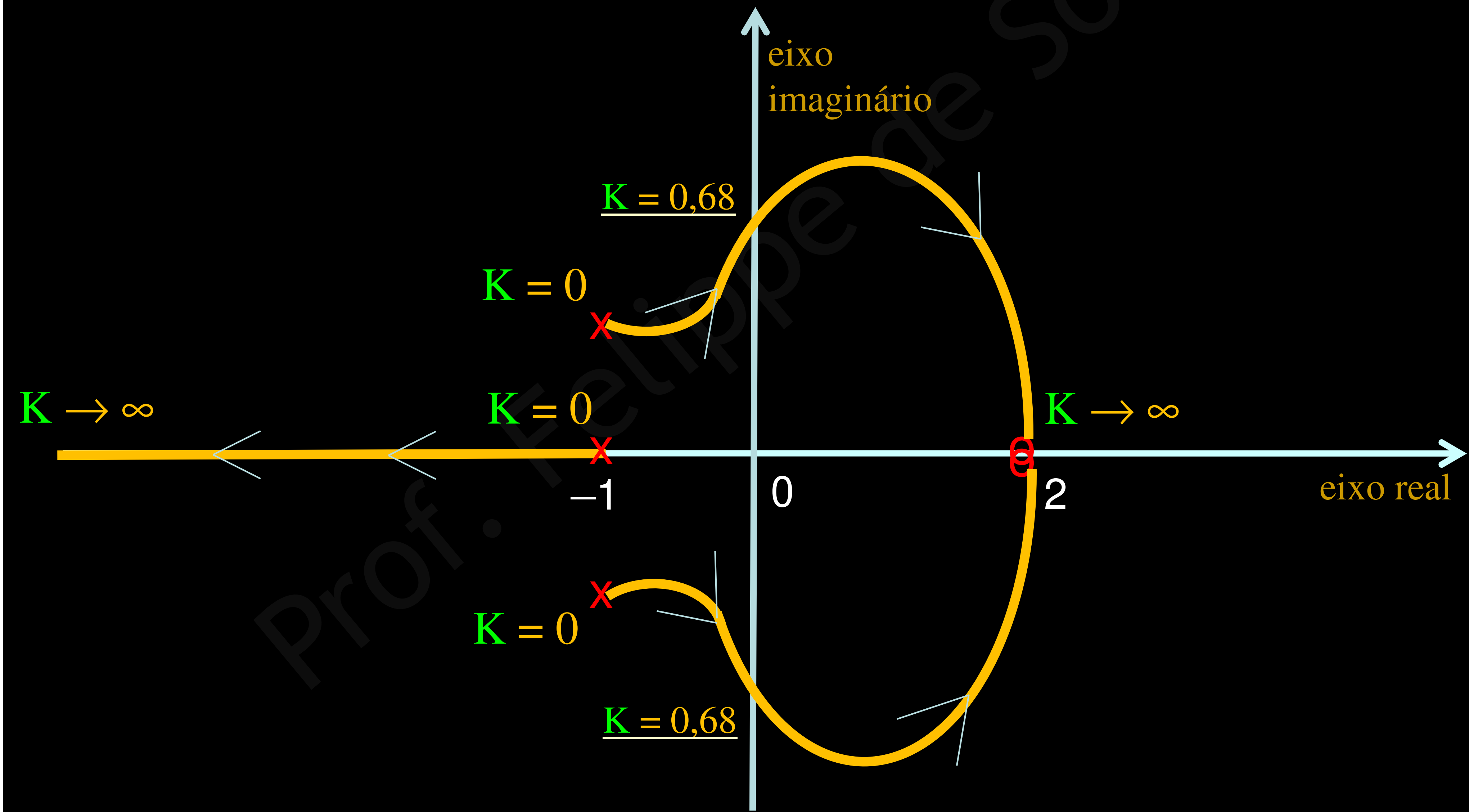
Exemplo 14 (*continuação*)

Conforme já vimos no Exemplo 11, os pontos do eixo imaginário onde há encontro de ramos (*Regra #8*) são: $s = \pm 1{,}132j$ (para $K \cong 0{,}68$)



Exemplo 14 (*continuação*)

Note que este *sistema M.F.* é *estável* apenas para $K < 0{,}68$



Exemplo 15:

