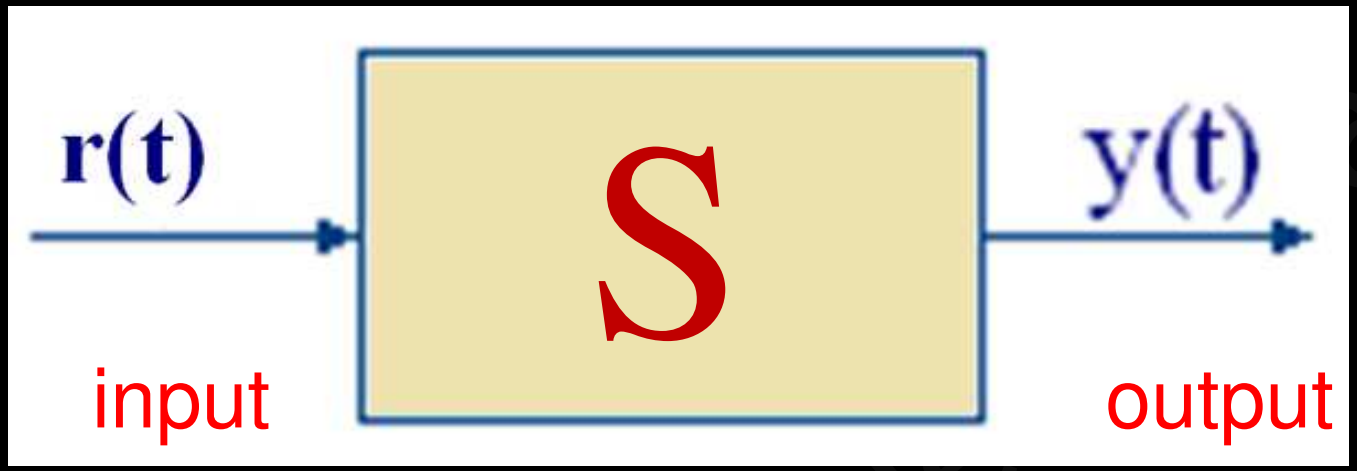
Controlo de Sistemas

10
"Estabilidade"
(*Stability*)

J. A. M. Felippe de Souza

Prof. Felippe de Souza

Estabilidade



O *sistema* é estável se a *resposta* à
entrada impulso $\rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$

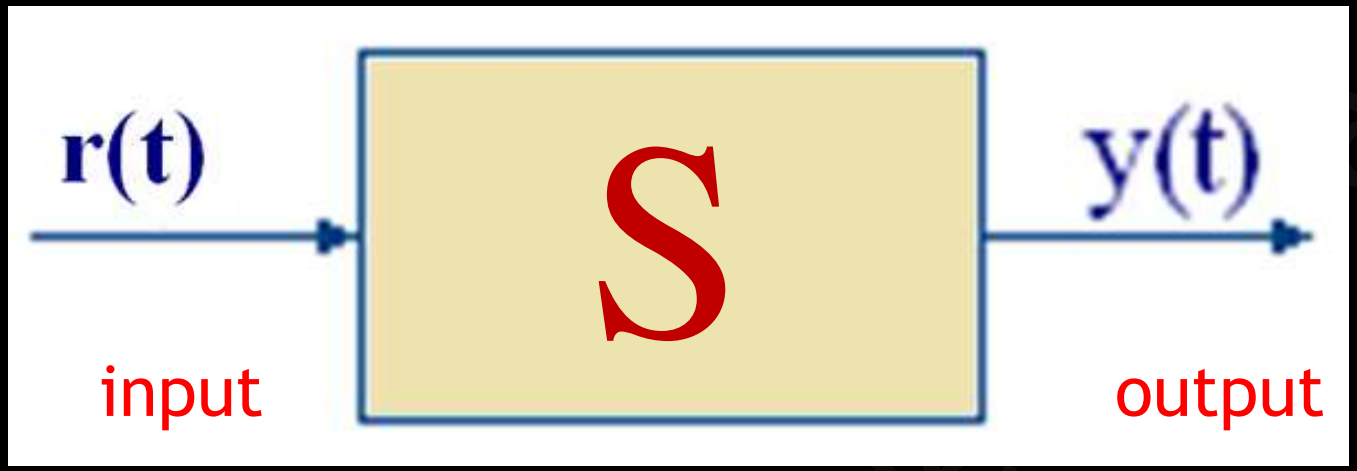
Ou seja, se a *saída* do *sistema* satisfaz

$$\lim y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0$$

quando a entrada $r(t)$ = impulso

Prof. Felippe da

Estabilidade



Equivalentemente, pode ser dada uma outra definição:

O *sistema* é *estável* se toda a *entrada* limitada tem uma *resposta* limitada

Por causa desta definição, *sistemas estáveis* são comummente chamados de BIBO-estável

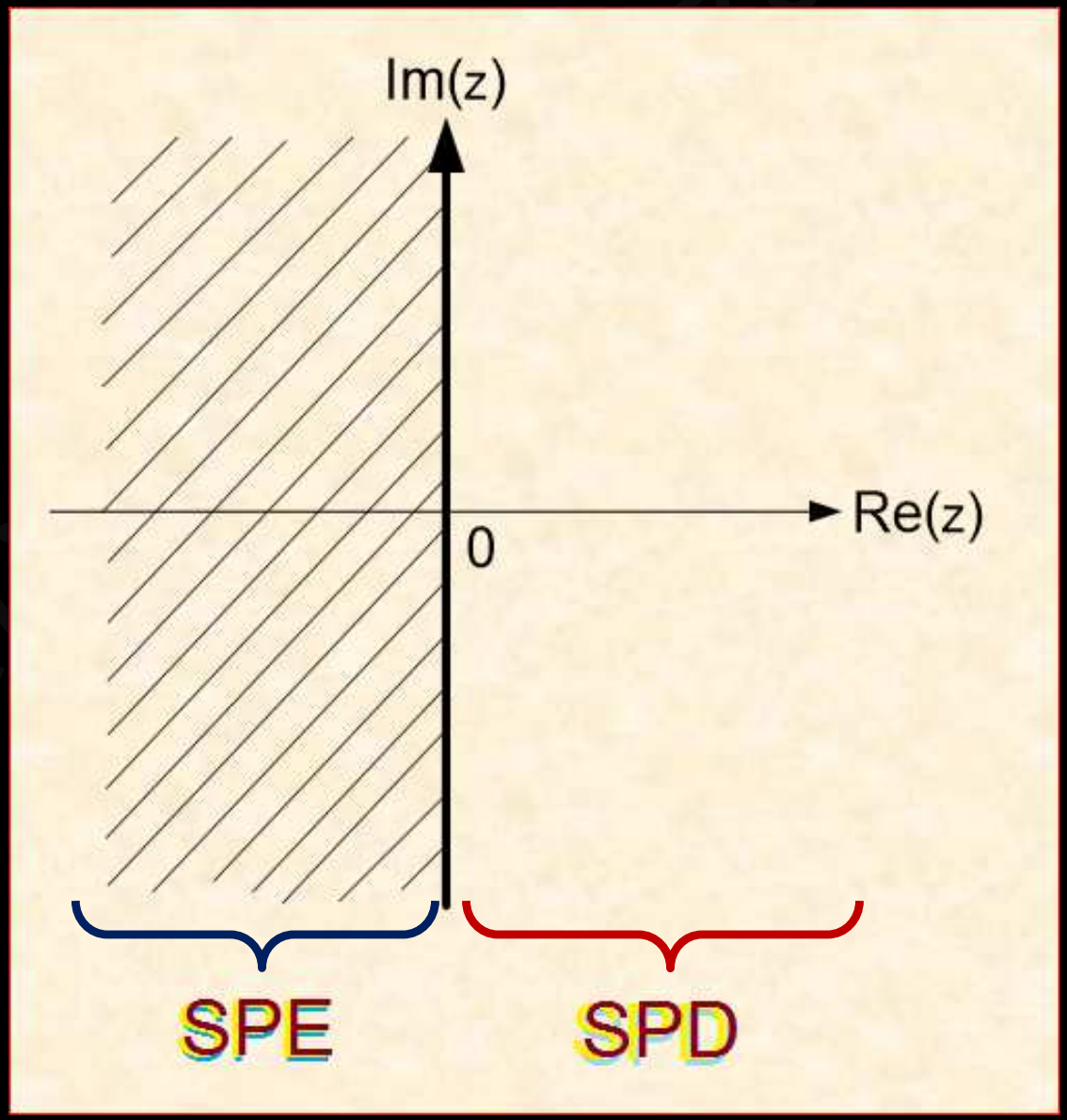
(BIBO = *bounded input-bounded output*)

Prof. Felippe da

Estabilidade

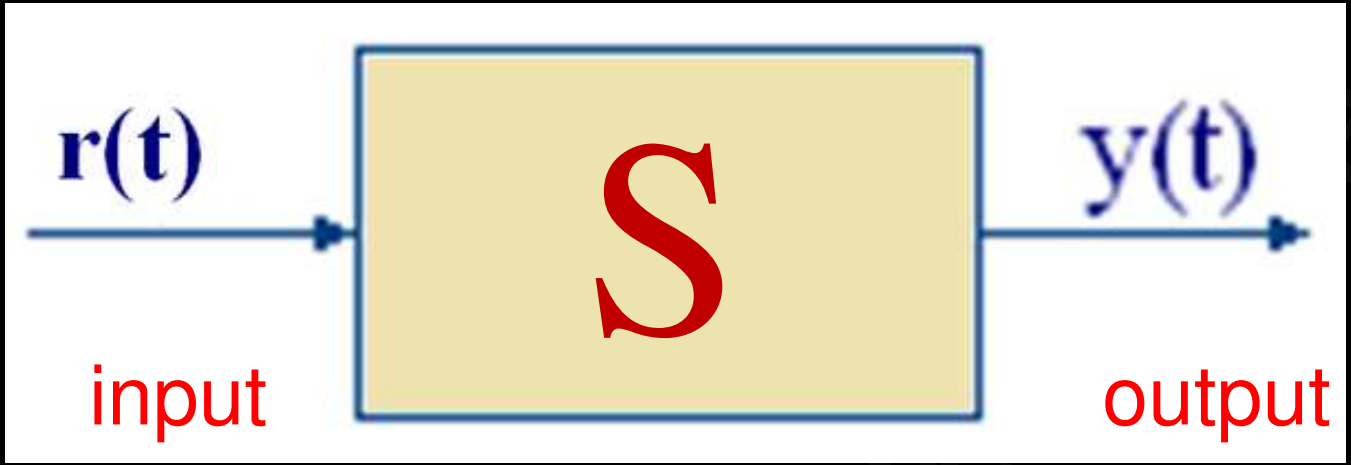
Um *sistema* é **estável** se, e somente se, ele tem ***todos*** os seus polos com *parte real negativa*

Isto é, um *sistema* é **estável** se ele tem ***todos*** os seus *polos* localizados no *semiplano da esquerda* (*SPE*)



Prof. Fel

Estabilidade



Logo, a *estabilidade* de sistemas pode ser determinada pela *localização dos polos do sistema* no *plano complexo*

É necessário que TODOS os *polos* do *sistema* estejam no SPE para que ele seja um *sistema estável*.

Um *polo* que não esteja no SPE arruína a *estabilidade* tornando-o um *sistema instável*.

Prof. Felippe de

Exemplo 1:

Considere o *sistema* de 1ª ordem

$$\begin{cases} x' = a\,x + u \\ y = x \end{cases}$$

cuja *função de transferência* é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-a)}$$

O único *polo* deste *sistema* está localizado em

$$s = a$$

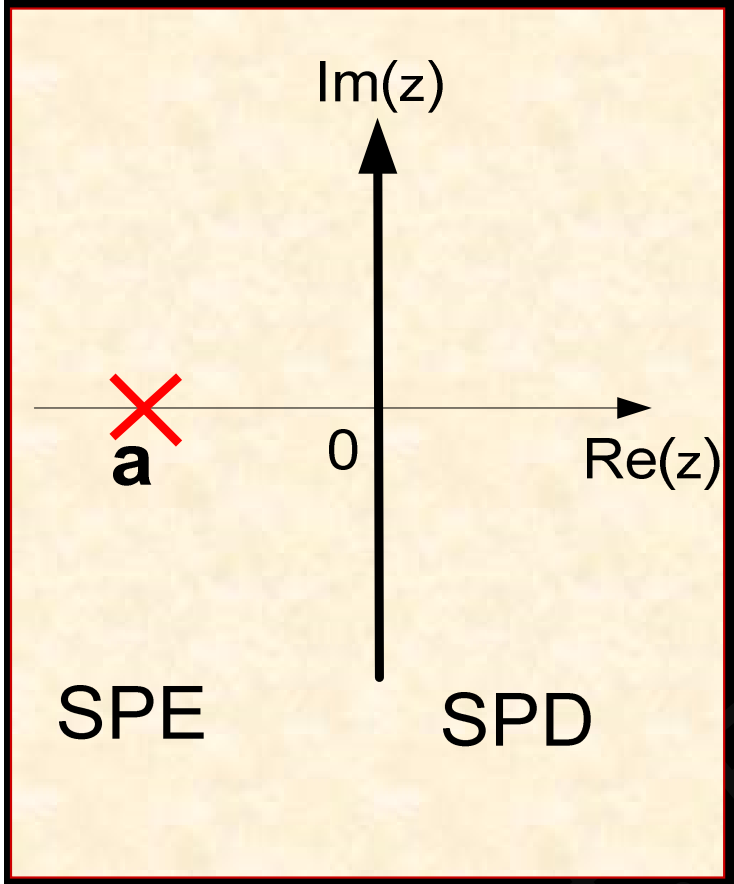
que pode estar no SPE (*semiplano da esquerda*), no *eixo imaginário* ou no SPD (*semiplano da direita*), dependendo do valor de a

($a < 0$, $a = 0$ ou $a > 0$, respetivamente)

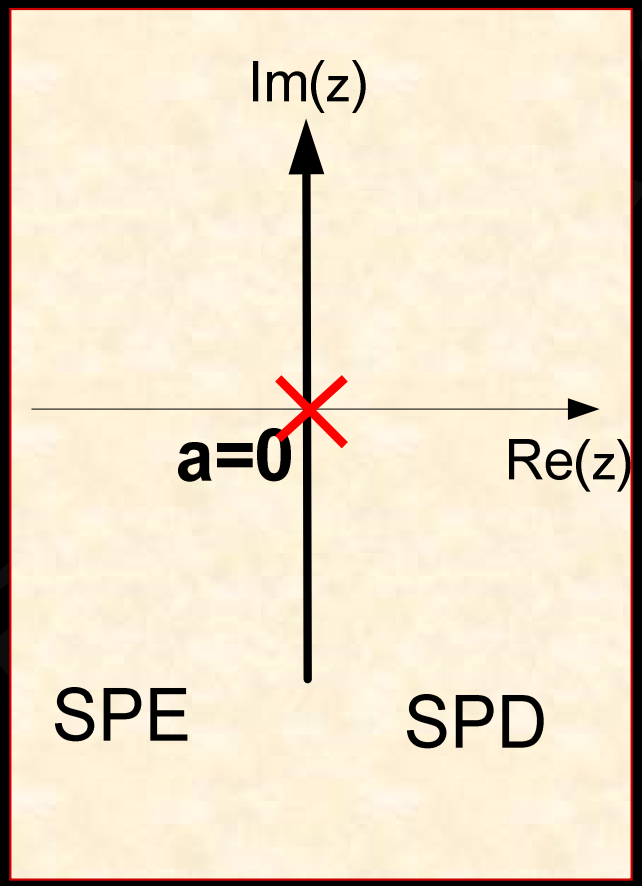
Prof. Paulo de Souza

Exemplo 1 (continuação):