Esboço do "*Root Locus*" para

$$G(s)H(s) = \frac{K\cdot(s-2)^2}{(s^2+2s+6)\cdot(s-0{,}5)}$$

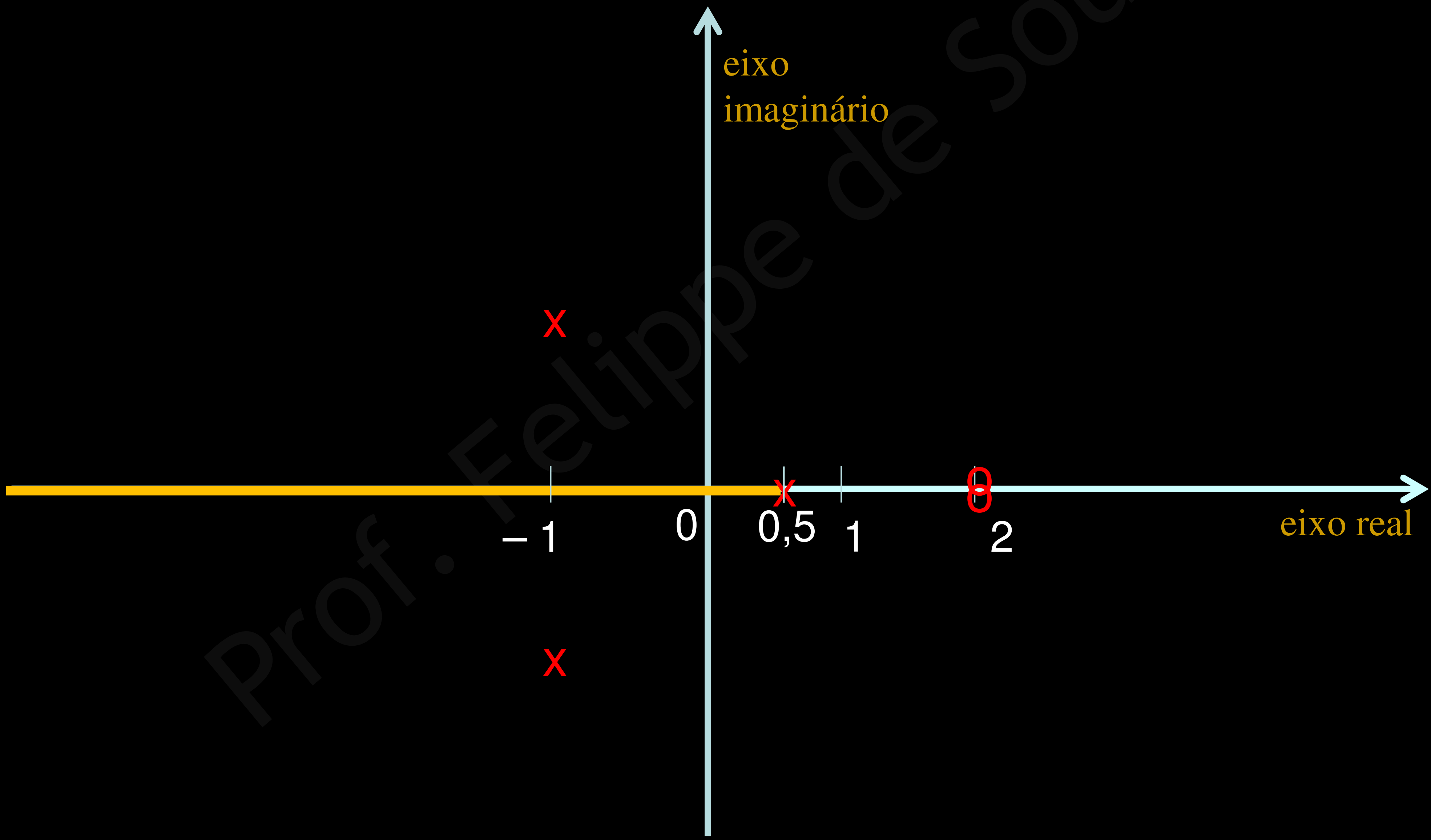
$n = 3$

$m = 2$

Este "*Root Locus*" tem 3 *ramos* (*Regra #1*)

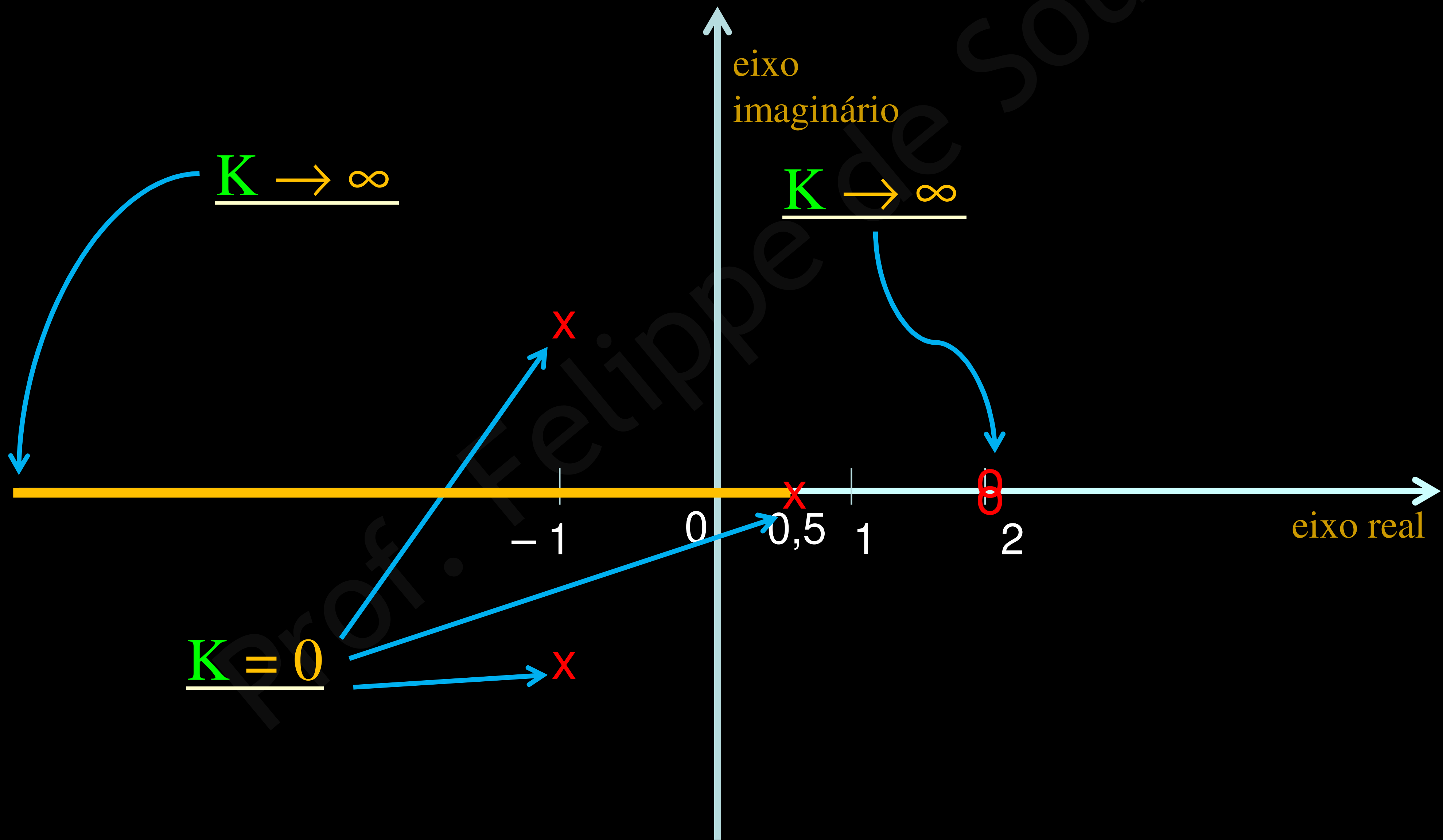
Exemplo 15 (*continuação*)

Os intervalos no *eixo real* (*Regra #2*)



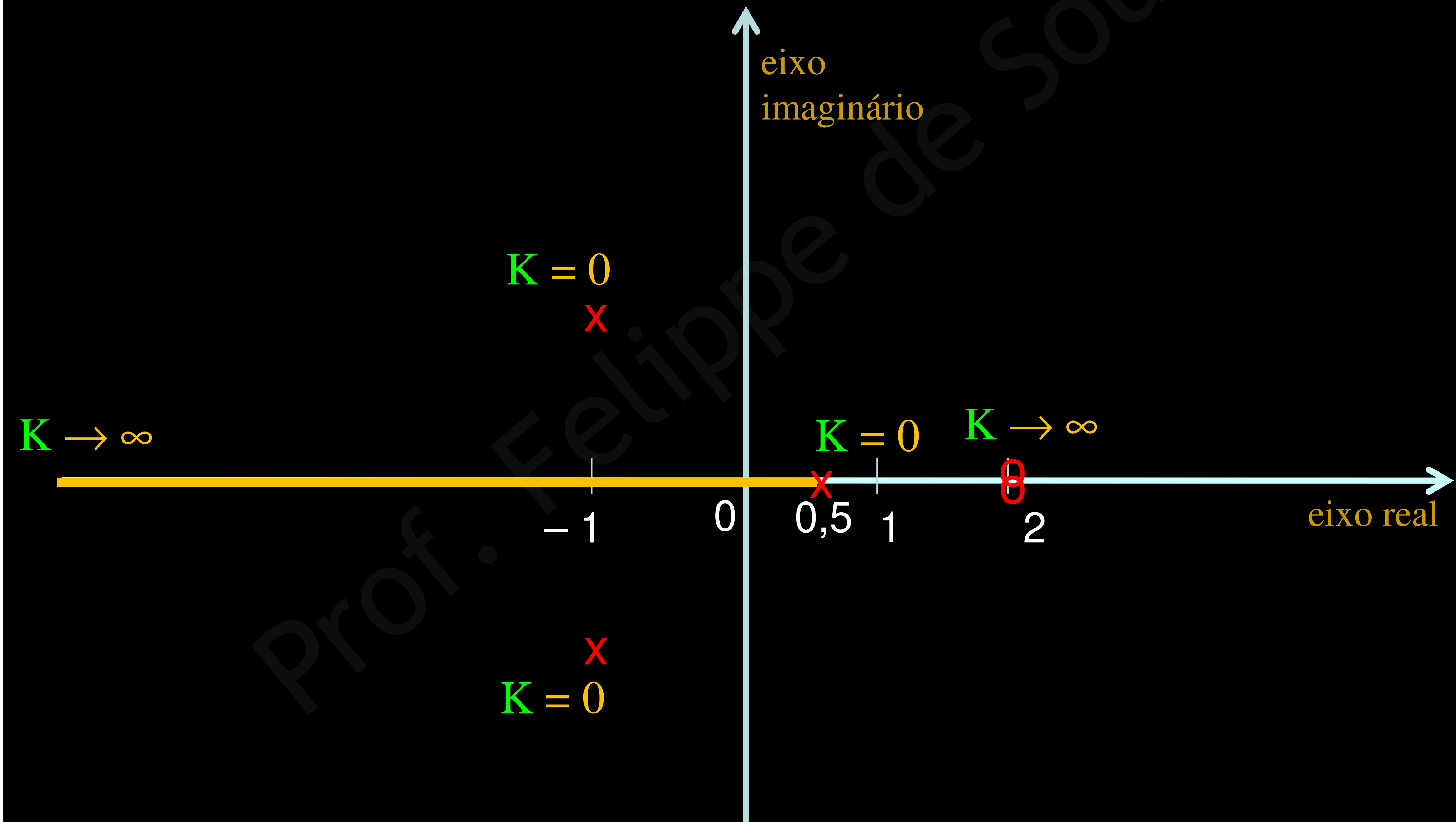
Exemplo 15 (*continuação*)

Os 3 *pontos* de início ($K = 0$)e de término ($K \to \infty$) deste Root Locus (*Regra #3*) estão assinalados abaixo