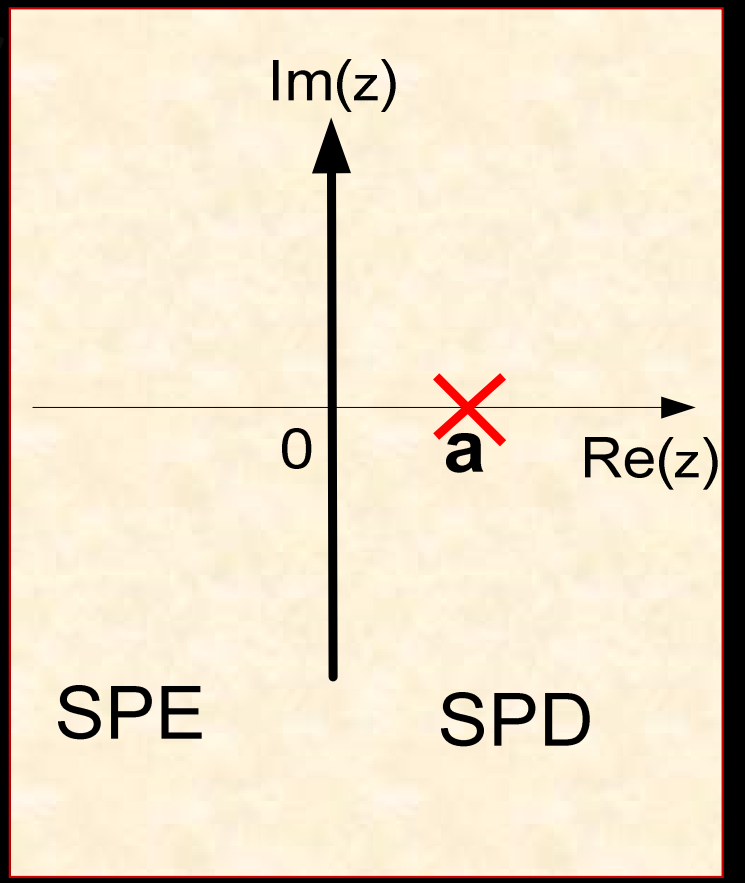
logo,



$a < 0$



$a = 0$

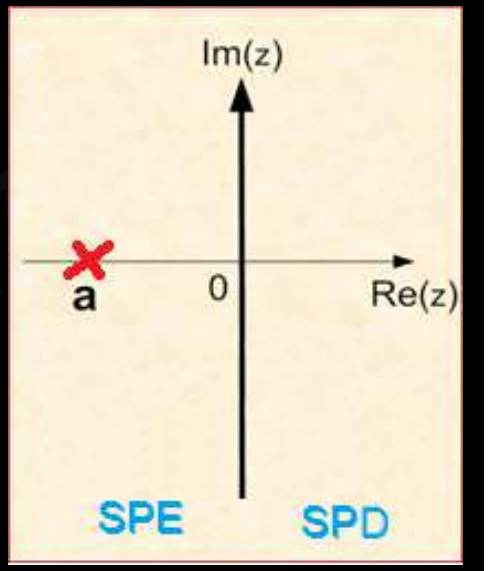


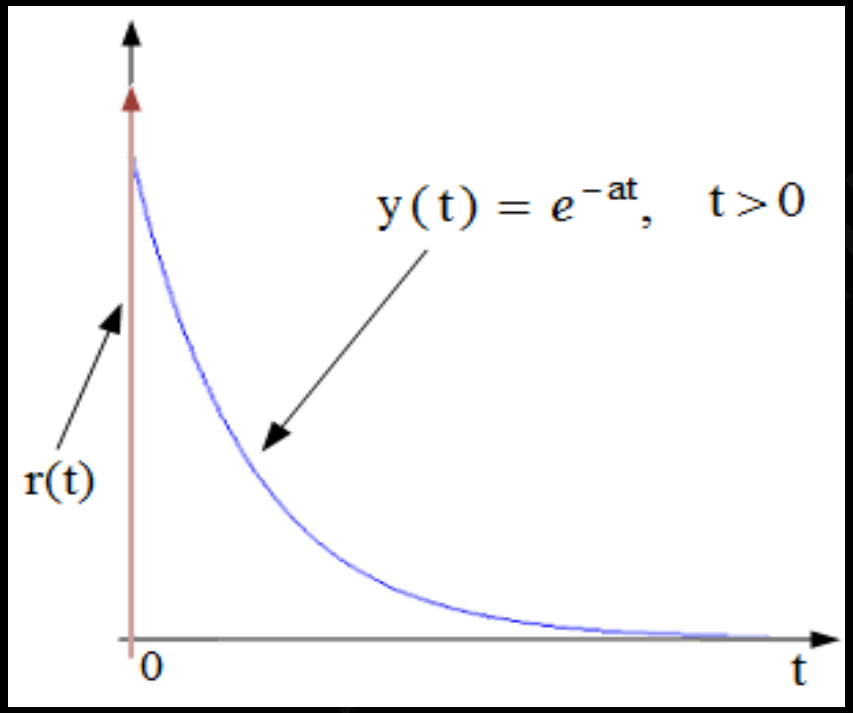
$a > 0$

Prof. Souza

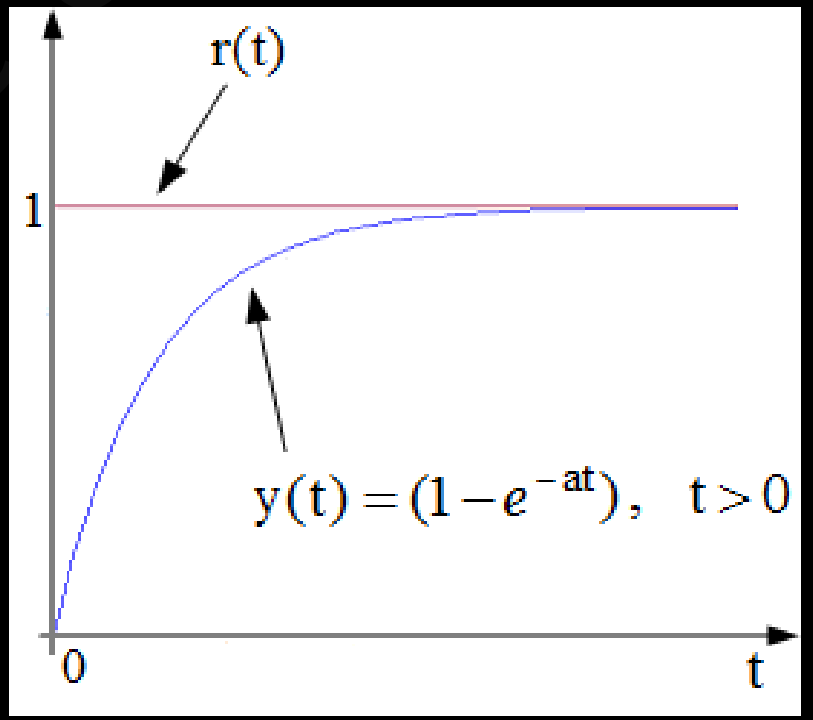
Exemplo 1 (continuação):

Caso $a < 0$, *sistema* é *estável*





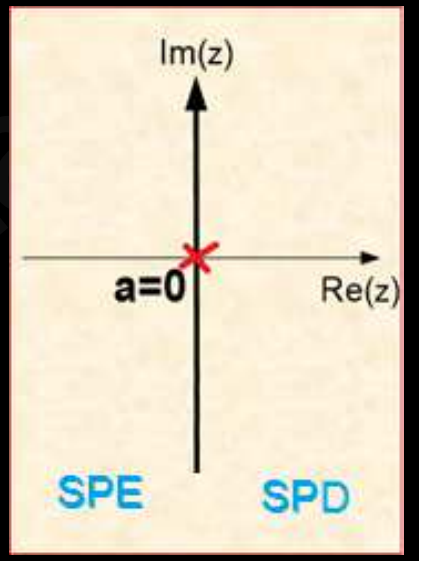
resposta ao *impulso unitário*



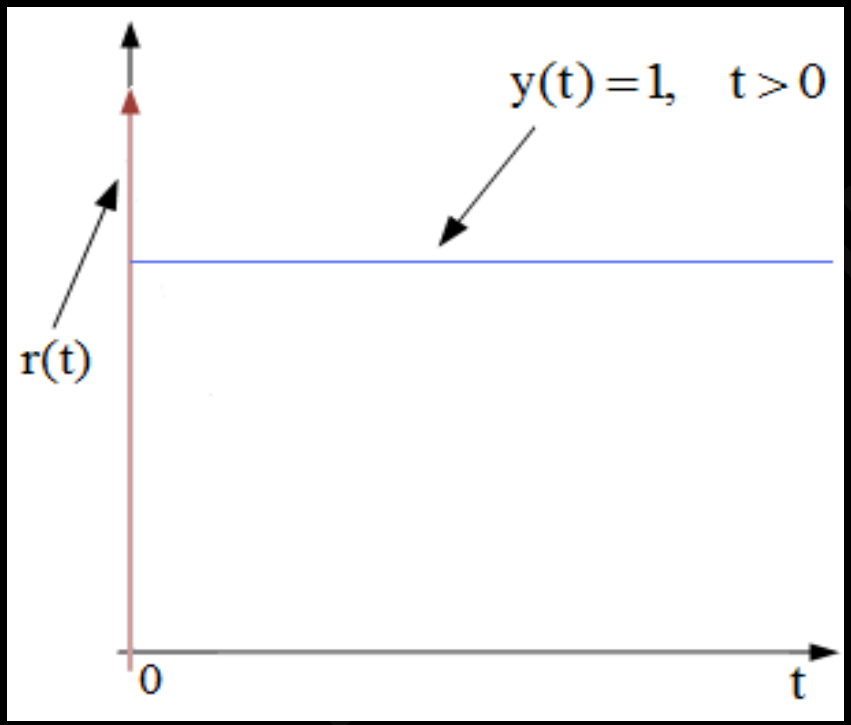
resposta ao *degrau unitário*

Estabilidade

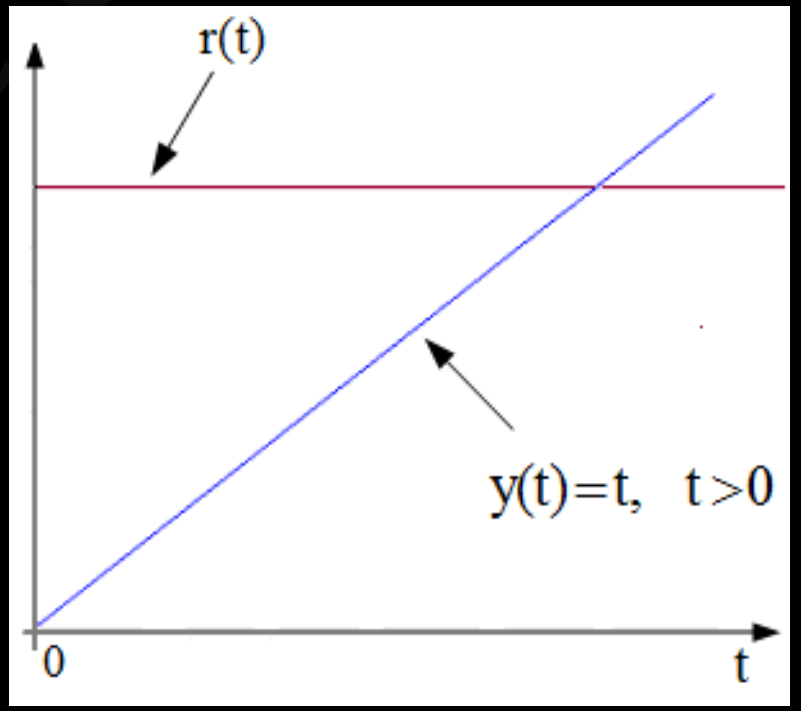
Exemplo 1 (continuação):



Caso $a = 0$, *sistema* não é *estável* nem *instável*

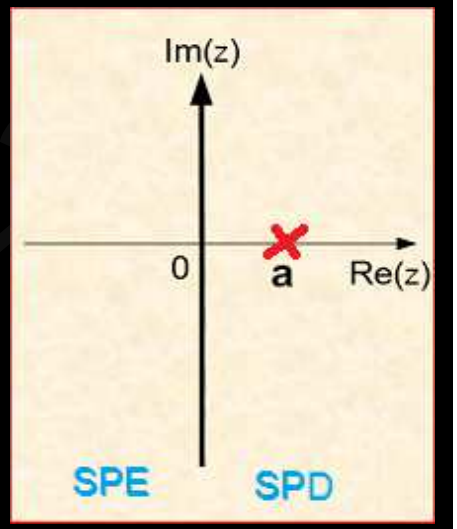


resposta ao *impulso unitário*

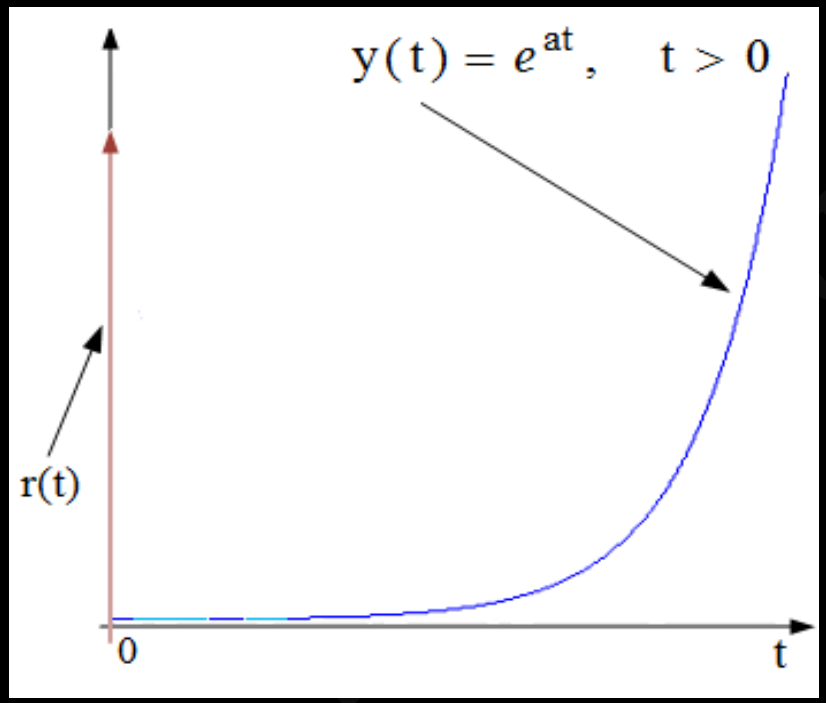


resposta ao *degrau unitário*

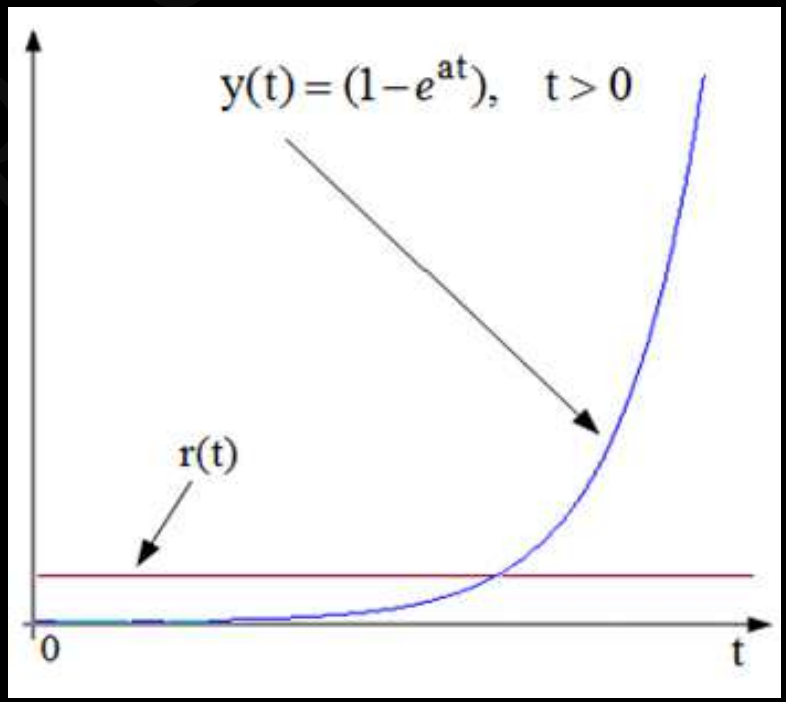
Exemplo 1 (continuação):



Caso a > 0, *sistema* é *instável*.



resposta ao *impulso unitário*

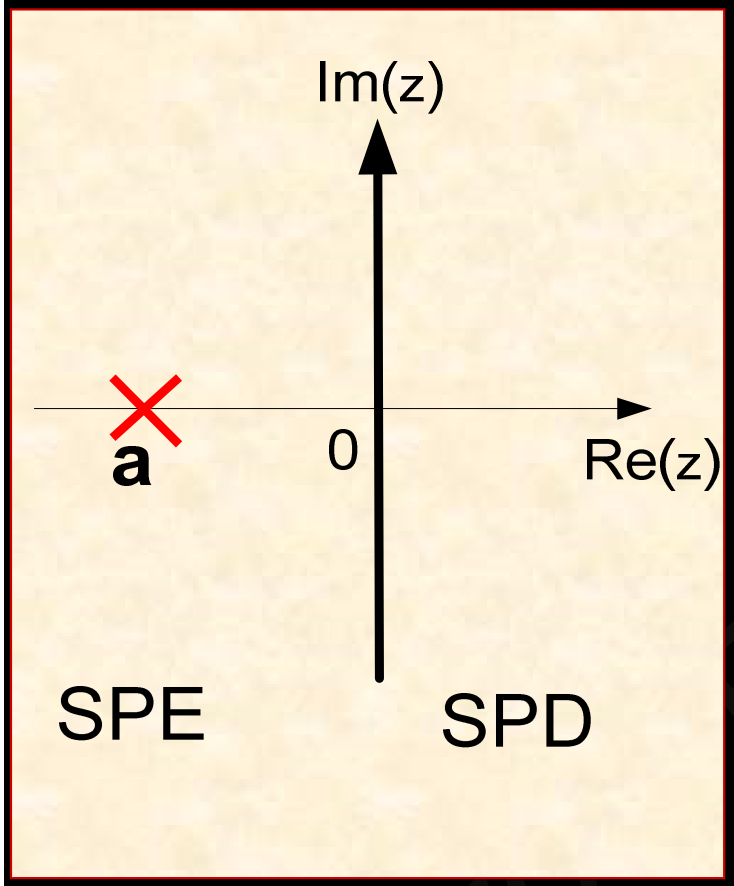


resposta ao *degrau unitário*

Exemplo 1 (continuação):

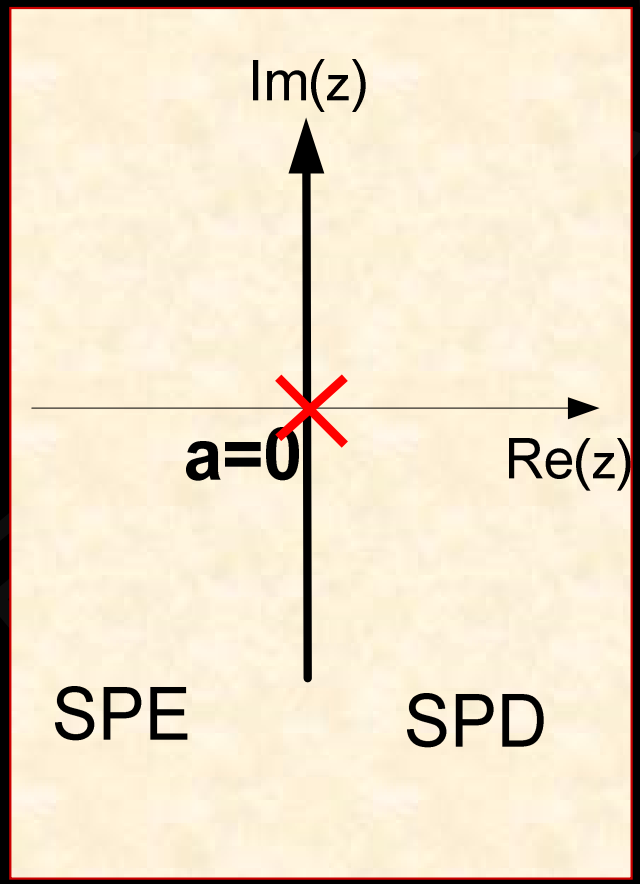
resumindo,

$a < 0$



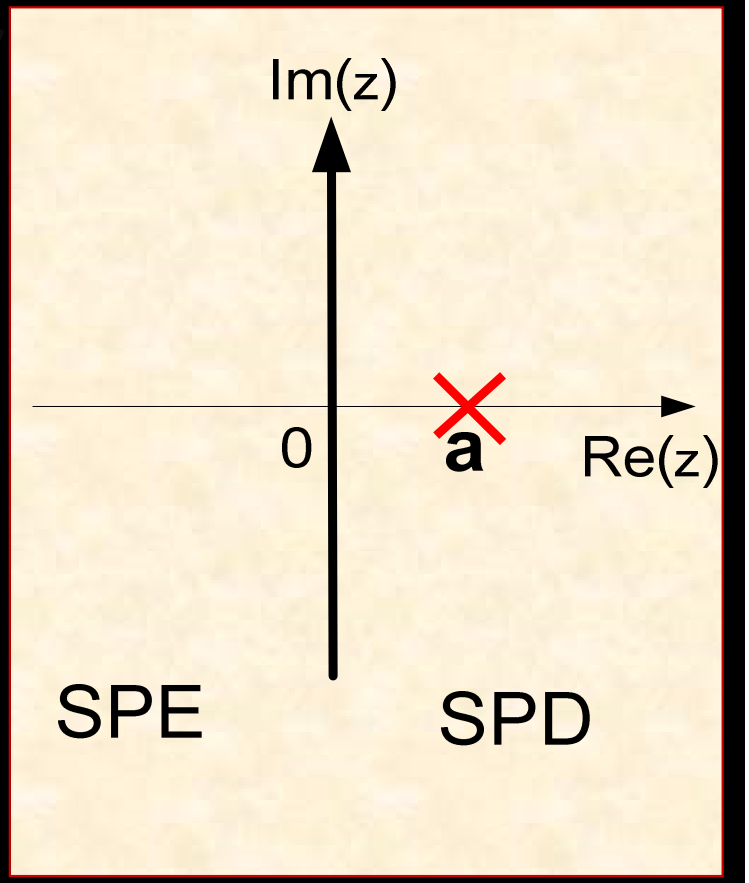
estável

$a = 0$



indiferente

$a > 0$



instável

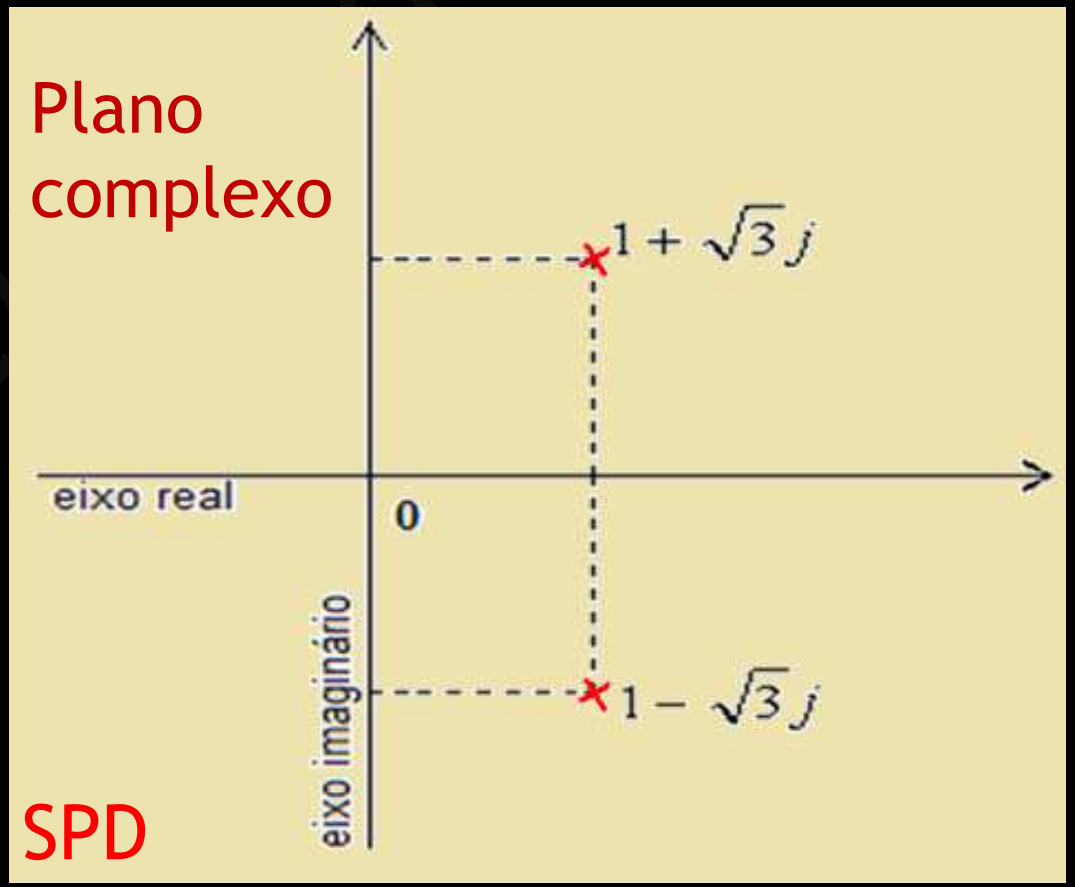
Exemplo 2:

Considere o *sistema* de 2ª ordem cuja função de transferência é dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 - 2s + 4}$$

este *sistema* possui um par de *polos complexos* com parte real positiva

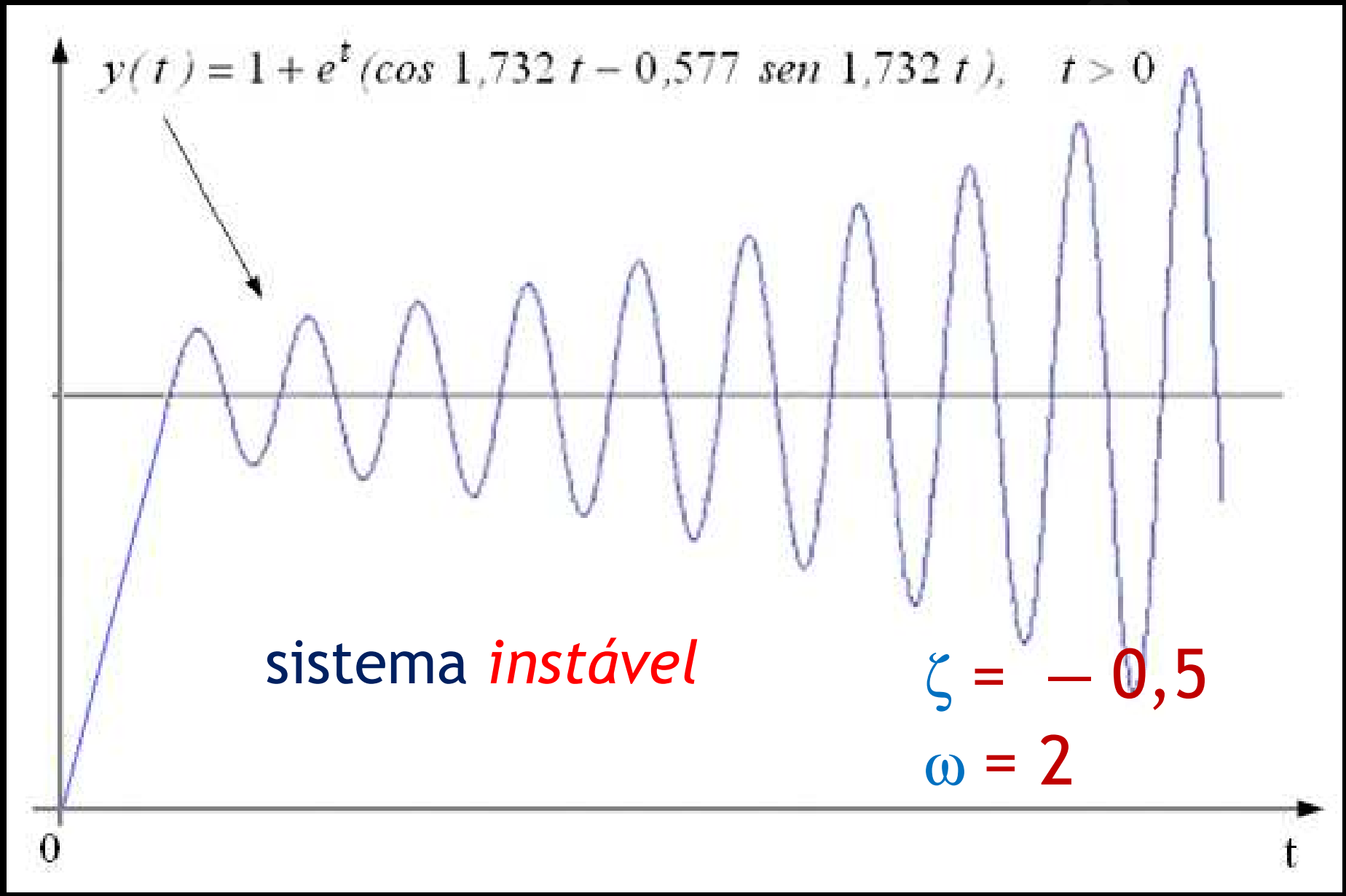
$$s = 1 \pm j \cdot 1{,}732$$



polos no SPD

Prof. Felipe de Souza

Exemplo 2 (continuação):