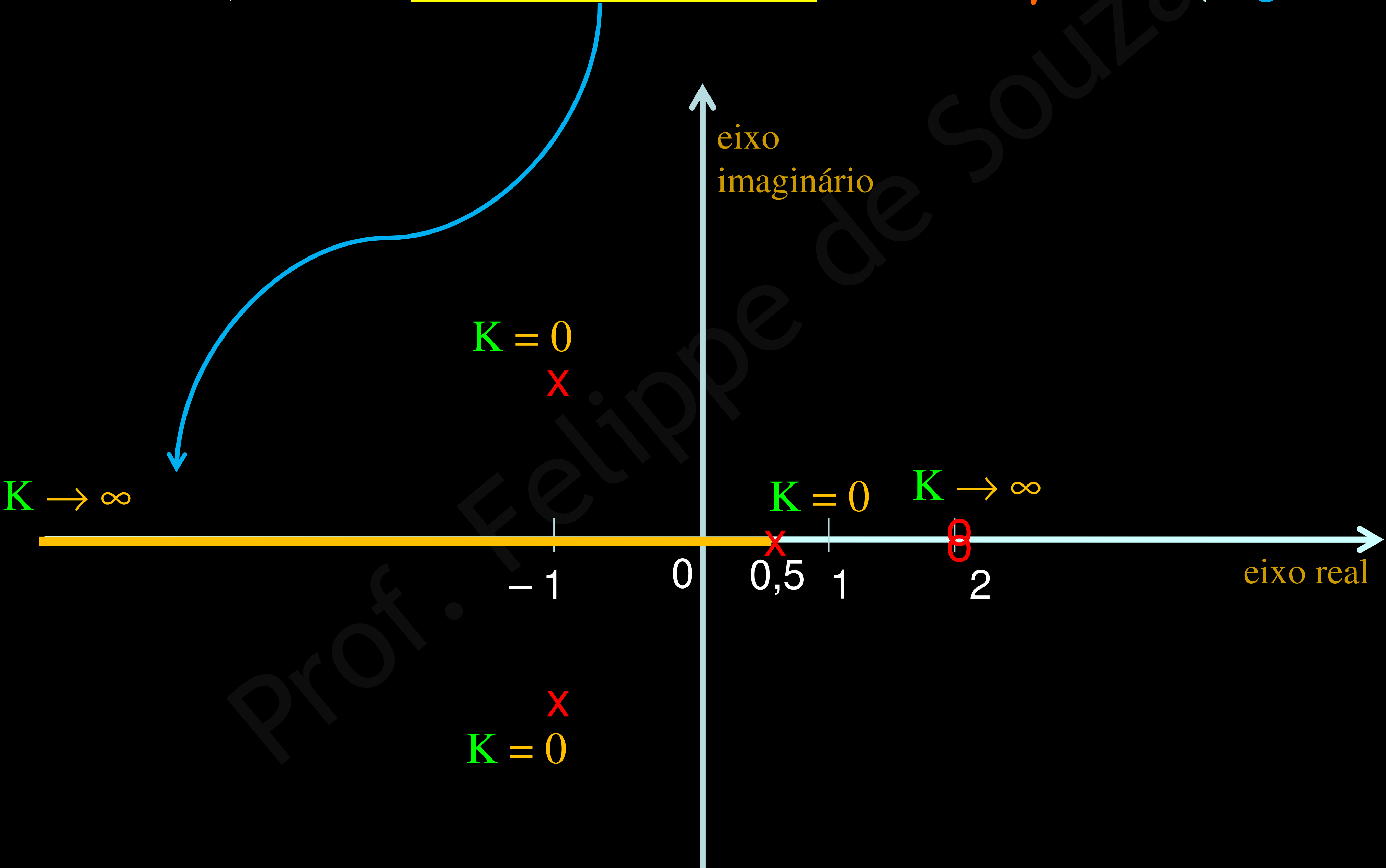
Exemplo 15 (*continuação*)

Os 3 *pontos* de início ($K = 0$)e de término ($K \to \infty$) deste Root Locus (*Regra #3*) estão assinalados abaixo



Exemplo 15 (*continuação*)

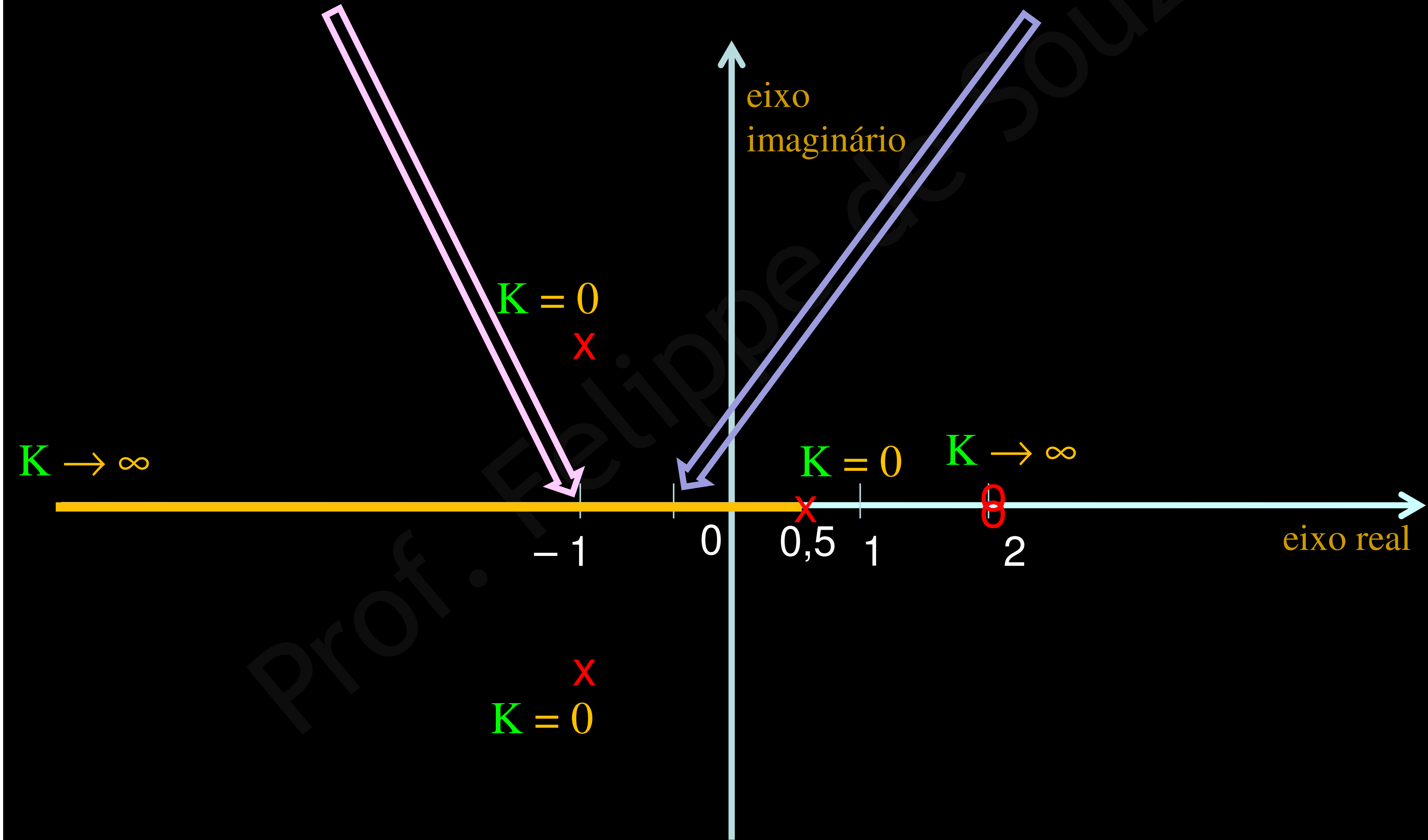
Novamente, a única *assíntota* no *infinito* se dá em γ = 180º (*Regra #5*)