resposta à entrada *degrau unitário*

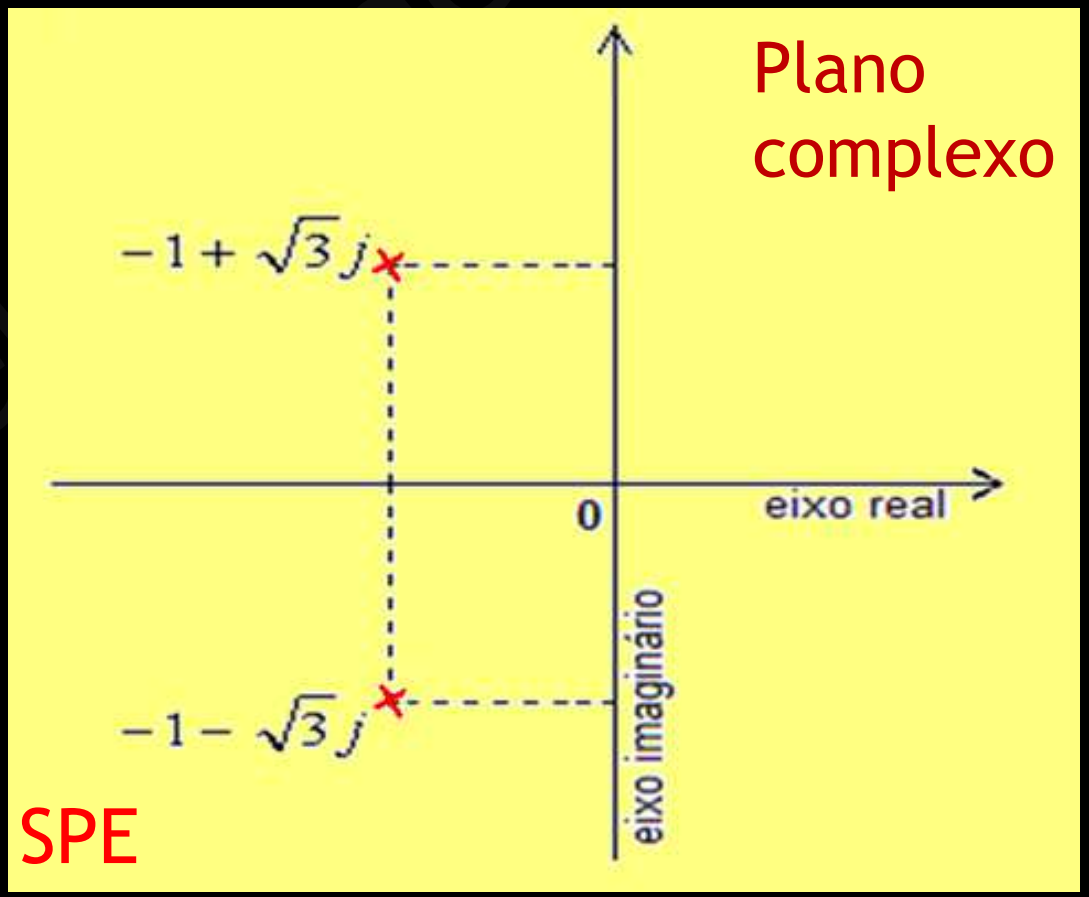
Exemplo 3:

Considere o *sistema* de 2ª ordem cuja função de transferência é dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

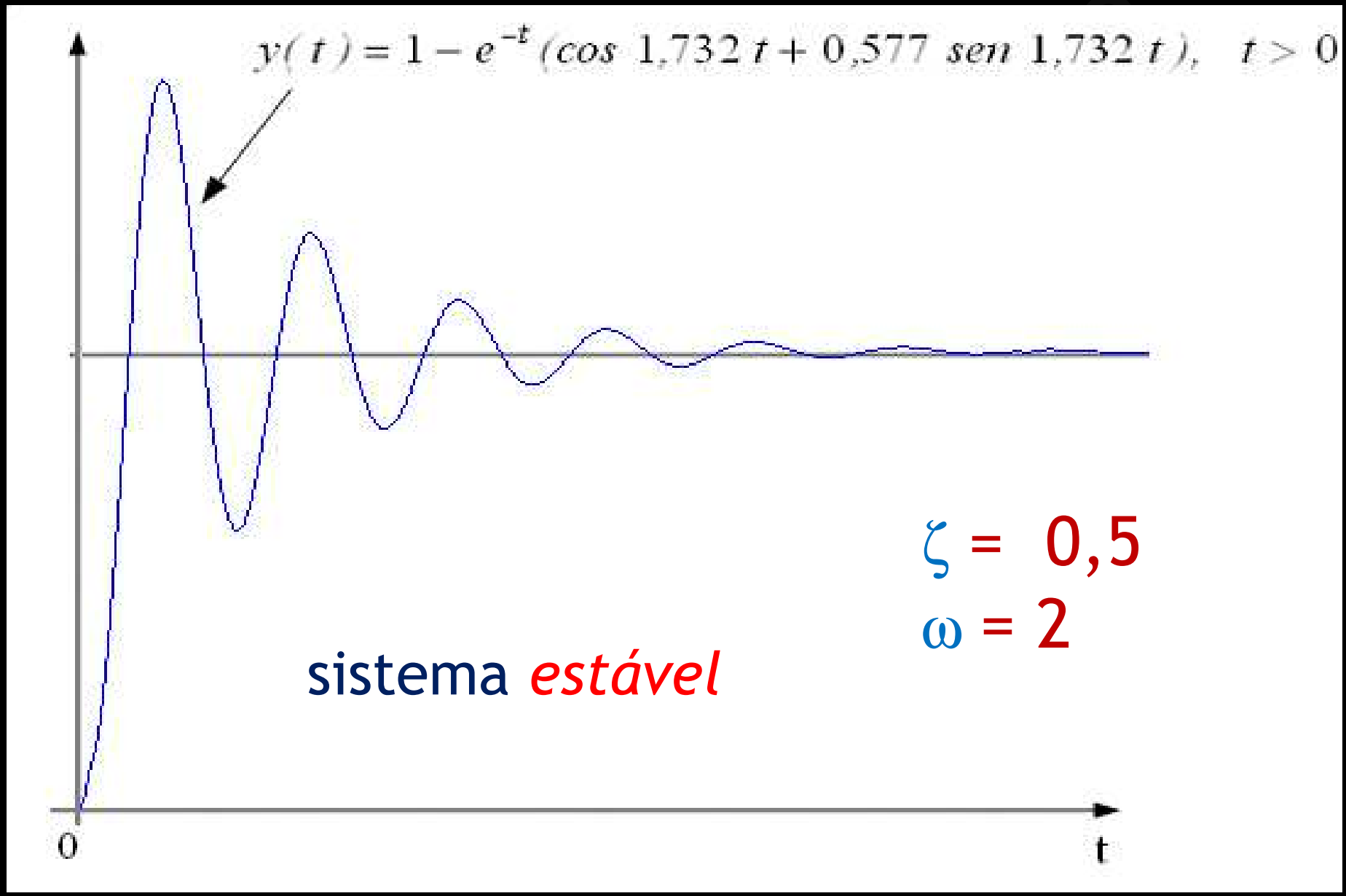
este *sistema* possui um par de *polos complexos* com parte real negativa

$$s = -1 \pm j \cdot 1{,}732$$



polos no SPE

Exemplo 3 (continuação):



resposta à entrada *degrau unitário*

Estabilidade

Resumindo: a *estabilidade* de *sistemas* depende apenas da localização dos seus *polos*, pois eles devem estar todos situados no SPE para que o *sistema* seja estável.

Logo, a *estabilidade* não depende da *função de transferência* toda, mas apenas do seu denominador, o

polinómio característico $p(s)$ do sistema

que nos dá os *polos* do *sistema*.

Se pensarmos na *equação de estado*

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$$

a *estabilidade* não depende de B, C ou D, mas apenas da matriz A que nos dá o *polinómio característico* e os *polos* do sistema.

Prof. Felipe de Souza

Critério de Routh-Hurwitz para estabilidade

Routh, ainda no século XIX, numa época que ainda não havia *luz elétrica*, *máquina de calcular* ou *computador*, criou um método matemático para determinar o *número de polos* de um *sistema* localizados no SPD sem ter que calcular os próprios *polos*

Edward John Routh
(canadiano, 1831-1907)

Dessa forma facilitou a determinação da *estabilidade* de um *sistema*

Hurwitz é outro matemático importante nesta área de *Controlo* e *Sistemas dinâmicos*

Prof. Filipe de S

Estabilidade

Hurwitz desenvolveu em 1895 o que hoje é chamado de

"Critério de Routh-Hurwitz para estabilidade"

para se determinar se um *sistema* é *estável*

Adolf Hurwitz

(alemão, 1859-1919)

Hoje é reconhecido que Hurwitz fez isso independentemente de Routh o qual tinha desenvolvido o critério antes mas por um método diferente

O critério de Routh-Hurwitz é construído a partir do *polinómio característico* do *sistema*

$$p(s) = a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n \qquad (a_o > 0)$$

Prof. Felipe de So

a partir de $p(s)$ monta-se a Tabela de Routh-Hurwitz:

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}				
s^{n-3}				
$\vdots$				
$\vdots$				
s^2				
s^1				
s^o				

Tabela de Routh-Hurwitz
preenchimento inicial com os coeficientes do ***polinómio característico*** $p(s)$

Prof. Felippe de Souza

Tabela de Routh-Hurwitz, *preenchimento inicial*

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}				
s^{n-3}				
⋮				
⋮				
s^2				
s^1				
s^o				

se o *polinómio característico* **p(s)** é ímpar, o último elemento fica na 2ª linha

Prof. Eelippe de Souza

Tabela de Routh-Hurwitz, *preenchimento inicial*

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	0
s^{n-2}				
s^{n-3}				
⋮				
⋮				
s^2				
s^1				
s^o				

se o *polinómio característico* **p(s)** é par, o último elemento fica na 1ª linha, e coloca-se um '0' (zero) na 2ª linha

Prof. Felippe de Souza

Tabela de Routh-Hurwitz, *preenchimento inicial*

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}				
s^{n-3}				
$\vdots$				
$\vdots$				
s^2				
s^1				
s^o				

após o preenchimento inicial calcula-se as *demais linhas* como será indicado mais abaixo

Prof. Felippe de Souza

Tabela de Routh-Hurwitz, *depois de completa*

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4
:	:	:	:	:
:	:	:	:	
s^2	d_1	d_2		
s^1	e_1			
s^o	f_1			

depois de completa a Tabela Routh-Hurwitz terá **(n+1)** linhas

Prof. Felippe de Souza

Tabela de Routh-Hurwitz, *depois de completa*

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
s^2	d_1	d_2		
s^1	e_1			
s^o	f_1			

As *linhas* vão ficando cada vez mais curtas até as 2 *últimas linhas* que têm apenas um elemento em cada uma

Prof. Felippe de Souza

Tabela de Routh-Hurwitz, a *coluna pivô*

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4
:	:	:	:	:
:	:			
s^2	d_1			
s^1	e_1			
s^o	f_1			

a *primeira coluna* (onde estão os coeficientes a_o e a_1) é chamada de '*coluna pivô*'

Prof. Felippe de Souza

Tabela de Routh-Hurwitz, a *coluna pivô*

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮			
s^2	d_1			
s^1	e_1			
s^o	f_1			

Os elementos seguintes da '*coluna pivô*' serão: b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, etc.

Prof. Felippe de Souza

Tabela de Routh-Hurwitz, a *coluna pivô*

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮			
s^2	d_1			
s^1	e_1			
s^o	f_1			

Os elementos da '*coluna pivô*' são chamados de '*pivôs*'

Prof. Felippe de Souza

o cálculo dos elementos b_1, b_2, b_3, ... etc. da *terceira linha*

$$b_1 = \frac{-1}{a_1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_o & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{-1}{a_1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_o & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix} = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{-1}{a_1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_o & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix} = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1}$$

observe que no cálculo dos elementos desta linha há uma *divisão* por a_1, o elemento *pivô* da *linha anterior*

o cálculo dos elementos c_1 , c_2 , c_3 , ... etc. da *linha seguinte*

$$c_1 = \frac{-1}{b_1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{-1}{b_1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{-1}{b_1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix} = \frac{b_1 \cdot a_7 - a_1 \cdot b_4}{b_1}$$

observe que no cálculo dos elementos desta linha há uma *divisão* por b_1, o elemento *pivô* da *linha anterior*

Desta forma calcula-se também os *elementos* das demais linhas e colunas e a Tabela de Routh-Hurwitz fica completa.

Note que, como já foi dito, as linhas da Tabela de Routh-Hurwitz vão ficando mais curtas a medida que há cada vez menos elementos a serem calculados nas últimas posições de cada linha

Observação: a Tabela de Routh-Hurwitz foi construída supondo que o coeficiente a_o do *polinómio característico* $p(s)$ é *positivo*,

$$a_o > 0$$

Prof. Felipe de Souza

Estabilidade

Se o coeficiente a_o for *negativo*,

$$a_o < 0$$

então pode-se redefinir $p(s)$ com todos os *coeficientes do polinómio* com os sinais trocados.

Desta forma obtém-se $a_o > 0$.

Isto ocorre devido ao facto, como é bem conhecido, que as *raízes de um polinómio* não se alteram quando todos os seus coeficientes são multiplicados por -1 (*ou por qualquer outro valor constante* $\neq 0$).

Prof. Felippe de Souza

Para simplificar os cálculos, se desejar, pode-se *multiplicar* (ou *dividir*) todos os elementos de uma linha qualquer da Tabela de Routh-Hurwitz por um *número positivo*.

Isso não irá alterar os resultados a serem obtidos da Tabela de Routh-Hurwitz

A Tabela de Routh-Hurwitz permite descobrir quantos *polos* estão localizados no SPD.

O número de **trocas de sinal na coluna pivô** da Tabela de Routh-Hurwitz é igual ao número de *polos* no SPD.

Prof. Felippe de Souza

Tabela de Routh-Hurwitz

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			
s^2	d_1			
s^1	e_1			
s^o	f_1			

O número de ***trocas de sinal*** na ***coluna pivô*** é igual ao número de *polos no SPD*

Prof. Felippe de Souza

Estabilidade

A determinação do *número de polos* no SPD pode ser útil mas entretanto não nos dá um diagnóstico para a estabilidade do *sistema* de imediato

Isso porque um *sistema* para ser estável tem que possuir todos os seus *polos* no SPE e, mesmo que o *número de troca de sinais* da *coluna pivô* seja zero, isso apenas significa que terão 'zero *polos*' no SPD, o que não garante estabilidade ainda, pois poderá haver algum *polo* no *eixo imaginário*

No entanto, *polos* no *eixo imaginário* vão refletir em zeros na *coluna pivô*. Isso permite escrever o seguinte resultado:

O *sistema* possui todos os *polos* no SPE se, e somente se, todos os coeficientes da *coluna pivô* da Tabela de Routh-Hurwitz são *positivos*.

Prof. Felippe de Souza

Tabela de Routh-Hurwitz

s^n	a_o	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮			
s^2	d_1			
s^1	e_1			
s^o	f_1			

O sistema possui todos os seus *polos* no SPE quando todos os elementos da *coluna pivô* são *positivos*

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 4:

Considerando agora o *polinómio característico* do 4º grau abaixo

Construindo-se a *Tabela de Routh-Hurwitz* obtém-se

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$$

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	1	5	
s^1	–6		
s^0	5		

2 trocas de sinal
(*de elementos da coluna pivô*)

Este *polinómio característico* tem 2 *polos* no SPD.

Logo, o *sistema* não é estável.

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 4 (continuação):

Aqui poderia, por exemplo, para simplificar os cálculos, dividir a 2ª linha (i.e., a linha s^3) por 2

Isto não altera os resultados

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$$

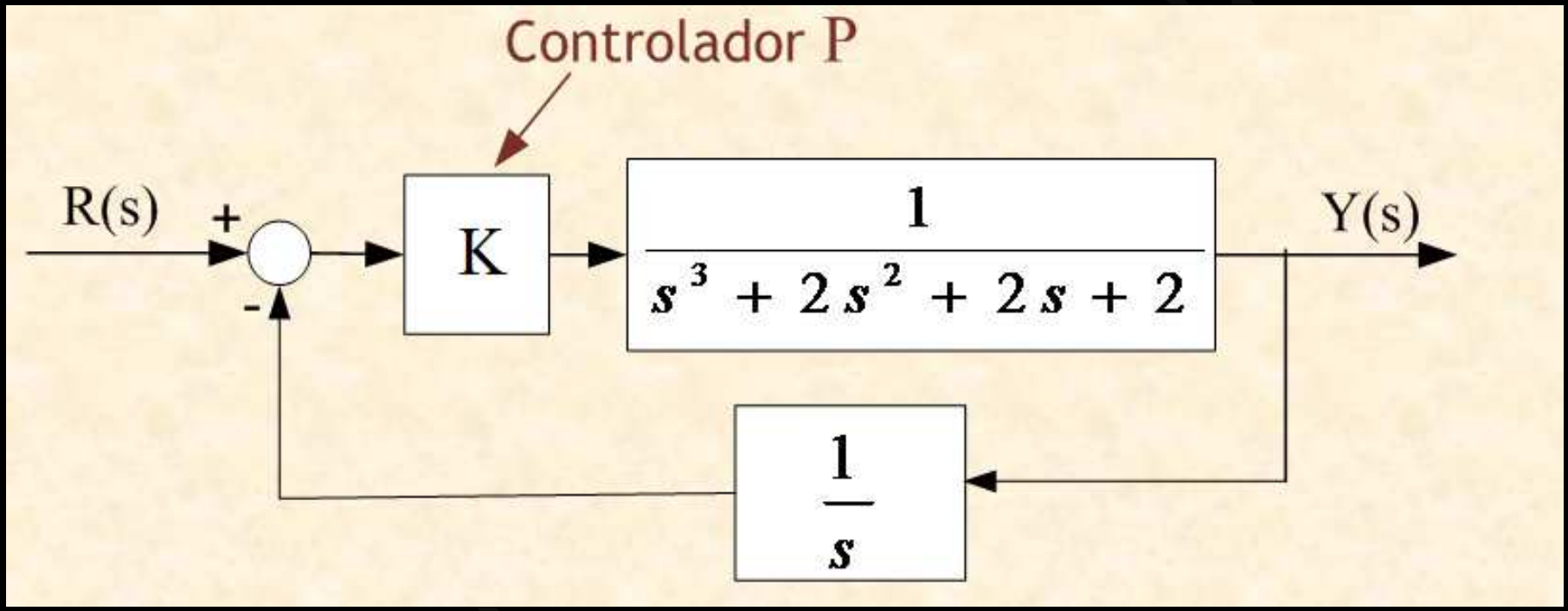
s^4	1	3	5	
s^3	1	2	0	← 2ª linha ÷ 2
s^2	1	5		
s^1	–3			
s^0	5			

E chegamos à mesma conclusão:
2 trocas de sinal
(*de elementos da coluna pivô*)

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 5:

Encontrar os valores de K para os quais o *sistema* de *malha fechada* abaixo é estável



Construindo-se a *função de transferência* de *malha fechada* (FTMF), obtemos

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Ks}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + K}$$

Exemplo 5 (continuação):

Logo, o *polinómio característico* do *sistema* de *malha fechada* é dado abaixo

A *Tabela de Routh-Hurwitz* para este *polinómio* é:

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + \mathrm{K}$$

s^4	1	2	K
s^3	2	2	0
s^2	1	K	
s^1	$(2-2\mathrm{K}) > 0$	$\Rightarrow$	$\mathrm{K} < 1$
s^0	$\mathrm{K} > 0$		

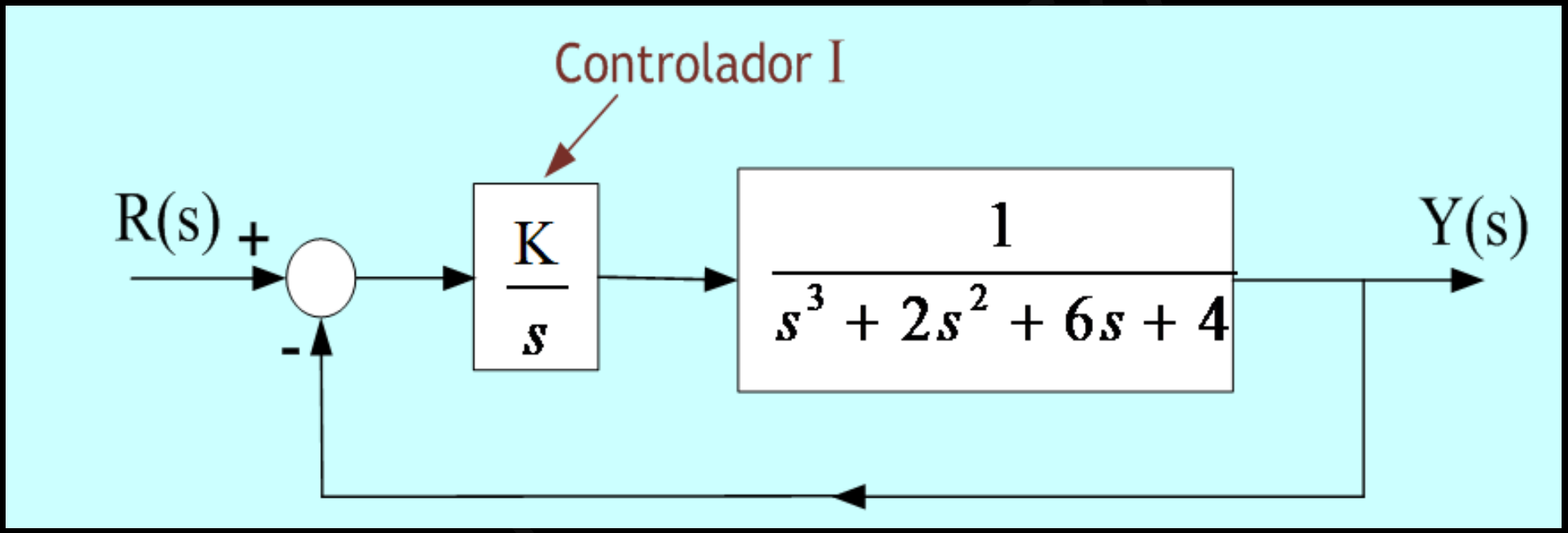
sistema é estável para

$$0 < \mathrm{K} < 1$$

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 6:

Encontrar os valores de K para os quais o *sistema* de *malha fechada* abaixo é estável



É fácil de verificar que o *polinómio característico* deste *sistema* é:

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 4s + \mathrm{K}$$

Exemplo 6 (continuação):

logo, a *Tabela de Routh-Hurwitz* para este *polinómio* é:

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 4s + \mathrm{K}$$

s^4	1	6	K
s^3	2	4	0
s^2	4	K	
s^1	$(4-\mathrm{K}/2) > 0$	$\rightarrow$	$\mathrm{K} < 8$
s^0	$\mathrm{K} > 0$		

sistema é estável para

$$0 < \mathrm{K} < 8$$

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 7:

Considere agora o *polinómio característico* $p(s)$ do 3º grau abaixo

Construindo-se a *Tabela de Routh-Hurwitz* obtém-se

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + s + 3$$

s^3	1	1
s^2	3	3
s^1	$0 \cong \varepsilon > 0$	
s^0	3	

logo, todos os elementos da *coluna pivô* são positivos, ou seja

0 (*zero*) raízes no SPD

Na verdade aquele 'zero' na *coluna pivô* indica simetria de 2 *polos* e estes só podem estar no *eixo imaginário*

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 7:

Considere agora o *polinómio característico* $p(s)$ do 3º grau abaixo

Construindo-se a *Tabela de Routh-Hurwitz* obtém-se

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + s + 3$$

s^3	1	1
s^2	3	3
s^1	$0 \cong \varepsilon > 0$	
s^0	3	

logo, todos os elementos da *coluna pivô* são positivos, ou seja

0 (*zero*) raízes no SPD

Logo, o *sistema* não é instável mas também não possui todos os *polos* no SPE, o que impede que estabilize.

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 8:

Considere agora o *polinómio característico* do 5º grau abaixo

$$p(s) = s^5 + 6s^4 + 13s^3 + 14s^2 + 6s$$

s^5	1	13	6
s^4	6	14	0
s^3	32/3	6	
s^2	340/32	0	
s^1	6		
s^0	0		

logo, não há trocas de sinais na *coluna pivô*, ou seja 0 (*zero*) raízes no SPD

0 (*zero*) na *coluna pivô*

Aquele zero na *coluna pivô* está na última posição. (Ele indica simetria de 1 *polo* em relação à origem, isto é, há *um polo* = zero)

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 8:

Considere agora o *polinómio característico* do 5º grau abaixo

$$p(s) = s^5 + 6s^4 + 13s^3 + 14s^2 + 6s$$

s^5	1	13	6
s^4	6	14	0
s^3	32/3	6	
s^2	340/32	0	
s^1	6		
s^0	0 ←	0 (*zero*) na *coluna pivô*	

logo, não há trocas de sinais na *coluna pivô*, ou seja 0 (*zero*) raízes no SPD

Logo, o *sistema* não é instável, entretanto apenas 4 dos 5 *polos* estão no SPE, pois um está na origem ($s = 0$).

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 9:

Considere agora o *polinómio característico* do 5º grau abaixo

$$p(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 36s^2 - 29s - 87$$

s^5	1	12	–29
s^4	3	36	–87
s^3	0	0	0

→ { 0 na *coluna pivô* linha de zeros

da linha s^4 obtém-se q(s)

$$q(s) = 3s^4 + 36s^2 - 87$$

e calcula-se a derivada q'(s)

$$q'(s) = \frac{dq}{ds} = 12s^3 + 72s$$

Prof. Filippe de Souza

Exemplo 9 (continuação):
Eliminando a *linha de zeros*, preenchemos a tabela de Routh-Hurwitz

$$p(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 36s^2 - 29s - 87$$

s^5	1	12	–29	
s^4	3	36	–87	
s^3	0	0	0	← sai linha de zeros
s^3	12	72	0	← entra linha q'(s)
s^2	18	–87		
s^1	130			
s^0	–87			

1 troca de sinal (*de elementos da coluna pivô*)

Este *polinómio característico* tem 1 polo no SPD.

Logo, o *sistema* não é estável

Prof. Felippe de Souza

Estabilidade

estabilidade relativa

Prof. Felippe de Souza

Estabilidade Relativa

Às vezes é desejável que os *polos* não estejam perto do eixo $j\omega$ (*para não termos respostas lentas ou com excessivas oscilações*).

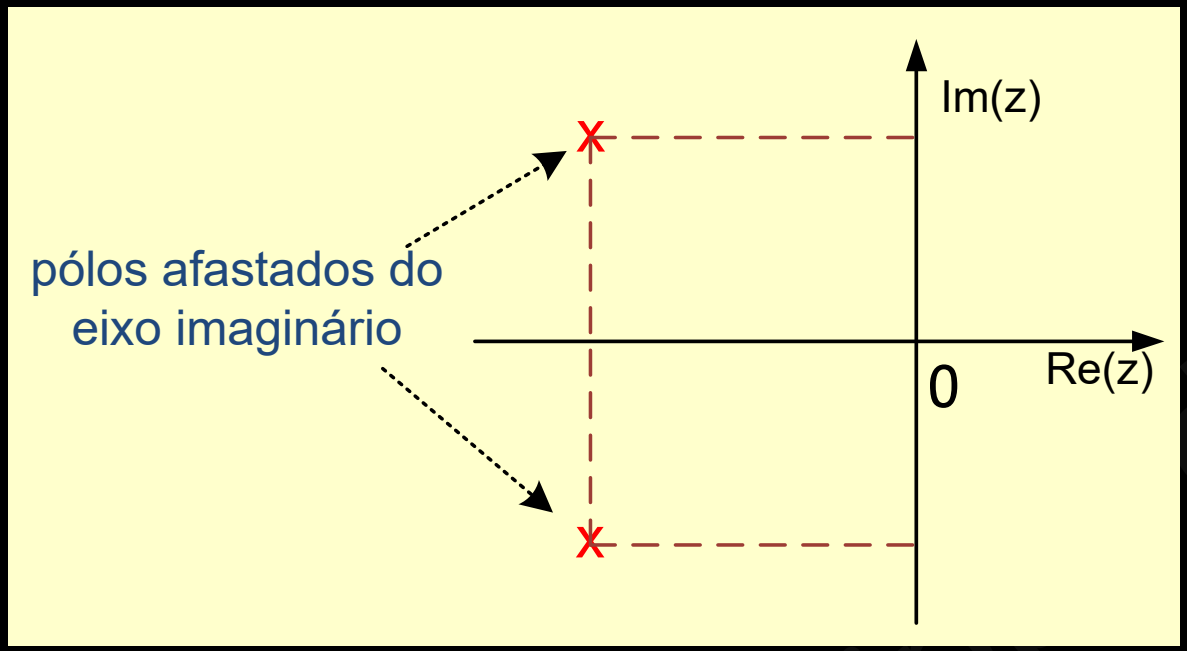
O que causa a estabilização ser mais *rápida* ou mais *lenta* é a *localização dos polos* ser mais *afastada* ou mais *perto* do *eixo imaginário* (*para esquerda*).

Quanto *mais afastado* para a esquerda estão os *polos do sistema*, *mais rápido* ele estabiliza.

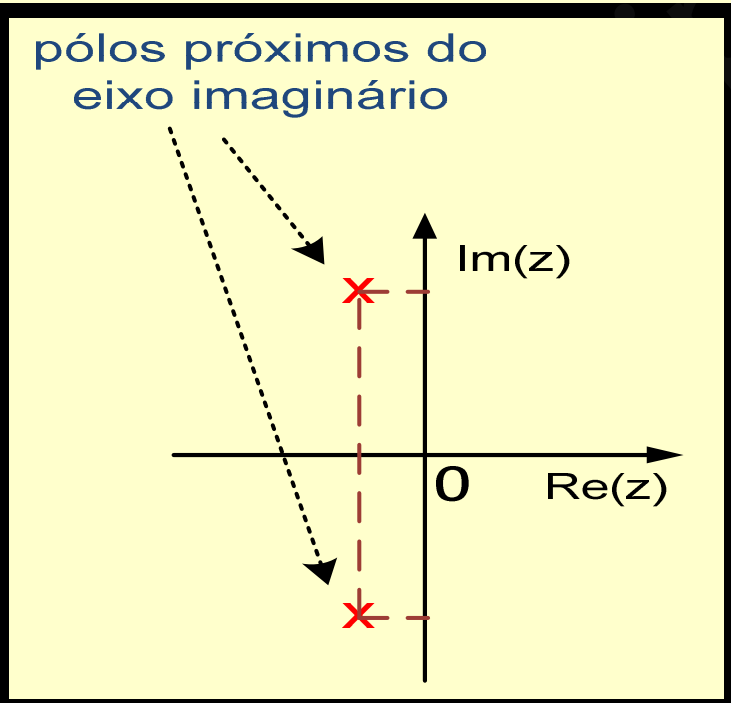
Prof. Felippe de Souza

Estabilidade

Considere estes 2 *sistemas*:



Sistema A
com *polos* afastados
do *eixo imaginário*.