Exemplo 15 (*continuação*)

Pela *Regra #6*, este *Root Locus* tem encontro de *ramos* em

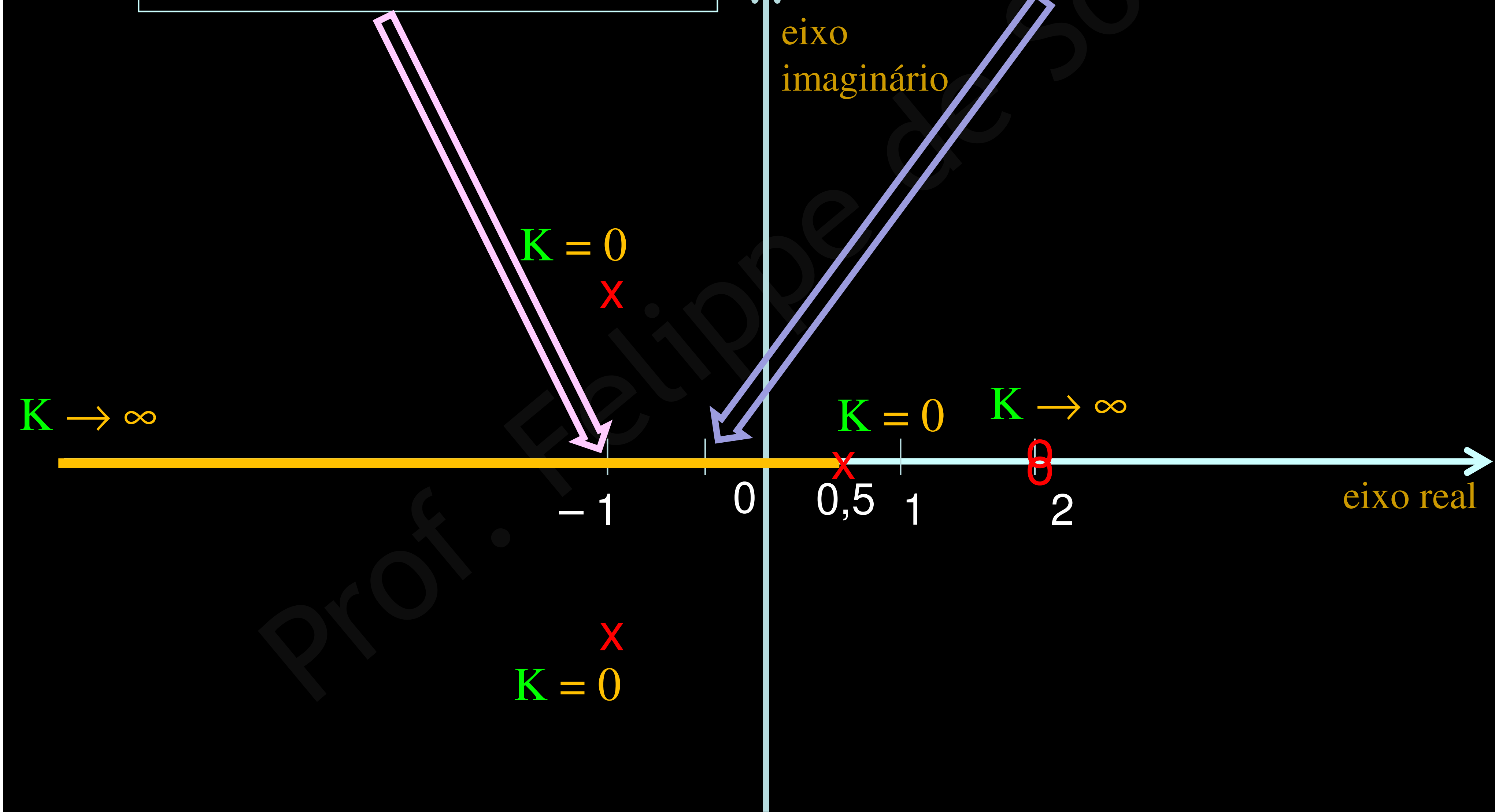
$s = -1$ (para $K = 0,833$) e $s = -0,531$ (para $K = 0,84$)