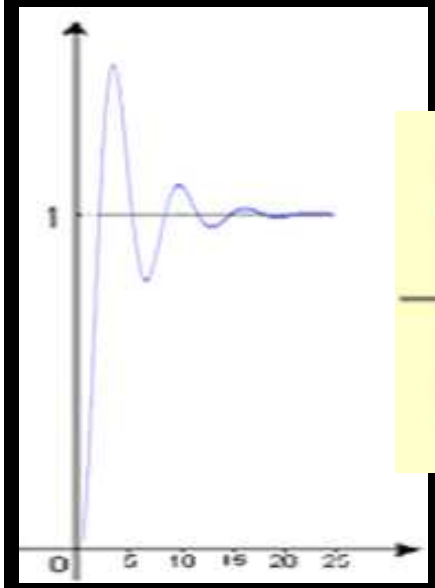
Sistema B
com *polos* próximos
do *eixo imaginário*.

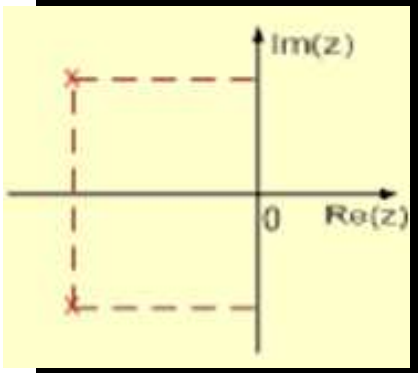
Estabilidade

resposta ao degrau

Sistema A

leva apenas cerca de 25 segundos para estabilizar

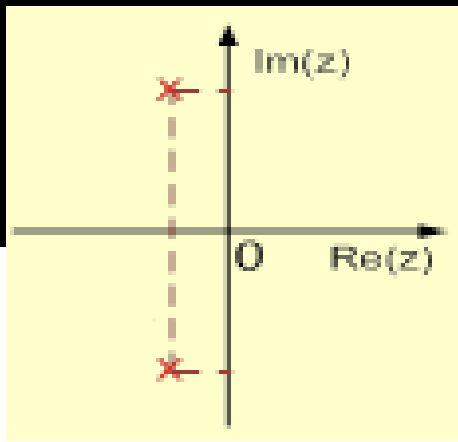


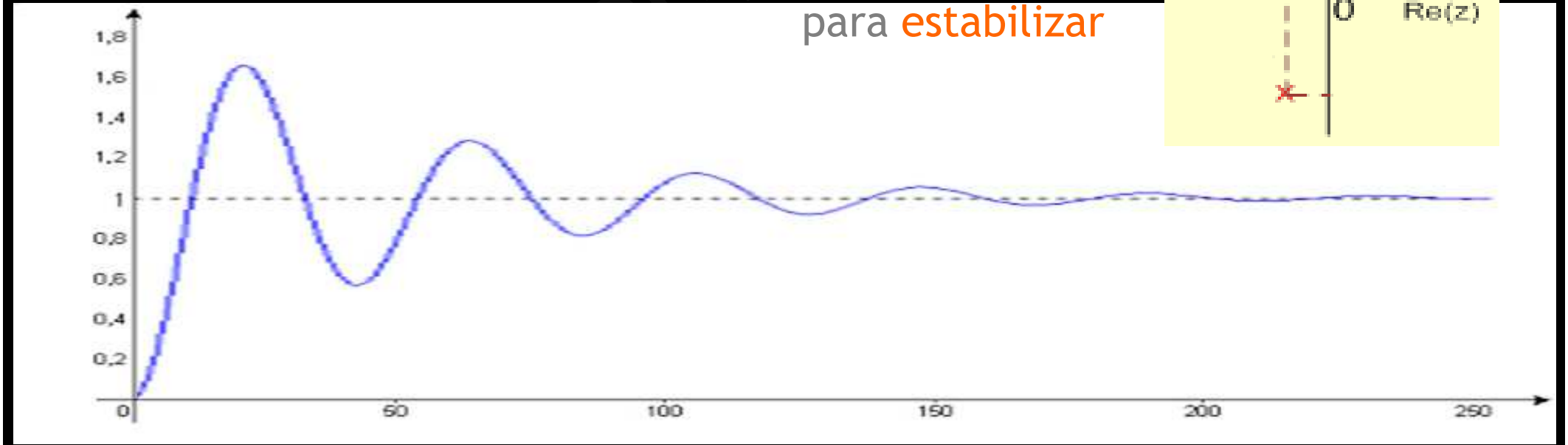


O sistema A estabiliza mais rápido que o sistema B pois tem os seus *polos* mais afastados do *eixo imaginário*.

Sistema B

leva 250 segundos para estabilizar





Philippe de Souza

Estabilidade

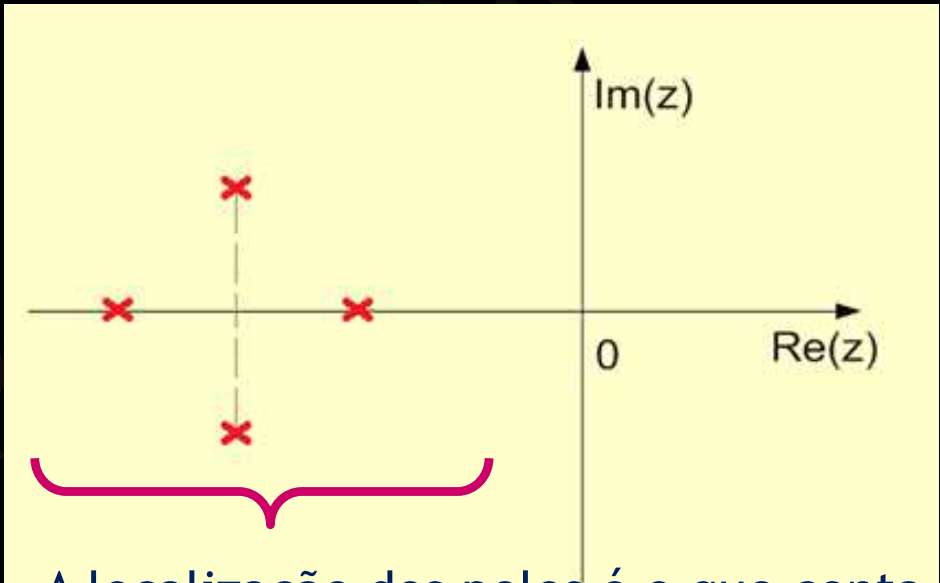
Já vimos que um *sistema* é estável ou não se possui todos os *polos* no SPE ou não, respetivamente

Este é o conceito de "*estabilidade absoluta*"

Entretanto, acabamos de ver também que: um *sistema* estável pode ser mais estável que outro

Isso depende de quanto mais afastado do *eixo imaginário*, para esquerda, estão localizados os *polos* deste *sistema*.

Este é o conceito de "*estabilidade relativa*".

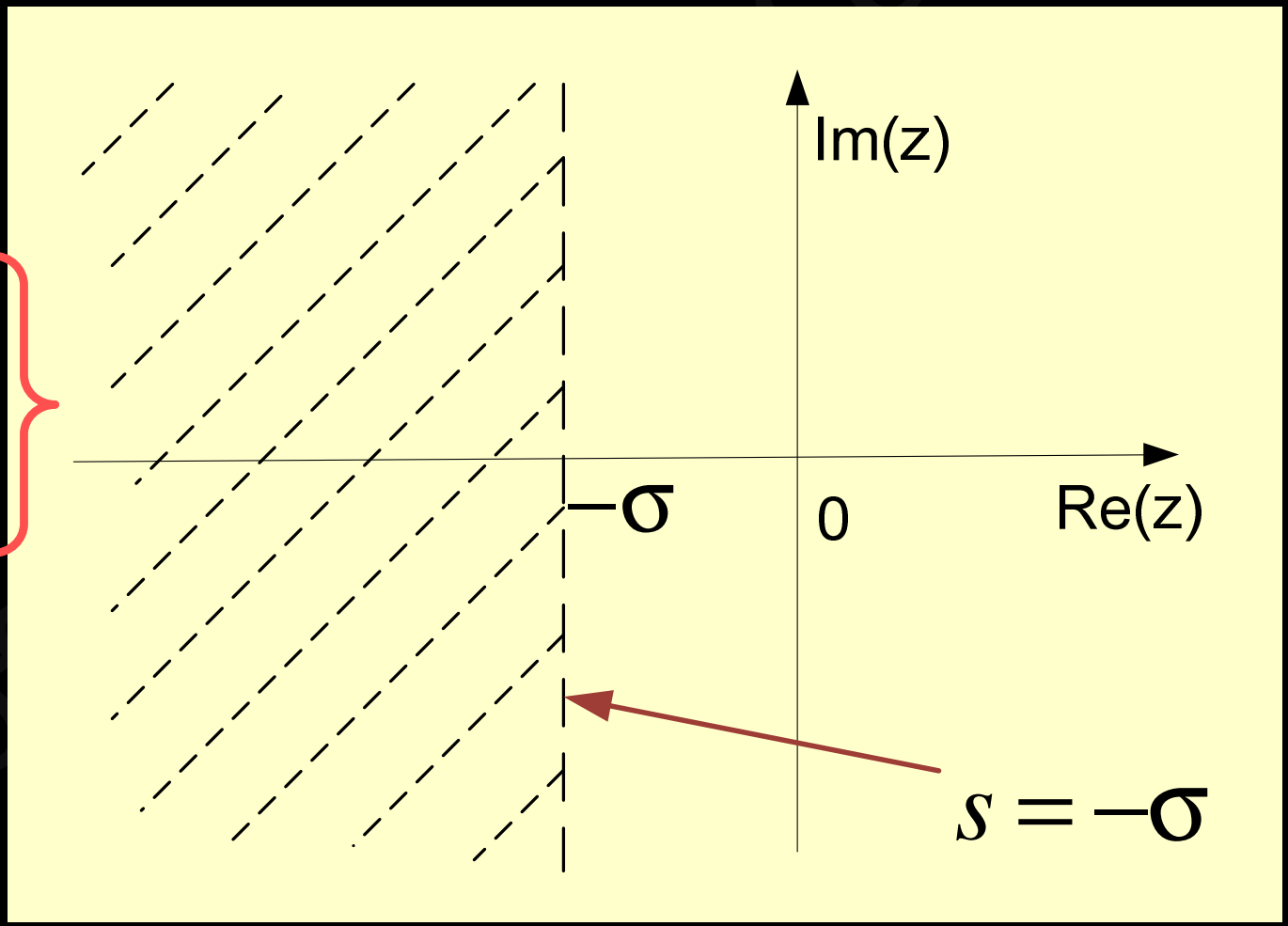


A localização dos polos é o que conta

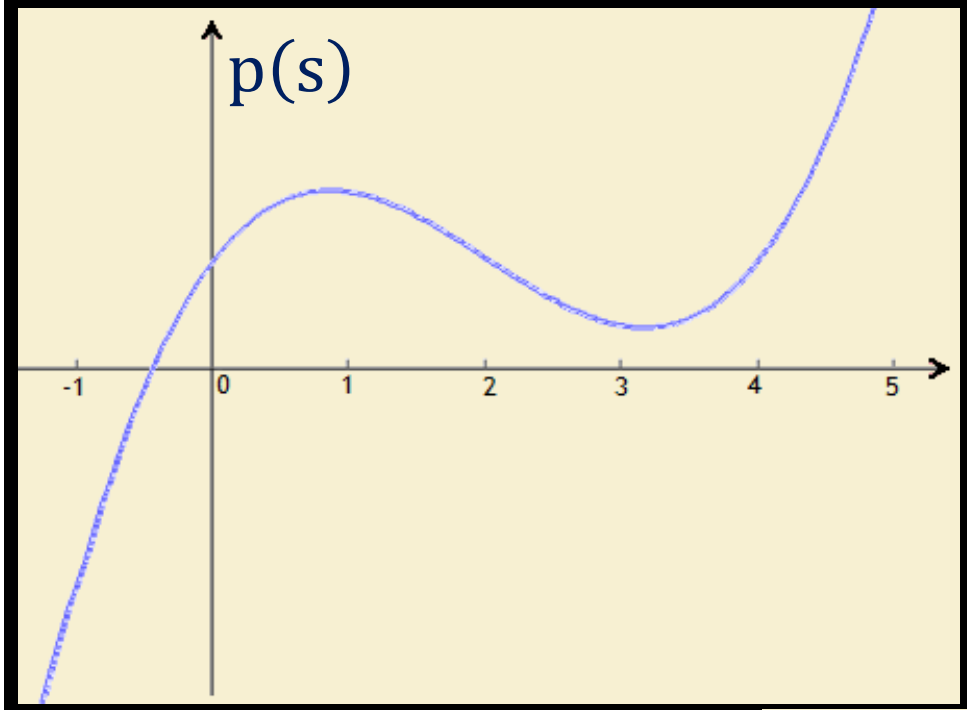
Prof. Filipe de Souza

Desta forma, é possível que desejamos verificar se um *sistema* tenha seus *polos* à esquerda de uma reta $s = -\sigma$ no SPE, e não apenas no SPE.

Região do SPE à esquerda da reta $s = -\sigma$



Estabilidade



Para isto faz-se uma translação

$$s \mapsto (s - \sigma)$$

do *polinómio característico* $p(s)$ obtendo-se

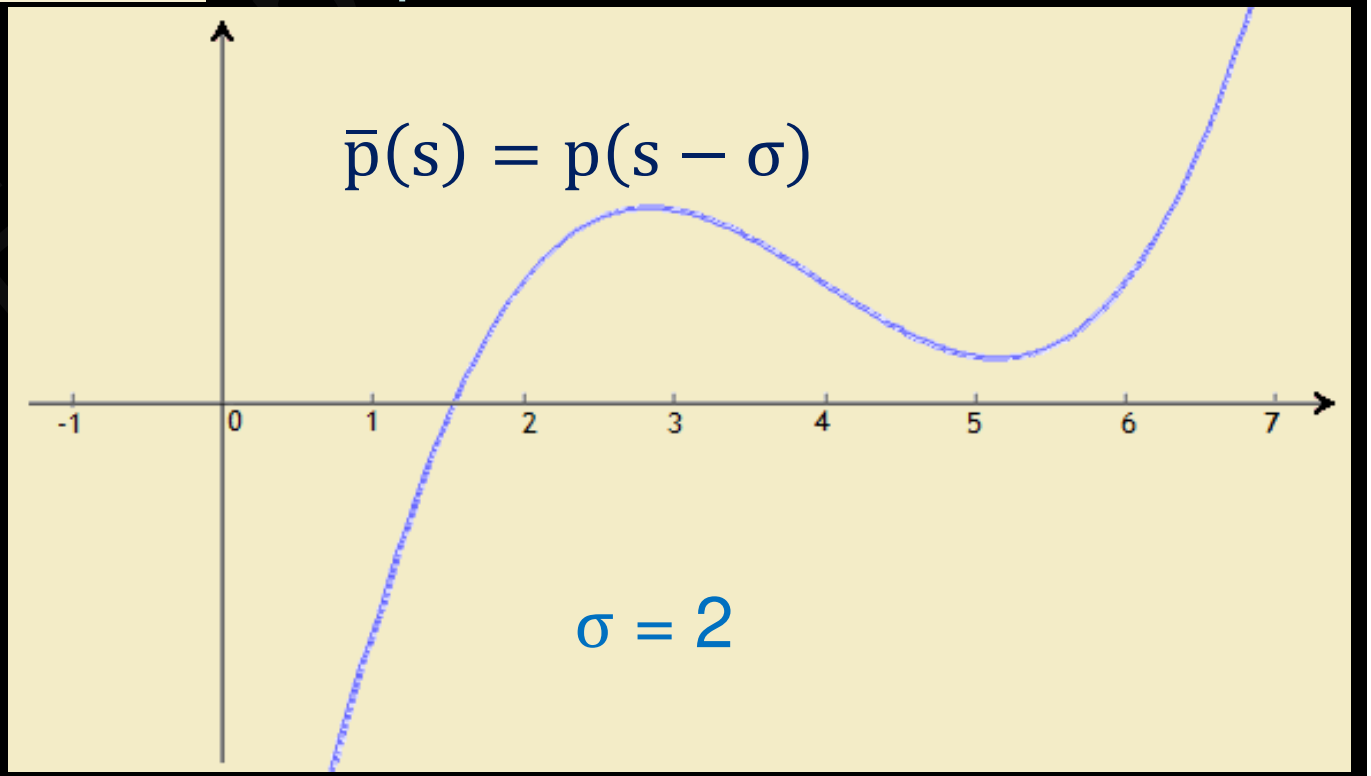
$$\bar{p}(s) = p(s - \sigma)$$

que é o *polinómio* $p(s)$ deslocado de σ para a direita.