Exemplo 15 (*continuação*)

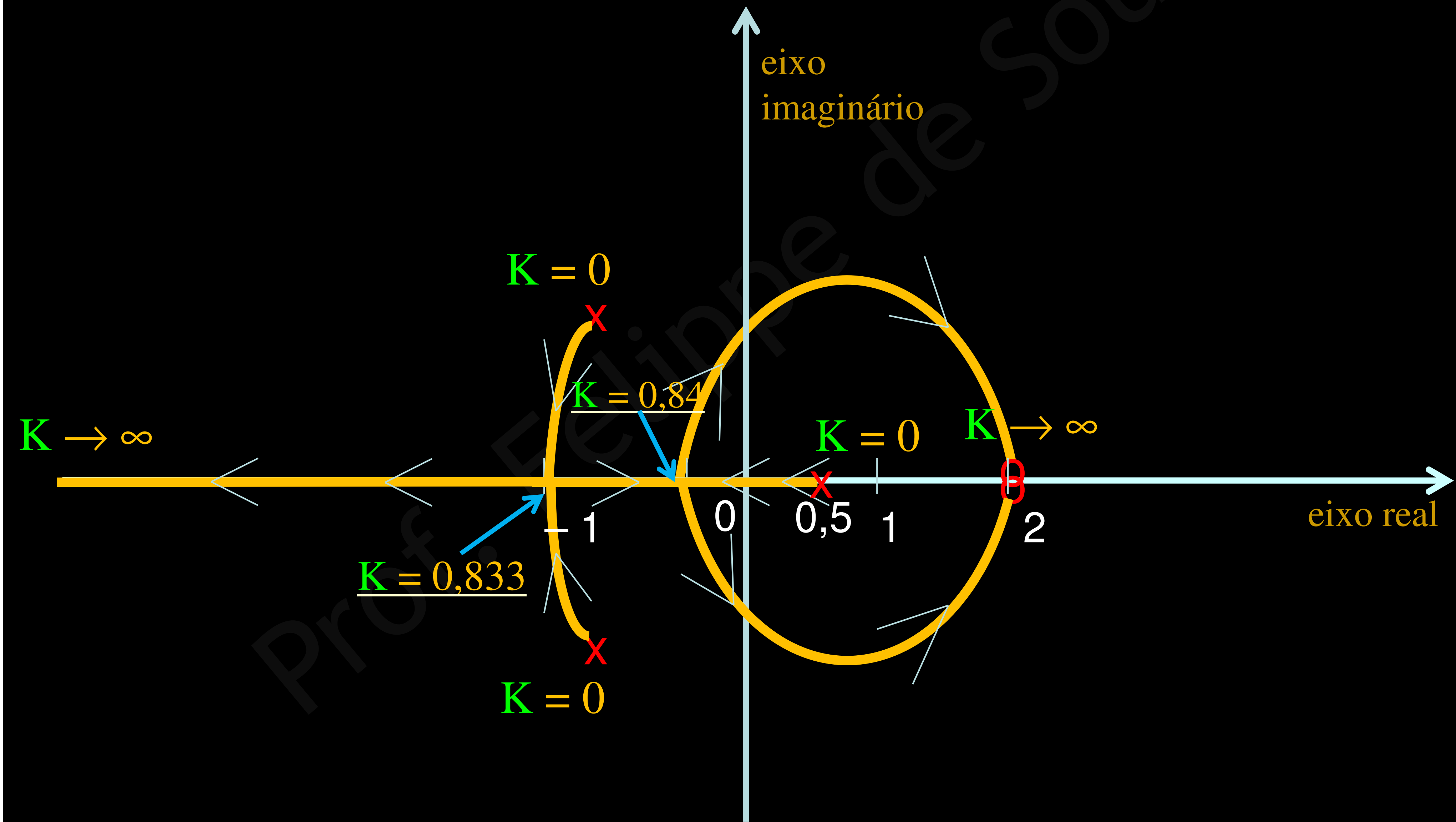
$s = -1$ (para $K = 0{,}833$)
ramos que se encontram
e CHEGAM do *eixo real*

$s = -0{,}531$ (para $K = 0{,}84$)
ramos que se encontram e
PARTEM do *eixo real*