Neste exemplo

$$\sigma = 2$$

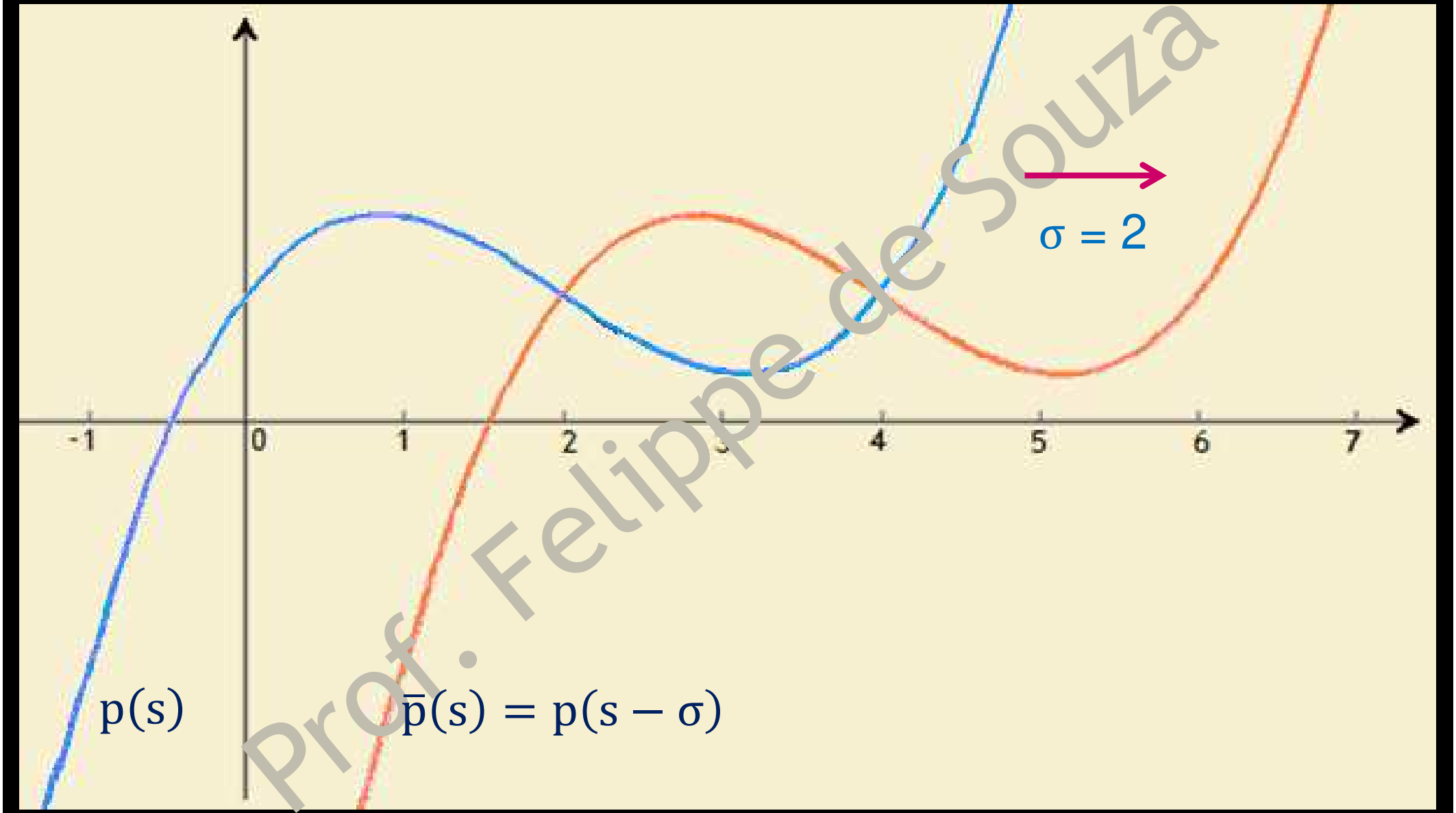
$$\bar{p}(s) = p(s - 2)$$



Prof. F... de Souza

Estabilidade

Translação do polinómio para direita



Prof. Felippe de Souza

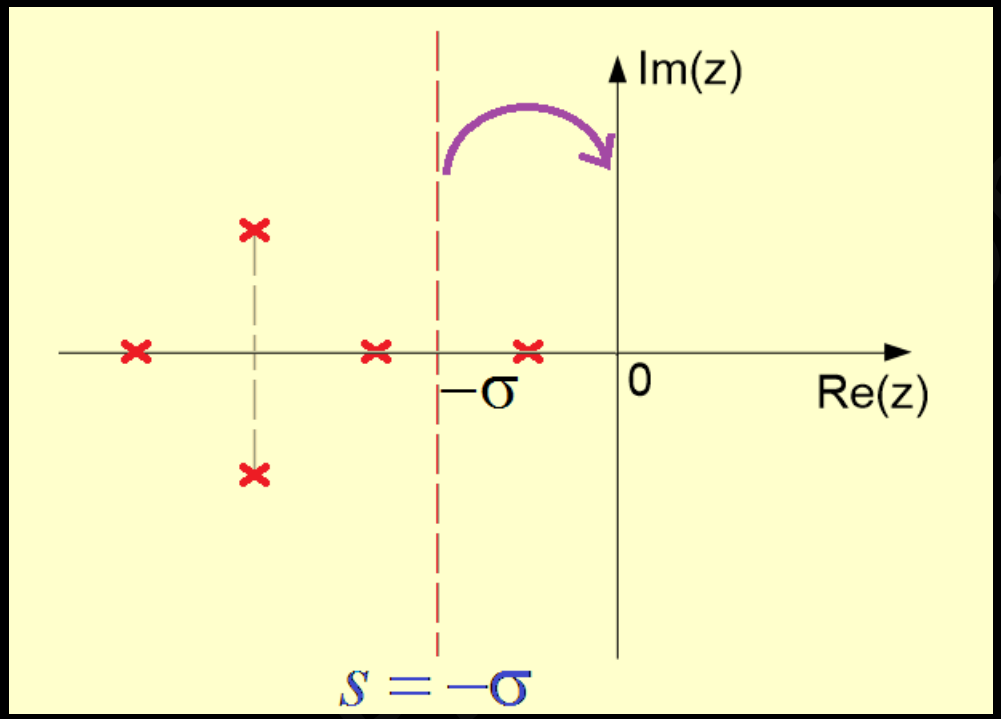
Estabilidade

Uma translação do polinómio para *direita* corresponde a

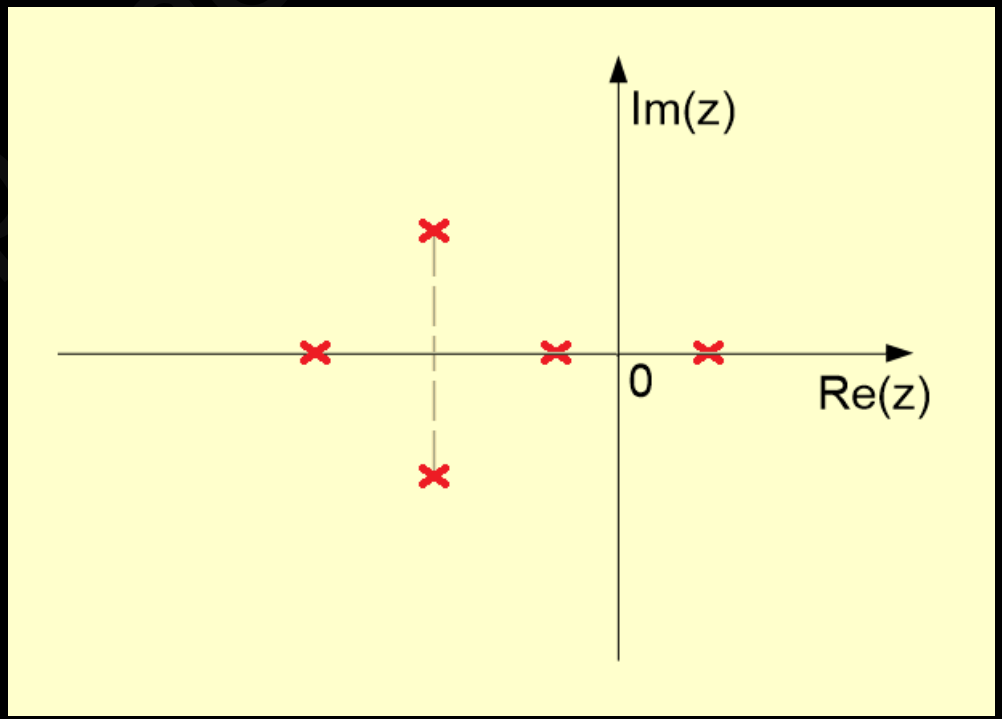
deslocar *a reta* $s = -\sigma$ para a *direita*

ou, equivalentemente,

deslocar o *eixo imaginário* para *esquerda*



raízes de $p(s)$



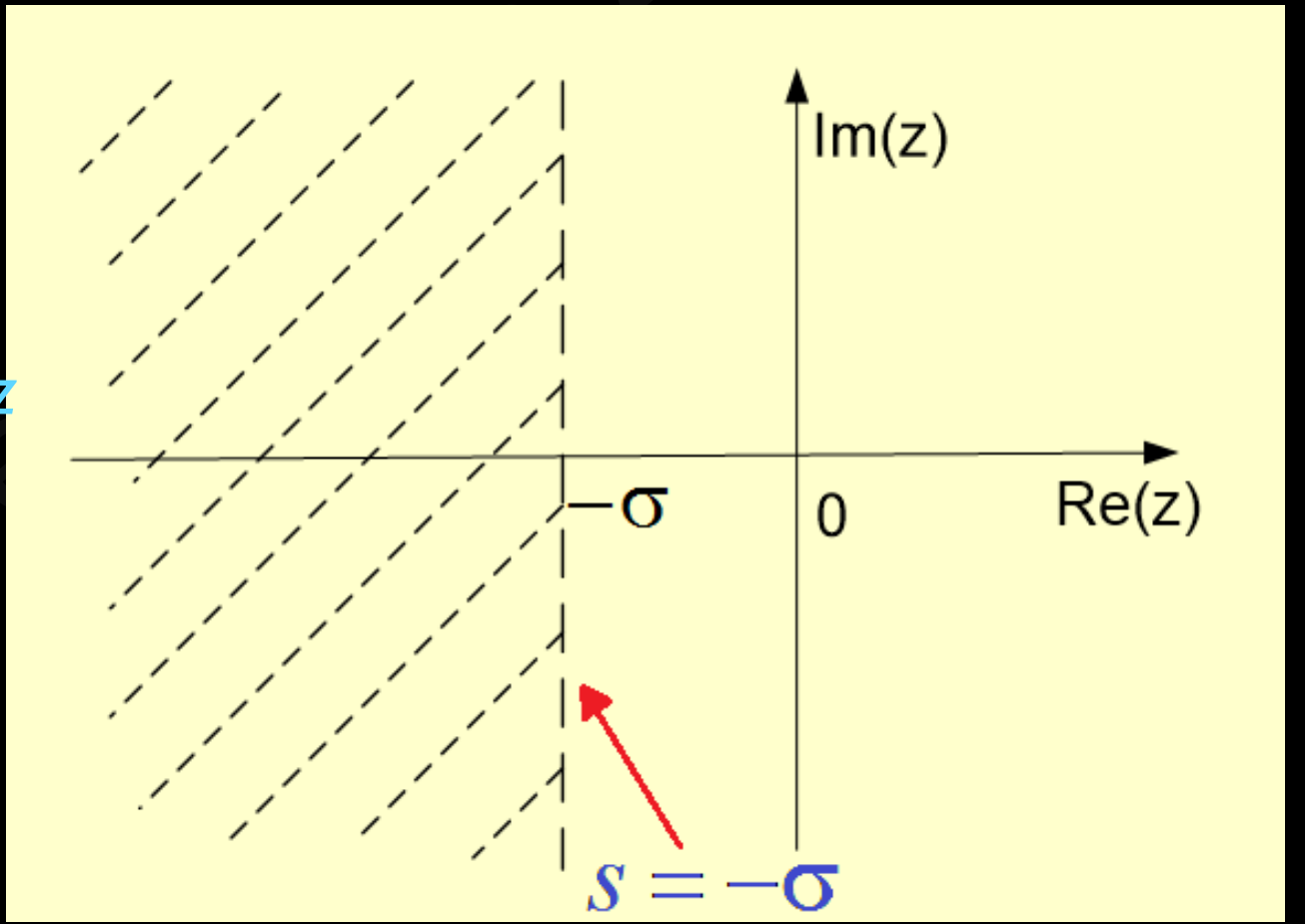
raízes de $\bar{p}(s) = p(s - \sigma)$

Estabilidade

Aplicando-se o *critério* de *estabilidade Routh-Hurwitz* ao polinómio transladado $\bar{p}(s)$, temos que o número de *trocas de sinal* na *coluna pivô* é igual ao *número de raízes* de $p(s)$ localizadas à *direita* da reta $s = -\sigma$

Ou seja, através de $\bar{p}(s)$ extraímos conclusões para $p(s)$

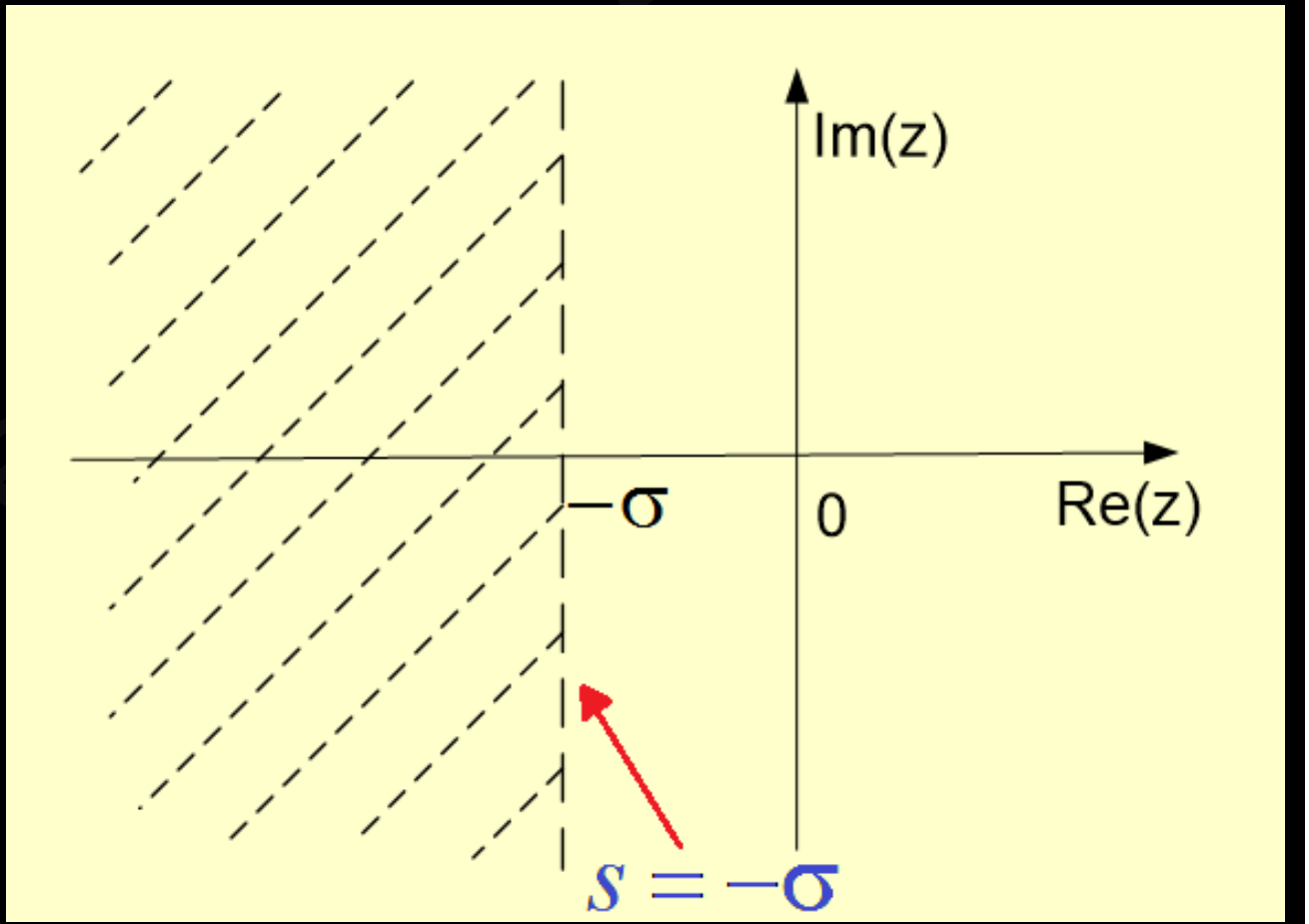
Por exemplo:
Se na *tabela Routh-Hurwitz* para $\bar{p}(s)$ não tiver *trocas de sinal* na *coluna pivô* (‘*zero trocas*’), então $p(s)$ não terá *polos* (‘*zero polos*’) *à direita* da reta $s = -\sigma$



Isto é, os *polos* estarão localizados na região assinalada na figura:

à esquerda da reta $s = -\sigma$, ou na própria reta.

Como $\bar{p}(s)$ é uma translação de $p(s)$ em σ unidades para *direita*, então todas as conclusões que forem extraídas para $\bar{p}(s)$ em relação ao *eixo imaginário* são válidas para $p(s)$ em relação à reta $s = -\sigma$



Prof. Fe Souza

Exemplo 10:

Verificar se o *polinómio característico* $p(s)$ dado abaixo tem os seus polos à *esquerda* de $s = -2$.

$$p(s) = s^3 + 8s^2 + 21s + 20$$

Vamos verificar se $p(s)$ possui todas as suas *raízes* no SPE

$$p(s) = s^3 + 8s^2 + 21s + 20$$

s^3	1	21
s^2	8	20
s^1	18,5	
s^0	20	

zero trocas na *coluna pivô*

A *coluna pivô* da tabela de Routh-Hurwitz de $p(s)$ é toda *positiva* e portanto este *polinómio* tem todos os polos no SPE

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 10 (continuação):

Mas será que os tem à *esquerda* da reta $s = -2$?

Para isso precisamos calcular o polinómio $\bar{p}(s)$ fazendo $\sigma = 2$

$$\bar{p}(s) = p(s-2) = (s-2)^3 + 8(s-2)^2 + 21(s-2) + 20$$
$$= s^3 + 2s^2 + s + 2$$

s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	$0 \cong \varepsilon > 0$	
s^0	2	

← 0 (‘zero’) na *coluna pivô*

não há *trocas de sinal* na *coluna pivô*

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 10 (continuação):

Isso quer dizer que não há raízes de $\bar{p}(s)$ no SPD e logo, não há raízes de $p(s)$ à *direita* da reta $s = -2$

Mas aquele 'zero' na segunda linha de baixo para cima (linha s^1) na *coluna pivô* indica que há 2 *raízes* de $\bar{p}(s)$ no *eixo imaginário* e portanto, há 2 *raízes* de $p(s)$ em cima da reta $s = -2$

Ao verificar a localização das *raízes* de $p(s)$ pode-se constatar que:

- de facto não há *polos à direita* da reta $s = -2$
- há 1 *polo à esquerda* da reta $s = -2$ (em $s = -4$)

e também que:

- há 2 *polos* em cima da reta $s = -2$

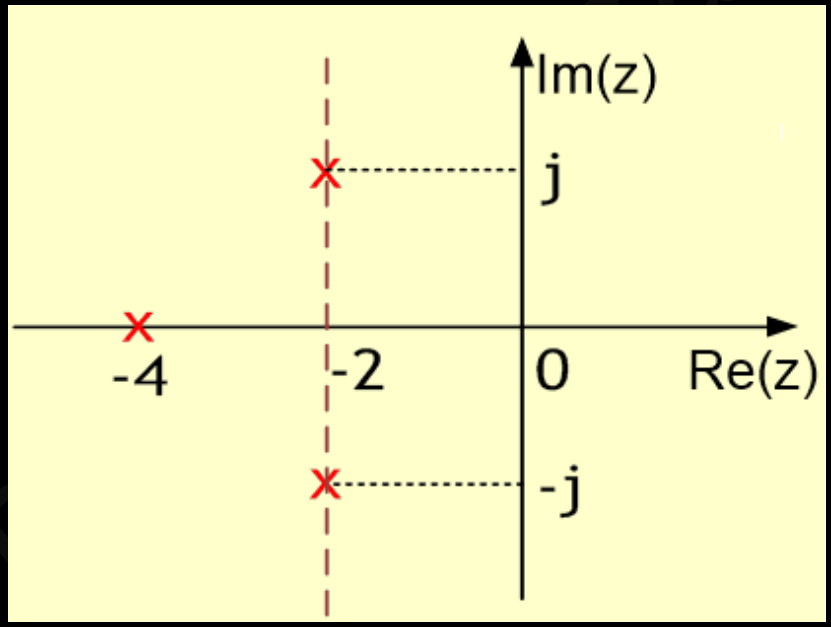
Prof. Fetone de Souza

Exemplo 10 (continuação):

As *raízes* de $p(s)$ são:

$$s = -4$$

$$s = -2 \pm j$$



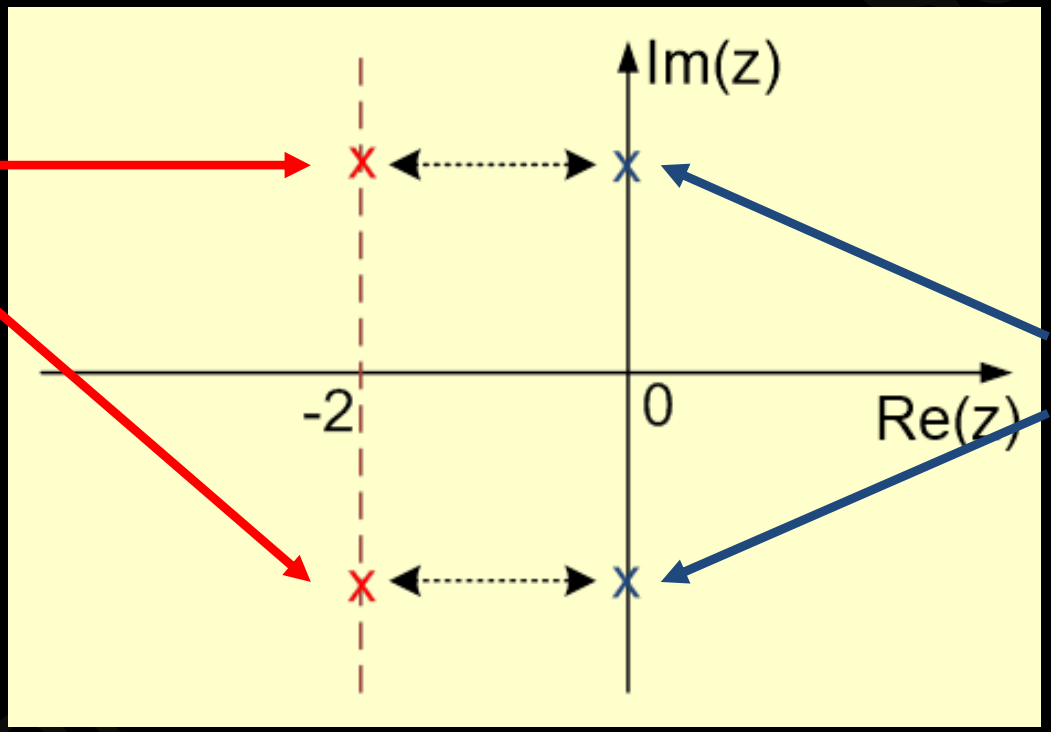
Localização das *raízes* do *polinómio* $p(s)$ no plano complexo

Prof. Felipe

Exemplo 10 (continuação):

As 2 *raízes* de $\bar{p}(s)$ no *eixo imaginário* correspondem às 2 *raízes* de $p(s)$ na reta $s = -2$

raízes de $p(s)$ na reta $s = -\sigma$



raízes de $\bar{p}(s)$ no *eixo imaginário*

Localização de 2 *raízes* dos polinómios $\bar{p}(s)$ e $p(s)$

Exemplo 11:

Verificar se o *polinómio característico* $p(s)$ dado abaixo tem os seus *polos* à *esquerda* de $s = -1$.

$$p(s) = 2s^4 + 13s^3 + 28s^2 + 23s + 6$$

Primeiramente vamos verificar se $p(s)$ possuiu todas as suas *raízes* localizadas no SPE.

s^4	2	28	6
s^3	13	23	0
s^2	24,46	6	
s^1	19,81	0	
s^0	6		

a *coluna pivô* é toda *positiva* e portanto este *polinómio* $p(s)$ tem todos os *polos* no SPE.

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 11 (continuação):

Entretanto, queremos saber se estão à *esquerda* da reta $s = -1$
Para isso precisamos calcular o *polinómio* $\bar{p}(s)$ fazendo $\sigma = 1$

$$\bar{p}(s) = p(s-1) = 2(s-1)^4 + 13(s-1)^3 + 28(s-1)^2 + 23(s-1) + 6$$
$$= 2s^4 + 5s^3 + s^2 - 2s$$

s^4	2	1	0
s^3	5	−2	
s^2	9/5	0	
s^1	−2		
s^0	0		

0 ('zero') na *coluna pivô*

há 1 *troca de sinal* na *coluna pivô*, logo

há uma *raiz* de $\bar{p}(s)$ no SPD e portanto,

há uma *raiz* de $p(s)$ à *direita* da reta $s = -1$

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 11 (continuação):

Mas aquele 'zero' na última linha (linha s^0) da *coluna pivô* indica que há 1 *raiz* de $\bar{p}(s)$ no *eixo imaginário* (na origem) e portanto, há 1 *raiz* de $p(s)$ em $s = -1$

Ao verificar a *localização* das *raízes* de $p(s)$ pode-se constatar que:

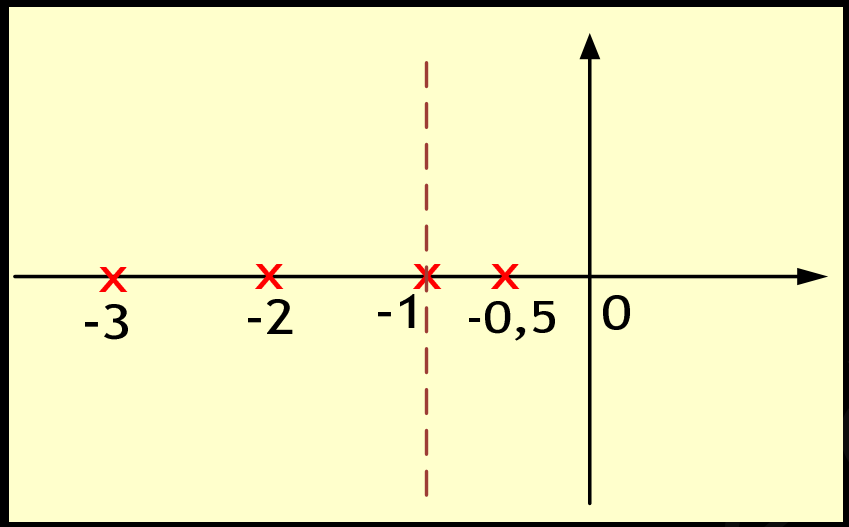
- de facto há 1 *polo* em cima da reta $s = -1$

e que:

- há também 1 *polo à direita* da reta $s = -1$ (em $s = -0{,}5$), que obviamente está no intervalo $\{-1 < s < 0\}$ pois já vimos que $p(s)$ não tem *raízes* no SPD

Prof. Felippe de Souza

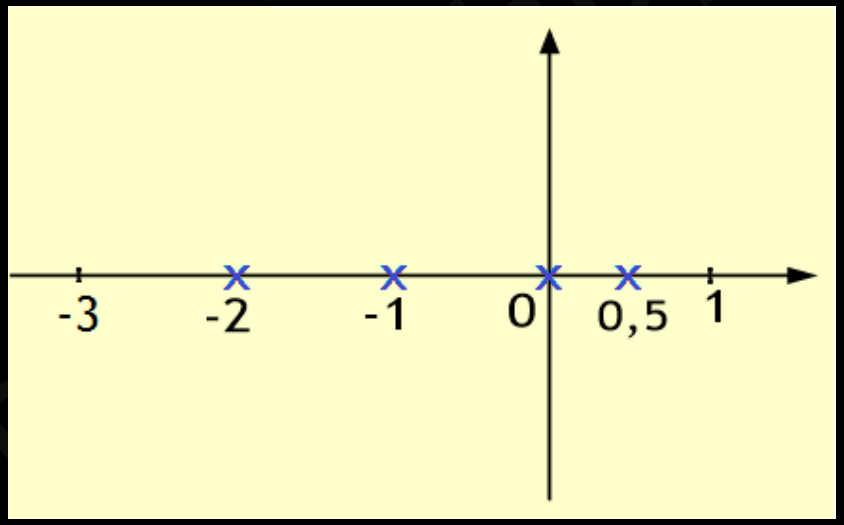
Exemplo 11 (continuação):



Localização das *raízes* do *polinómio* $p(s)$

As *raízes* de $p(s)$ são:

$$s = -3$$
$$s = -2$$
$$s = -1$$
$$s = -0{,}5$$



Localização das *raízes* do *polinómio* $\bar{p}(s)$

As *raízes* de $\bar{p}(s)$ são:

$$s = -2$$
$$s = -1$$
$$s = 0$$
$$s = 0{,}5$$

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!
Thank you!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt

Prof. Felippe de Souza