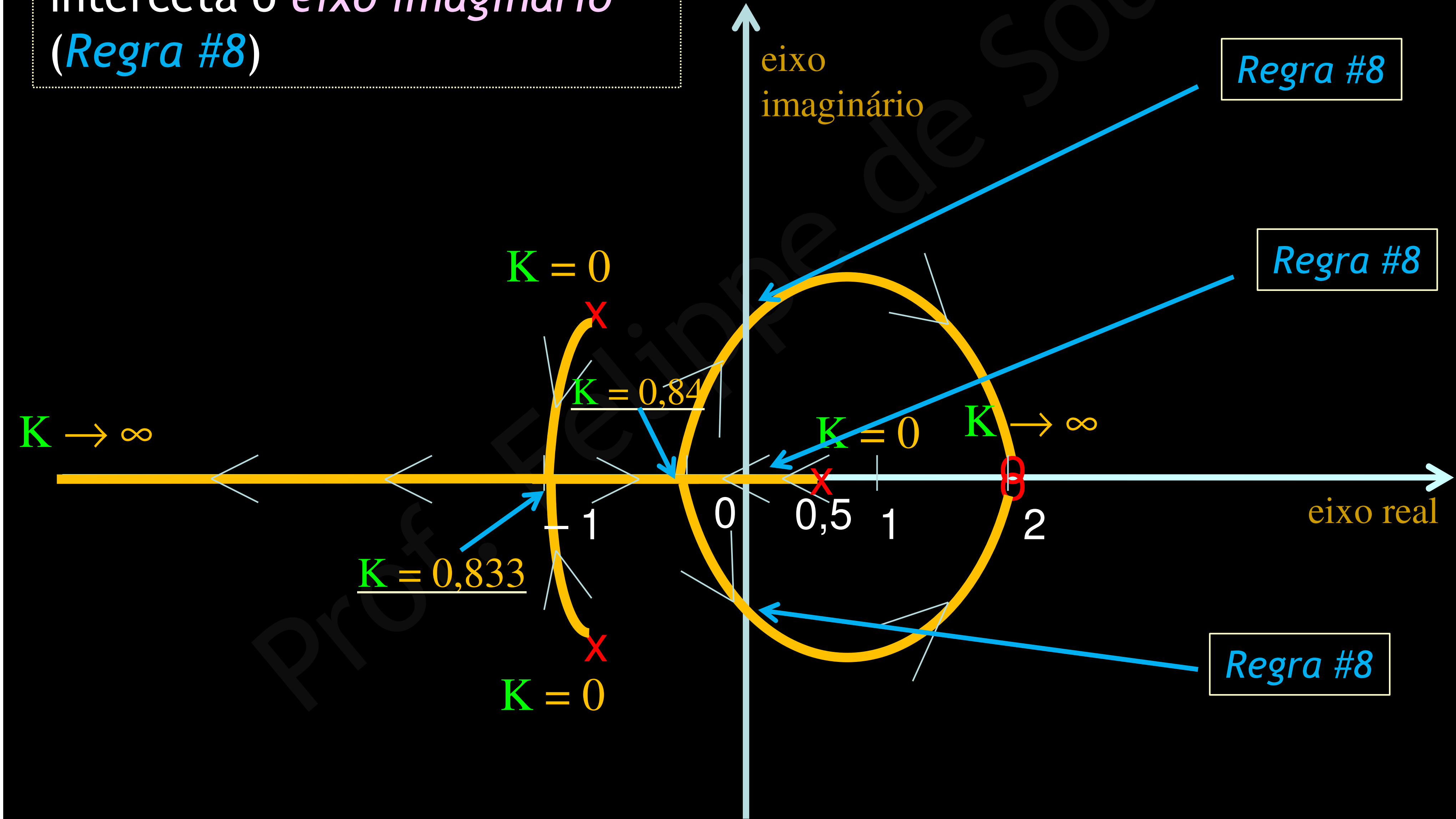
Exemplo 15 (*continuação*)

Logo, este *Root Locus* completo terá o seguinte aspeto



Exemplo 15 (*continuação*)

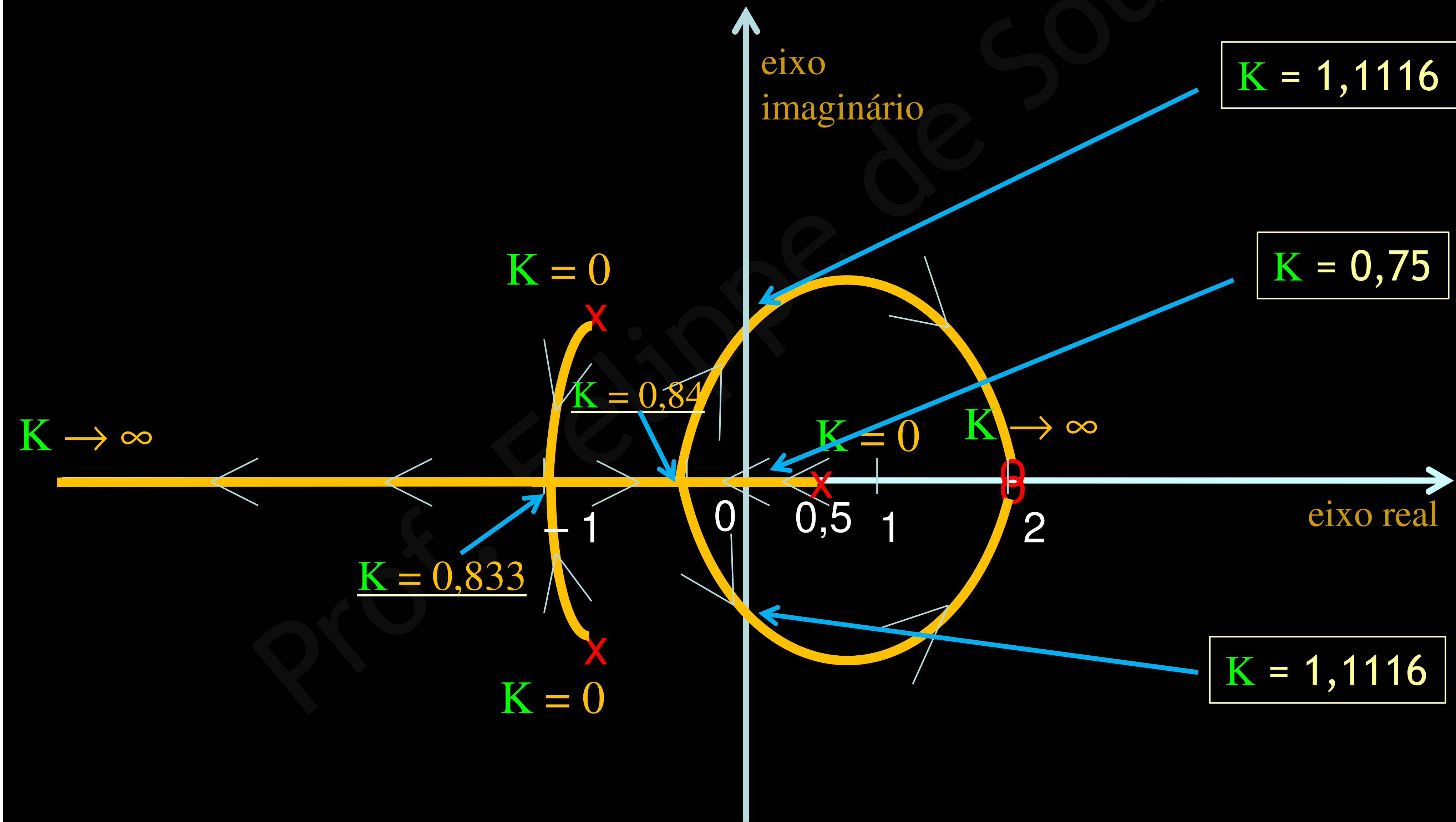
Mas ainda falta determinar os *pontos* que o *Root Locus* interceta o *eixo imaginário* (*Regra #8*)



Exemplo 15 (*continuação*)

e os valores de K que anulam *elementos* da *coluna pivô* são

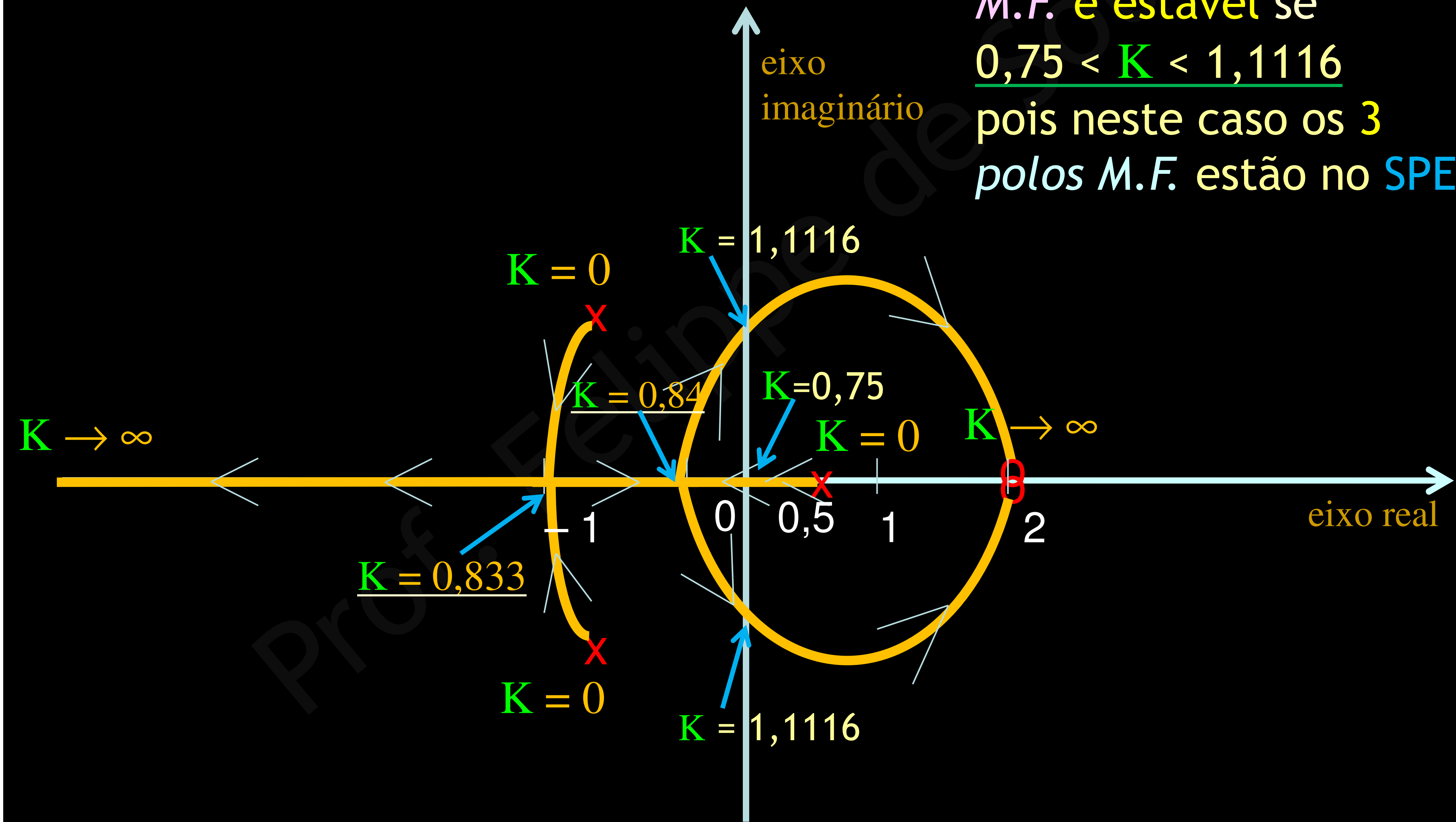
$K = 0,75$ e $K = 1,1116$



Exemplo 15 (*continuação*)

e assim este *Root Locus* está completo

Observe que o *sistema M.F.* é estável se $0{,}75 < K < 1{,}1116$ pois neste caso os 3 *polos M.F.* estão no SPE



UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!

Thank you!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt