Controlo de Sistemas

9
"Equações de Estado"
(*State equations*)
parte II

J. A. M. Felippe de Souza

Prof. Felippe de Souza

Equações de Estado

Recapitulando (*da parte I*):

as *equações de estado* têm a forma (sistemas *de ordem* n)

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$$

onde:

A é uma matriz $n \times n$

B é uma matriz $n \times p$

C é uma matriz $q \times n$

D é uma matriz $q \times p$

sendo:

p = número de entradas

q = número de saídas

$\dot{x}$ = vetor derivada de x

Prof. Felippe de Souza

Equações de Estado

$\dot{x}$ = vetor derivada de x

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

Prof. Felippe de Souza

Equações de Estado

No caso de sistemas com apenas uma *entrada* $u(t)$, i.e., $p = 1$, temos que:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou seja, neste caso

B é um *vetor coluna*.

No caso de sistemas com apenas uma *saída* $y(t)$, i.e., $q = 1$, temos que:

$$C = [\, c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n \,]$$

C é um *vetor linha*.

No caso de sistemas com apenas uma *entrada* $u(t)$ e uma *saída* $y(t)$,

$$D = [\, d_1 \,]$$

D é uma *constante* d_1 (ou seja, D é uma *matriz* 1×1).

Prof. Felippe de Souza

Equações de Estado

Uma *matriz* A na "*forma companheira*" tem o seguinte aspeto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \left(\frac{-a_n}{a_o}\right) & \left(\frac{-a_{n-1}}{a_o}\right) & \left(\frac{-a_{n-2}}{a_o}\right) & \left(\frac{-a_{n-3}}{a_o}\right) & \cdots & \left(\frac{-a_1}{a_o}\right) \end{bmatrix}$$

onde a_o , a_1 , ... , a_{n-1} , a_n , são os *coeficientes* da *equação característica* p(s):

$$p(s) = a_o s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

No caso particular, mas bastante comum, de $a_o = 1$, a matriz A na "*forma companheira*" tem o seguinte aspeto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

onde, a_1 , ... , a_{n-1} , a_n , são os *coeficientes* da *equação característica* $p(s)$:

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

A *equação característica* e os *polos* do sistema

Um sistema descrito na forma de *equação de estados*

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$$

tem o seu *polinómio característico* dado por:

$$p(s) = \det\{[\,sI - A\,]\}$$

Prof. Felippe de Souza

Os *polos* do sistema são os "*autovalores*" (ou "*valores próprios*") de A, podendo ser *repetidos*, i.e., *duplos*, *triplos*, etc.

Como é sabido, os *autovalores* de A são as *raízes* do *polinómio característico*

$$p(s) = \det [\, s \cdot I - A \,]$$

Prof. Felipe de Souza

Representações Equivalentes

Considere um sistema descrito na forma de *equação de estados*

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$$

cuja *variável de estado* é $x(t)$.

Definindo-se agora uma nova *variável de estado* $\overline{x}$ como:

$$\overline{x} = P\,x \qquad \text{sendo } P \text{ } \underline{\textit{inversível}}.$$

Logo, como:

$$\dot{\overline{x}} = P\,\dot{x}$$

temos que:

$$\begin{cases} x = P^{-1}\,\overline{x} \\ \dot{x} = P^{-1}\,\dot{\overline{x}} \end{cases}$$

Prof. Felippe de Souza

e então:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\,\bar{x} + \bar{B}\,u \\ y = \bar{C}\,\bar{x} + \bar{D}\,u \end{cases}$$

é uma outra representação do mesmo sistema em *equações de estado*

onde:

$$\bar{A} = P\,A\,P^{-1}$$

$$\bar{B} = P\,B$$

$$\bar{C} = C\,P^{-1}$$

$$\bar{D} = D$$

Note que a *entrada* u e a *saída* y não se alteraram. Somente a *representação interna* do sistema (as *variáveis de estado*).

Prof. Ezequiel de Souza

Conversão de Equação de Estado para Função de Transferência

Para se converter a representação de um sistema de *equações de estado*

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$$

para *função de transferência*, a fórmula é dada por,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C\cdot(sI - A)^{-1}\cdot B + D$$

Prof. Felippe de Souza

simulação analógica

Prof. Felippe de Souza

Simulação Analógica

Seja qual for a natureza de um sistema (SLIT) *linear* e *invariante no tempo* (mecânica, elétrica, eletromecânica, térmica, hidráulica, ou um processo químico, etc.) ele pode ser simulado em laboratório através de componentes eletrónicos.

Desta forma é possível simular uma *entrada* qualquer para o *sistema*, como um degrau por exemplo, e observarmos qual seria a *resposta* (ou seja, a *saída*) do *sistema* para aquela *entrada*.

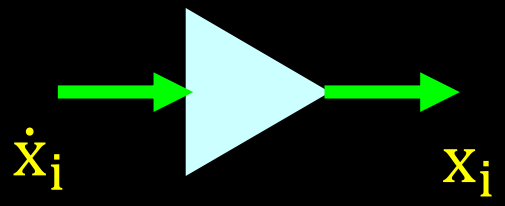
A isso chamamos de "*simulação analógica*".

Prof. Fotine de Souza

Equações de Estado

Componentes com que fazemos a *simulação analógica*

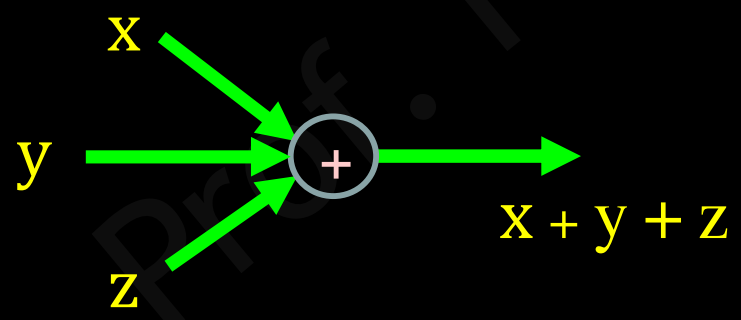
INTEGRADOR



transforma um sinal $\dot{x}_i$ na sua entrada em x_i na sua saída, ou seja, integra

A *simulação analógica* de um *sistema* de ordem n precisa de n integradores.

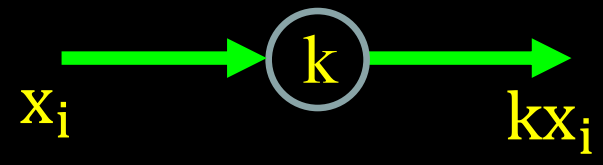
SOMADOR



soma os sinais que entram num único sinal de saída

Prof. Felippe de Souza

MULTIPLICADOR

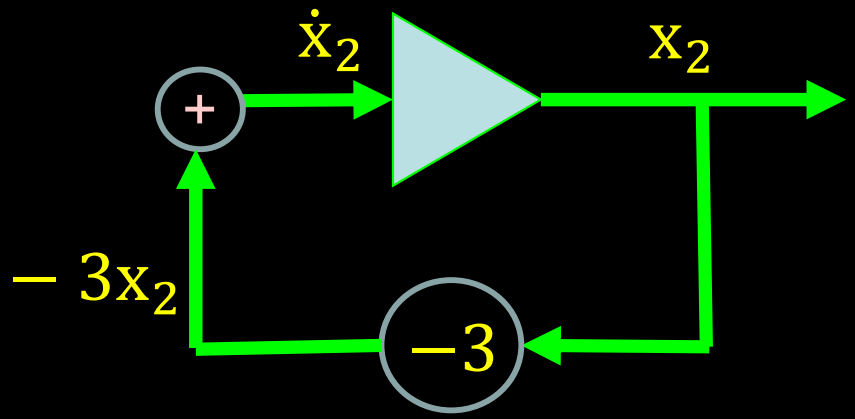


multiplica por k o sinal x_i que entra, devolvendo kx_i na sua *saída*

Exemplo 16:

Na figura a seguir vemos como se faz a *simulação analógica* da equação diferencial

$$\dot{x}_2 = -3x_2$$

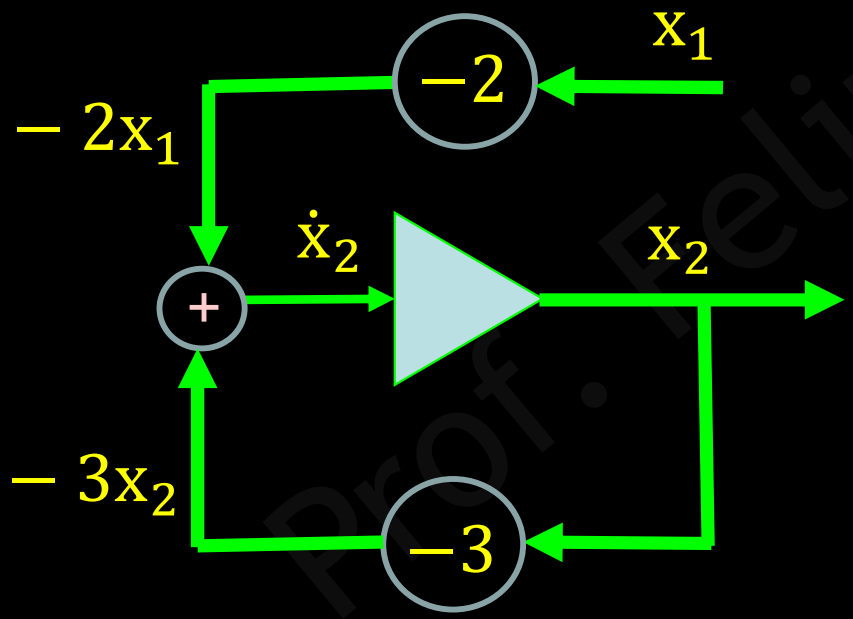


Prof. Felippe de Souza

Exemplo 17:

Agora a *simulação analógica* da equação diferencial

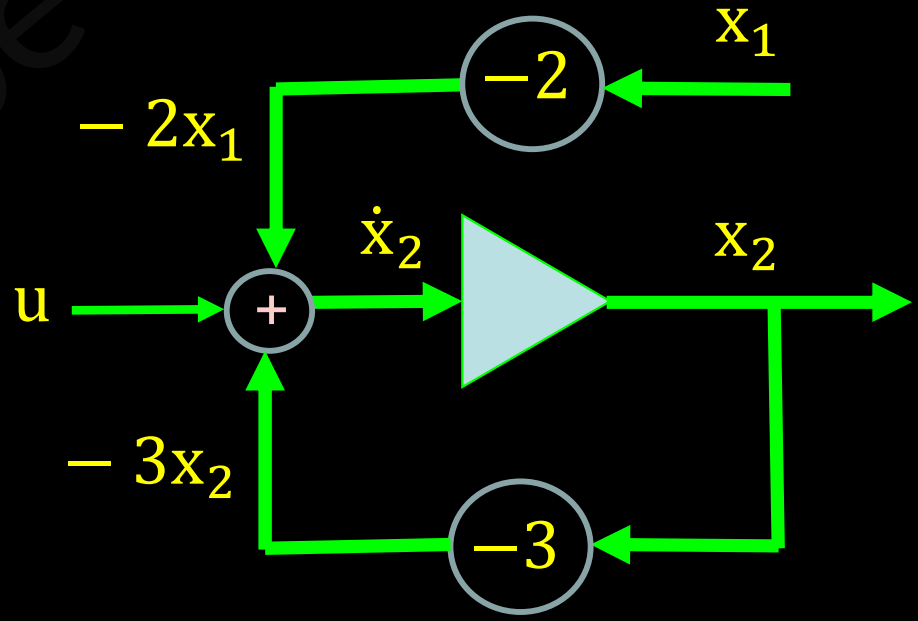
$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$$



Exemplo 18:

E agora a *simulação analógica* da equação diferencial

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u$$

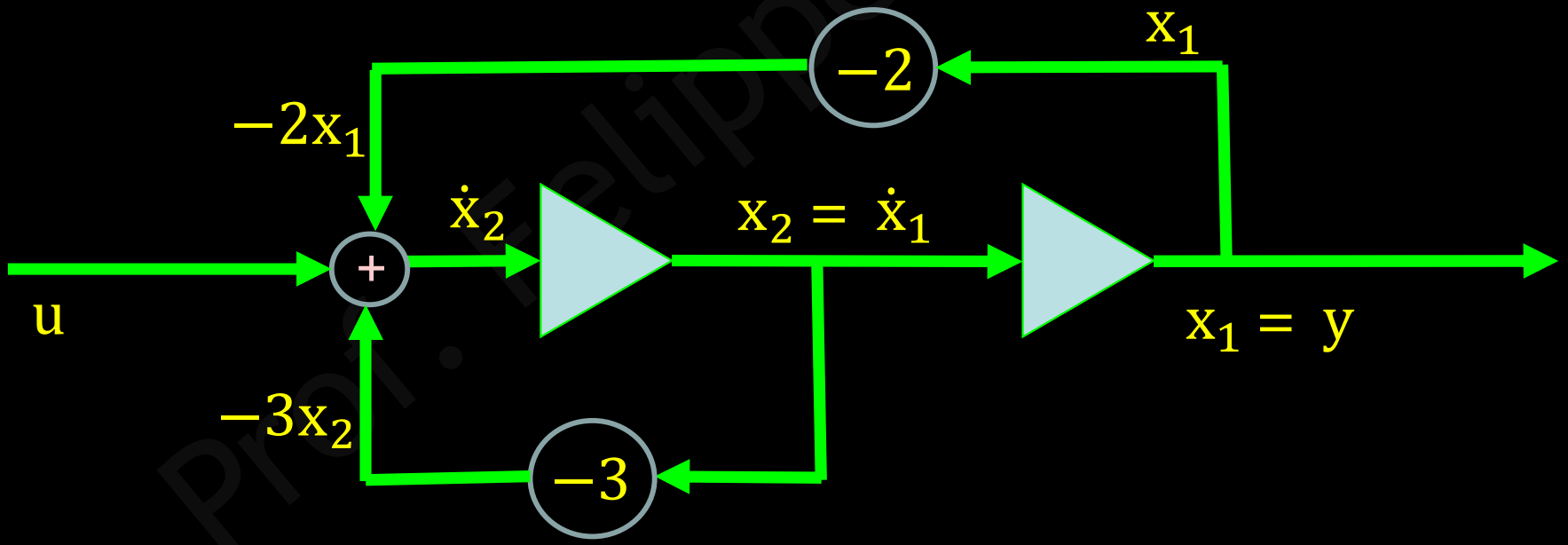


Prof. Felippe de Souza

Exemplo 19:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

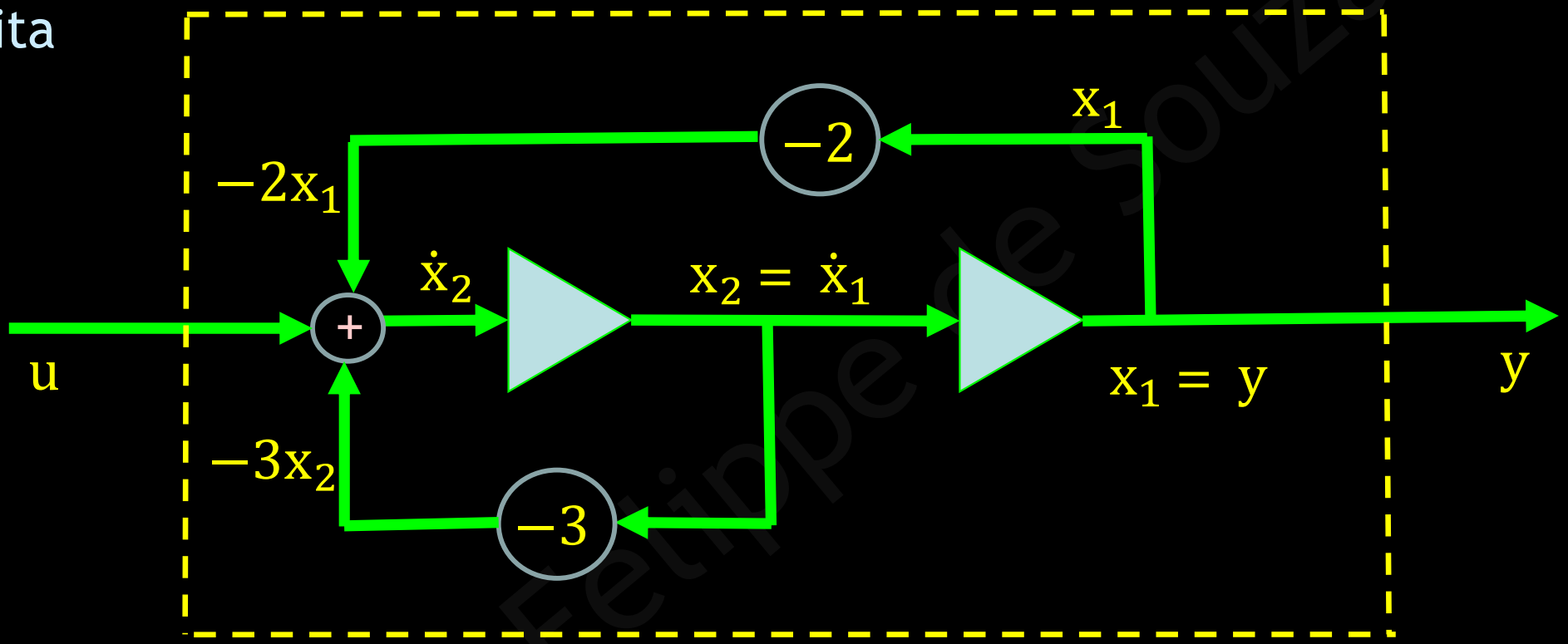
Vamos agora fazer a *simulação analógica* deste *sistema de segunda ordem* (descrito pelas suas *equações de estado*)



Prof. Felipe de Souza

Exemplo 19 (continuação):

Agora, se colocarmos uma caixa abrangendo a *simulação analógica* feita



Pode-se observar que nesta caixa entra apenas a *entrada* u (*input* do *sistema*) e sai apenas a *saída* y (*output* do *sistema*).

O que fica dentro da caixa é a representação interna do *sistema*, através das *variáveis de estado* x_1 e x_2

Prof. Felippe de Souza

Simulação Analógica

na prática

conversão da função transferência para equações de estado

Prof. Felippe de Souza

Conversão da Função de Transferência para Equações de Estado

Já vimos que a representação de um sistema pela sua *função de transferência*

$$\frac{Y(s)}{U(s)}$$

é única!

Por outro lado a representação de um sistema em *equações de estado*

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$$

não é única!

Prof. Felippe de Souza

Equações de Estado

Não há uma regra única para se transformar sistemas descritos pela sua *equação diferencial ordinária* (EDO) ou pela sua *função de transferência*, em *equações de estado*

Vamos considerar aqui o sistema A, de *terceira ordem*, descrito pela *equação diferencial*

$$\dddot{y} + 12\ddot{y} + 20\dot{y} = 80u \tag{1}$$

cuja *função de transferência* é dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{80}{s^3 + 12s^2 + 20s} \tag{2}$$

ou

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{80}{s(s+2)(s+10)} \tag{3}$$

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 20:

Para o sistema A descrito acima, a *equação diferencial ordinária* (EDO) é dada por (1):

$$\dddot{y} + 12\ddot{y} + 20\dot{y} = 80u$$

Definindo as *variáveis de estado*

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \end{cases}$$

obtém-se as *equações de estado*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -20x_2 - 12x_3 + 80u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 20 (continuação):

Escrevendo na forma matricial temos

$$\begin{cases} \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -12 \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 80 \end{bmatrix}}^{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x \end{cases}$$

$D = 0$

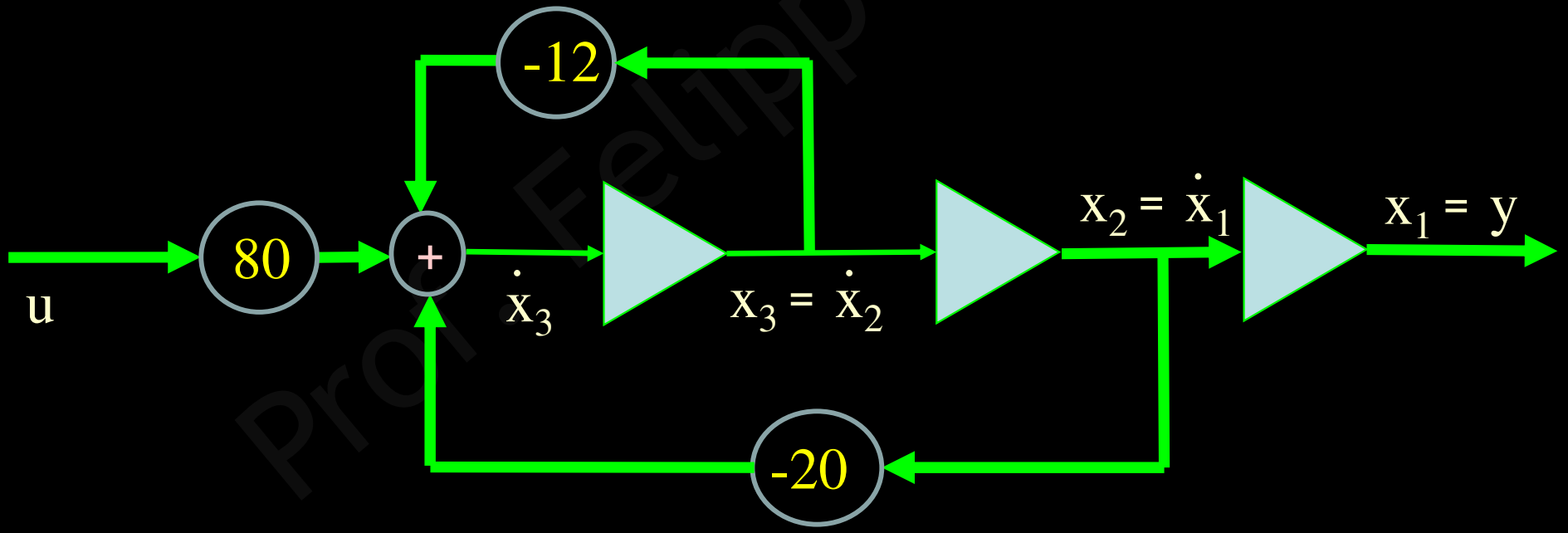
Observe que a matriz A está na *forma companheira*

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 21:

Vamos agora fazer uma *simulação analógica* deste sistema A utilizando a *equação de estado* obtida no exemplo anterior

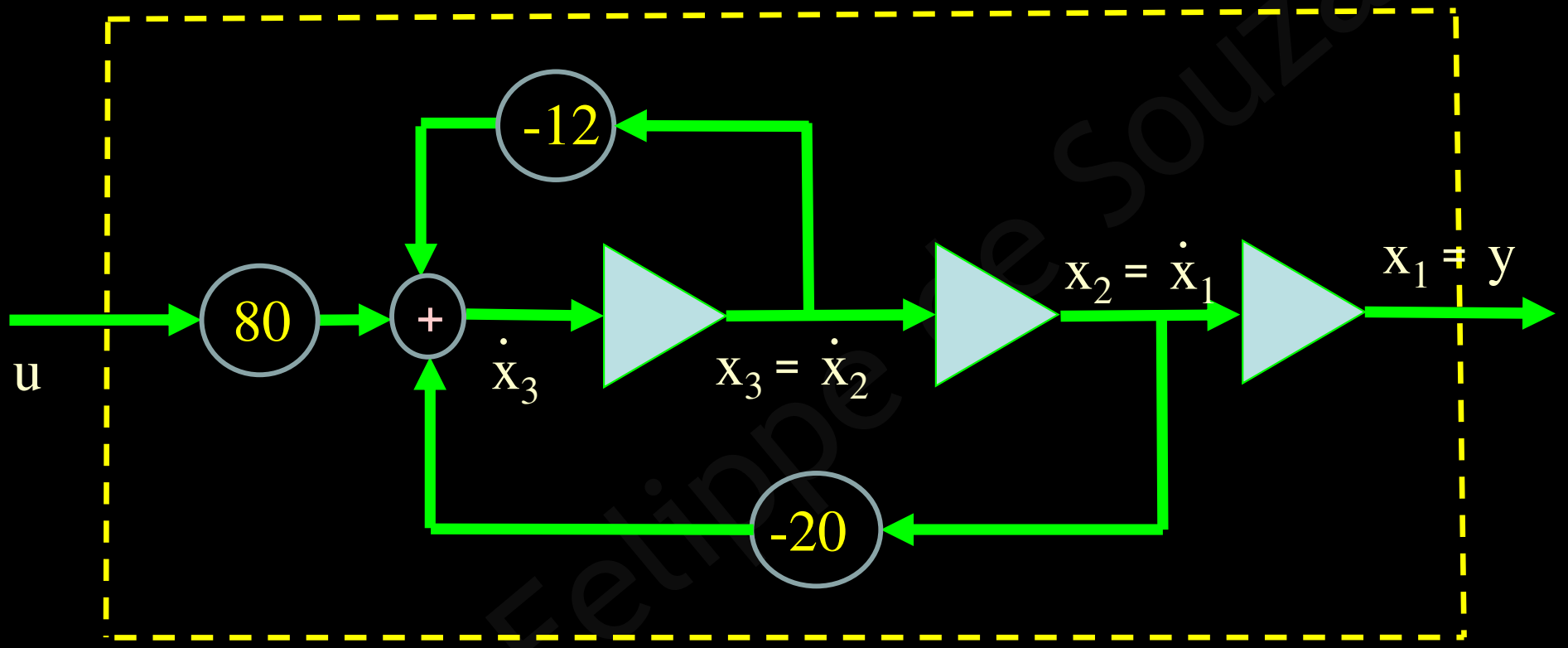
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -20x_2 - 12x_3 + 80u \\ y = x_1 \end{cases}$$



Prof. Felippe de Souza

Exemplo 21 (continuação):

Agora, colocando uma caixa que abrange a simulação analógica feita



observa-se que nesta caixa entra apenas a *entrada* u (*input* do *sistema*) e sai apenas a *saída* y (*output* do *sistema*).

O que fica dentro da caixa é a *representação interna* do *sistema*, através das *variáveis de estado* x_1 , x_2 e x_3

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 22:

Vamos considerar o mesmo sistema A dos exemplos anteriores. Entretanto aqui vamos reescrever a *função de transferência* $G(s)$ dada em (2) na seguinte forma:

$$G(s) = \underbrace{\frac{5}{s}}_{\frac{X_1(s)}{U(s)}} \cdot \underbrace{\frac{4}{(s+2)}}_{\frac{X_2(s)}{U(s)}} \cdot \underbrace{\frac{4}{(s+10)}}_{\frac{X_3(s)}{U(s)}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Definindo as *variáveis de estado* da seguinte forma

Prof. Felipe de Souza

Exemplo 22 (continuação):

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{5\,U(s)}{s} \\ X_2(s) = \dfrac{20\,U(s)}{s(s+2)} \\ X_3(s) = G(s).U(S) = Y(s) = \dfrac{80\,U(s)}{s(s+2)(s+10)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX_1(s) = 5U(s) \\ (s+2)\,X_2(s) = 4.\dfrac{5\,U(s)}{s} = 4.X_1(s) \\ (s+10)\,X_3(s) = 4.\dfrac{20\,U(s)}{s(s+2)} = 4.X_2(s) \end{cases}$$

Prof. Felipe de Souza

Exemplo 22 (continuação):

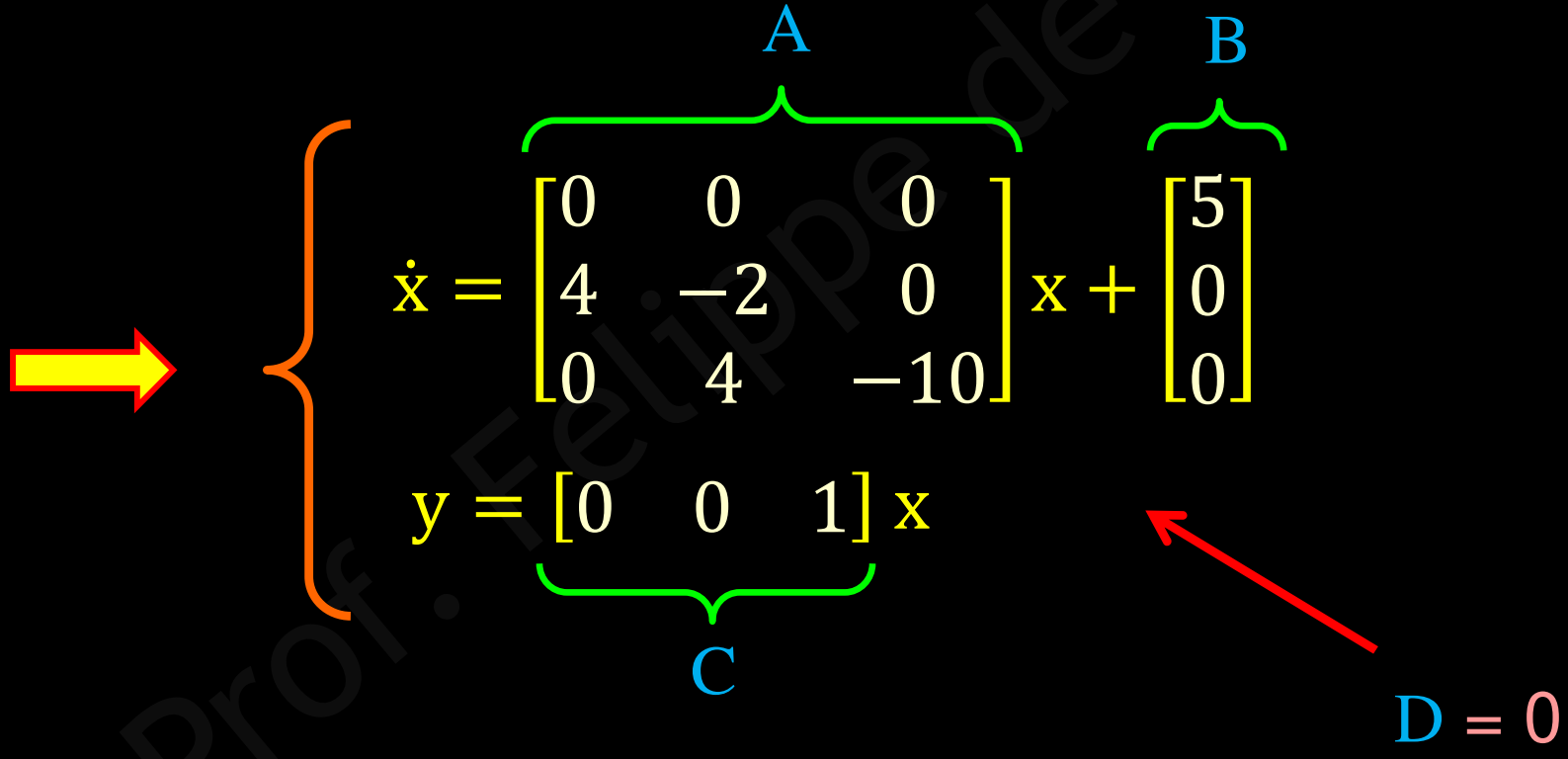
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5u \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_3 = 4x_2 - 10x_3 \\ y = x_3 \end{cases}$$

que nos dá uma segunda *formulação* em *equações de estado* deste sistema A, diferente da *formulação* do exemplo anterior.

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 22 (continuação):

Escrevendo na forma matricial temos

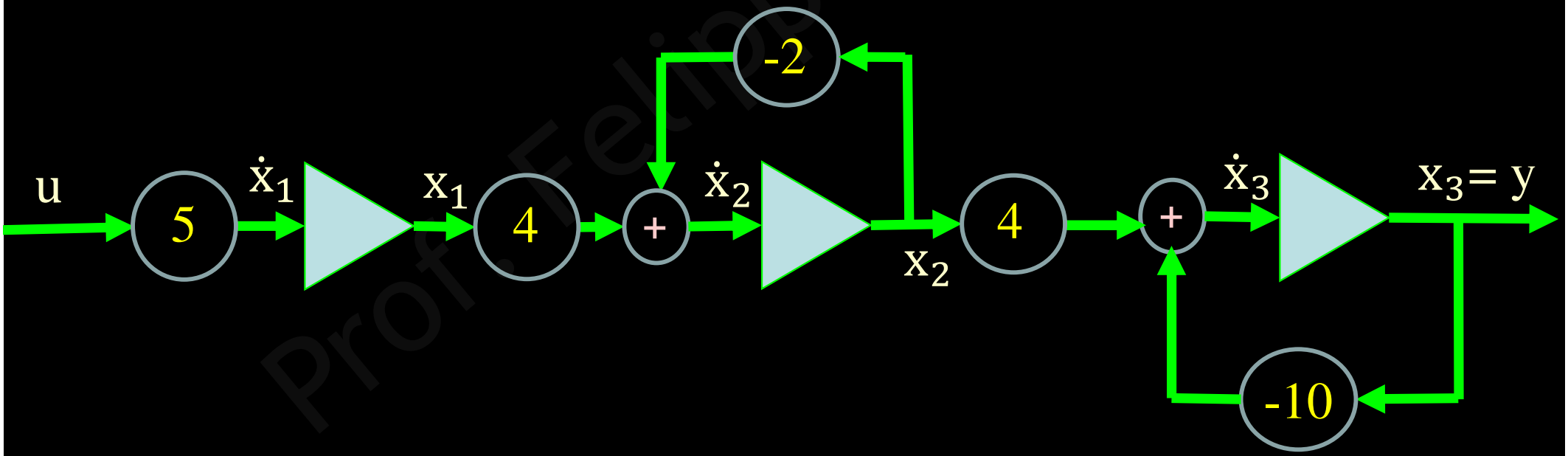


Prof. Felippe de Souza

Exemplo 23:

Vamos agora fazer uma *simulação analógica* deste sistema A utilizando esta *equação de estado* obtida no exemplo anterior

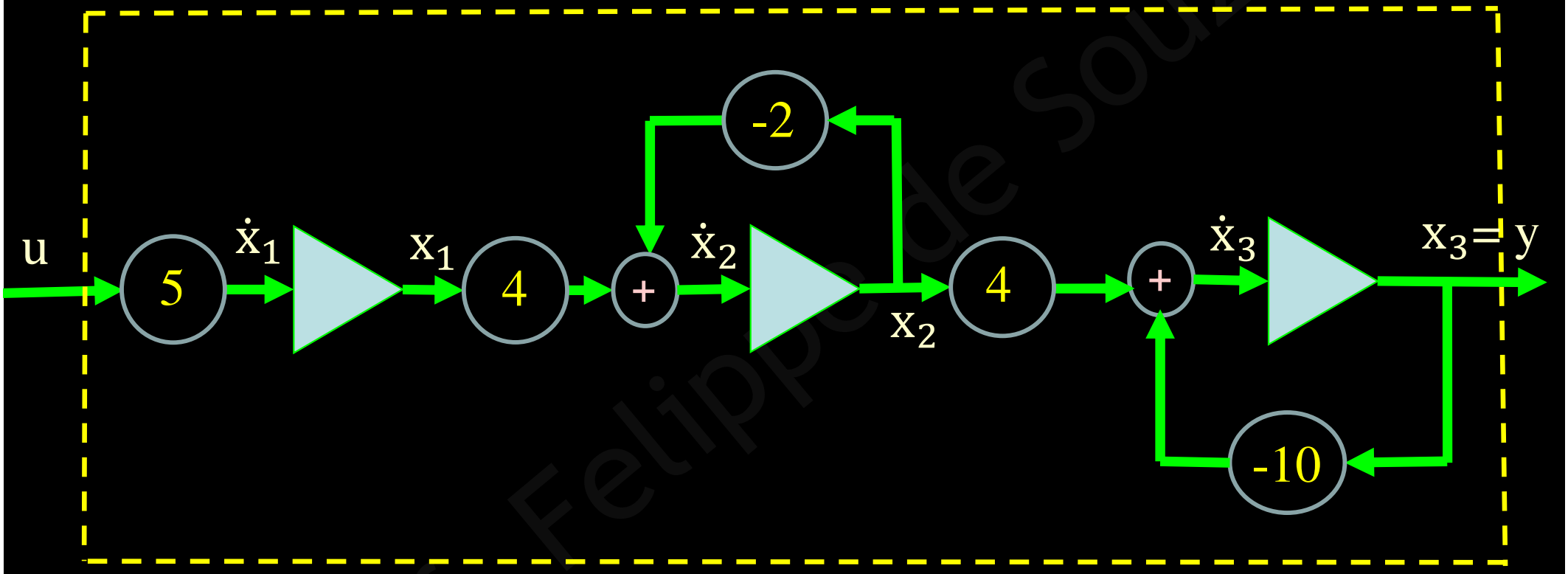
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5u \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_3 = 4x_2 - 10x_3 \\ y = x_3 \end{cases}$$



Prof. Felipe

Exemplo 23 (continuação):

Novamente, colocando uma caixa abrangendo a simulação analógica feita



então observa-se que nesta caixa entra apenas a *entrada* u (*input* do *sistema*) e sai apenas a *saída* y (*output* do *sistema*).

O que fica dentro da caixa é a *representação interna* do *sistema*, através das *variáveis de estado* x_1 , x_2 e x_3

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 24:

Vamos considerar novamente o mesmo sistema A dos 2 exemplos anteriores.

Entretanto aqui vamos reescrever a *função de transferência* $G(s)$ dada em (3) expandindo em *frações parciais* e definindo as *variáveis de estado* $X_1(s)$, $X_2(s)$ e $X_3(s)$ da forma indicada abaixo:

$$G(s) = \underbrace{\frac{4}{s}}_{\frac{X_1(s)}{U(s)}} + \underbrace{\frac{-5}{(s+2)}}_{\frac{X_2(s)}{U(s)}} + \underbrace{\frac{1}{(s+10)}}_{\frac{X_3(s)}{U(s)}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 24 (continuação):

temos então que

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{4U(s)}{s} \\ X_2(s) = \dfrac{-5U(s)}{(s+2)} \\ X_3(s) = \dfrac{U(s)}{(s+10)} \\ Y(s) = \left[\dfrac{X_1(s)}{U(s)} + \dfrac{X_2(s)}{U(s)} + \dfrac{X_3(s)}{U(s)}\right] U(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sX_1(s) = 4U(s) \\ sX_2(s) = -2X_2(s) - 5U(s) \\ sX_3(s) = -10X_3(s) + U(s) \\ Y(s) = X_1(s) + X_2(s) + X_3(s) \end{cases}$$

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 24 (continuação):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - 5u \\ \dot{x}_3 = -10x_3 + u \\ y = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

Portanto obtemos uma terceira representação em *equações de estado* para este mesmo sistema A, diferente das anteriores.

Escrevendo na forma matricial

$$\begin{cases} \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x \end{cases}$$

D = 0

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 24 (continuação):

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x \end{cases}$$

$D = 0$

Note que nesta *representação* a *matriz* A está na forma diagonal e os *polos* do sistema ($s = 0$, $s = -2$ e $s = -10$) são os elementos da *diagonal principal*.

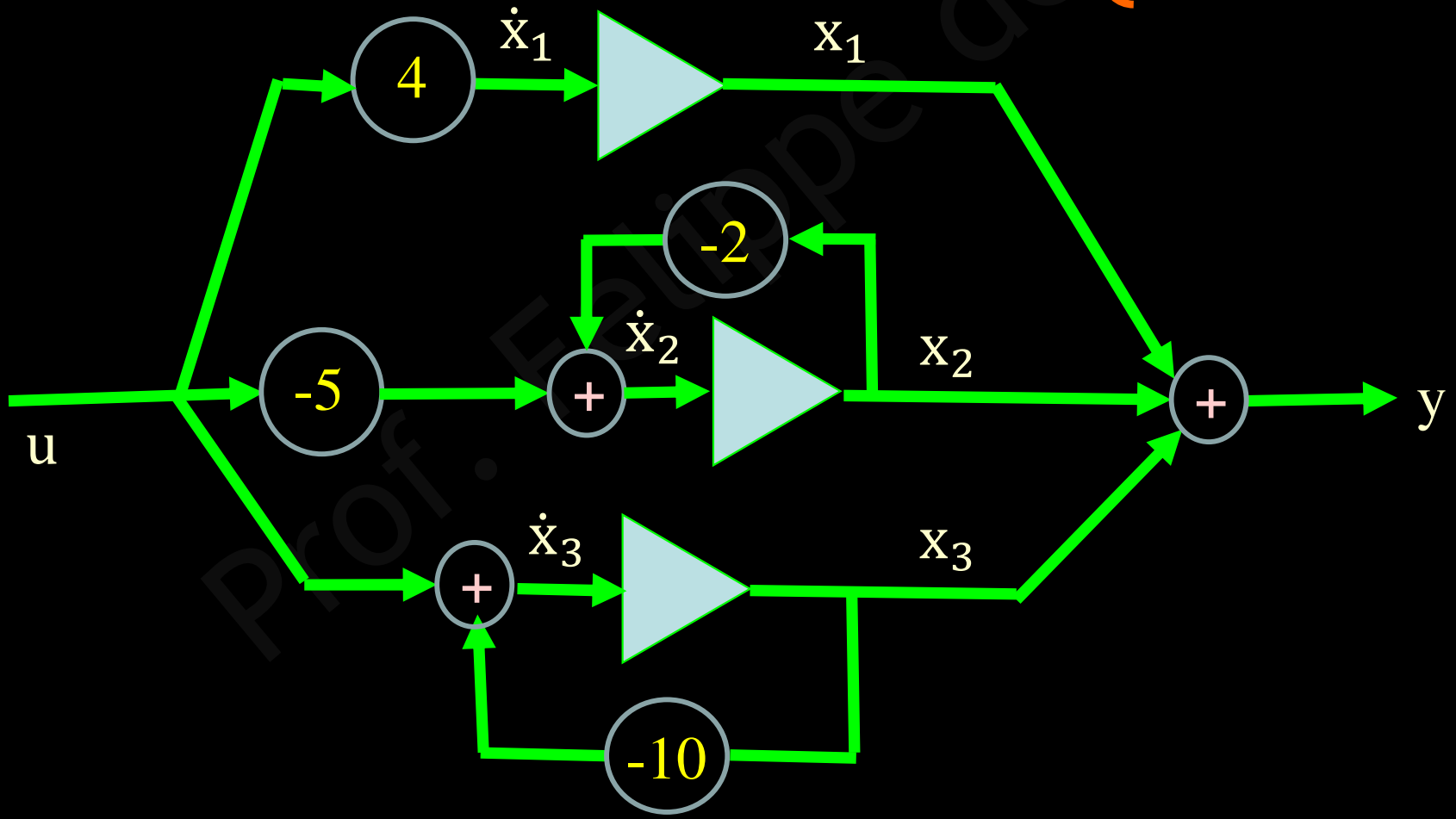
Obviamente que isso ocorre pois: se a *matriz* A é diagonal, então os *elementos* da sua *diagonal principal* são os próprios *autovalores* do sistema.

Prof. Felippe de Souza

Exemplo 25:

Vamos agora fazer uma *simulação analógica* deste sistema A utilizando a *equação de estado* obtida no exemplo anterior.

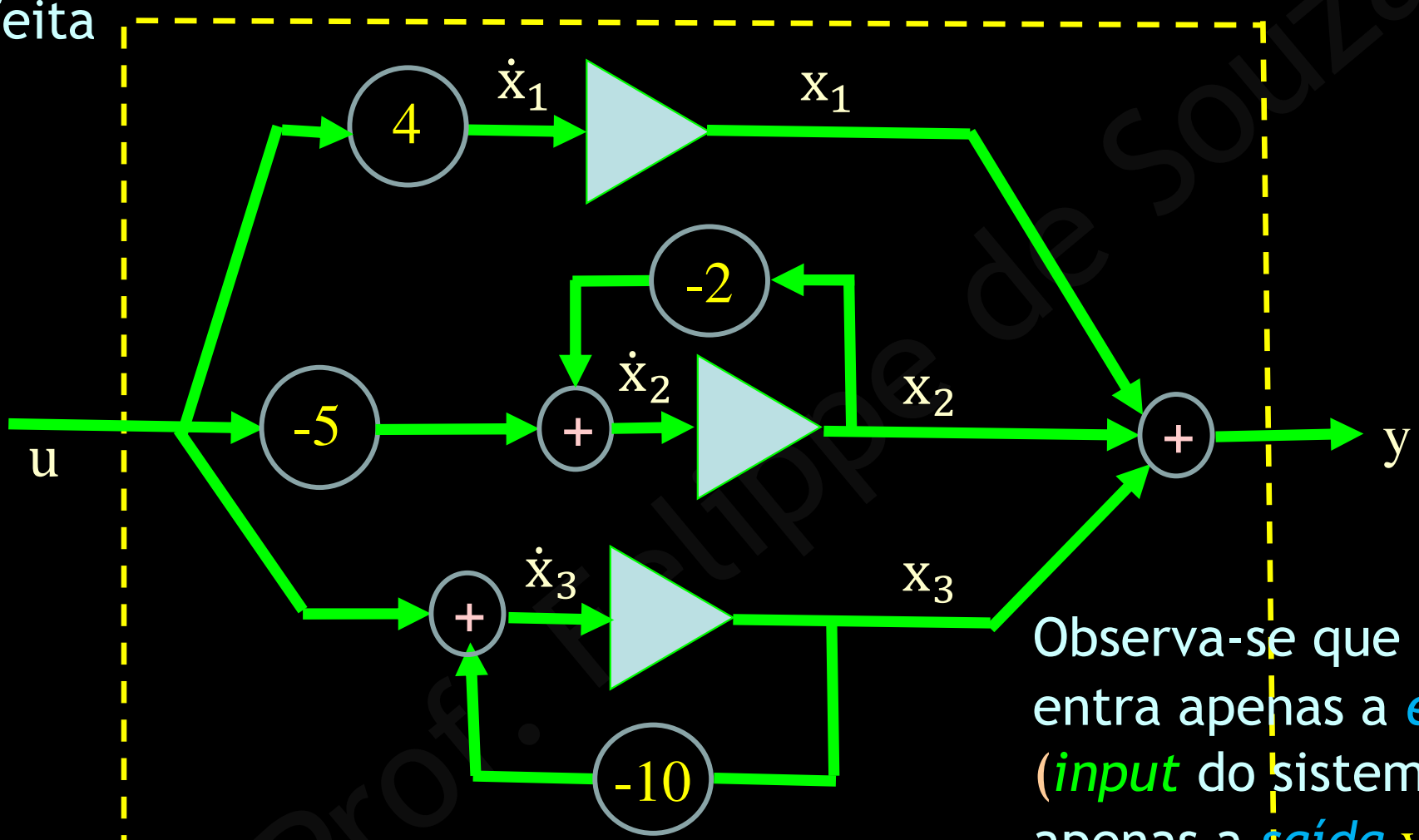
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - 5u \\ \dot{x}_3 = -10x_3 + u \\ y = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$



Prof. Felippe de Souza

Exemplo 25 (continuação):

Mais uma vez, colocando uma caixa abrangendo a simulação analógica feita



Observa-se que nesta caixa entra apenas a *entrada* u (*input* do sistema) e sai apenas a *saída* y (*output* do sistema).

O que fica dentro da caixa é a *representação interna* do *sistema*, através das *variáveis de estado* x_1 , x_2 e x_3.

Prof. Filipe de Souza

Equações de Estado

Nos exemplos anteriores obtivemos 3 *representações* diferentes para o mesmo *sistema* em *equações de estado*

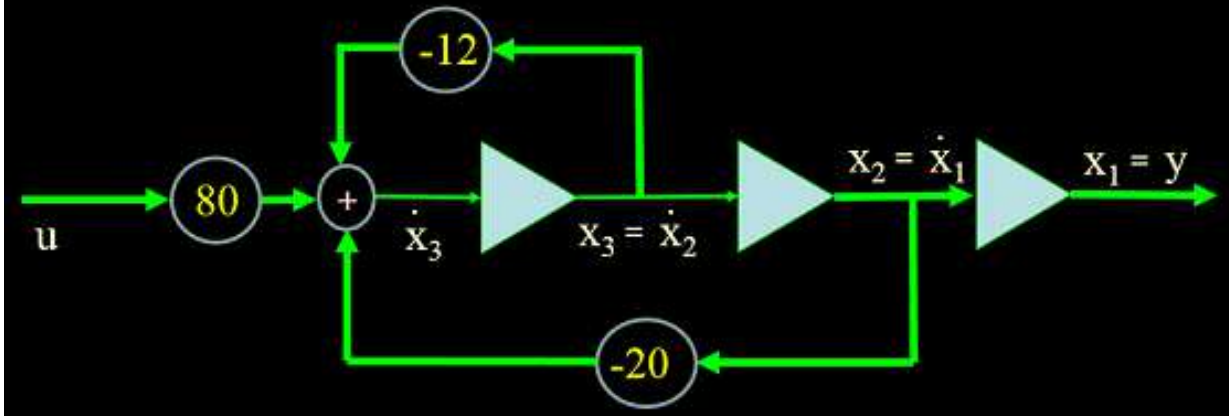
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -20x_2 - 12x_3 + 80u \\ y = x_1 \end{cases}$$

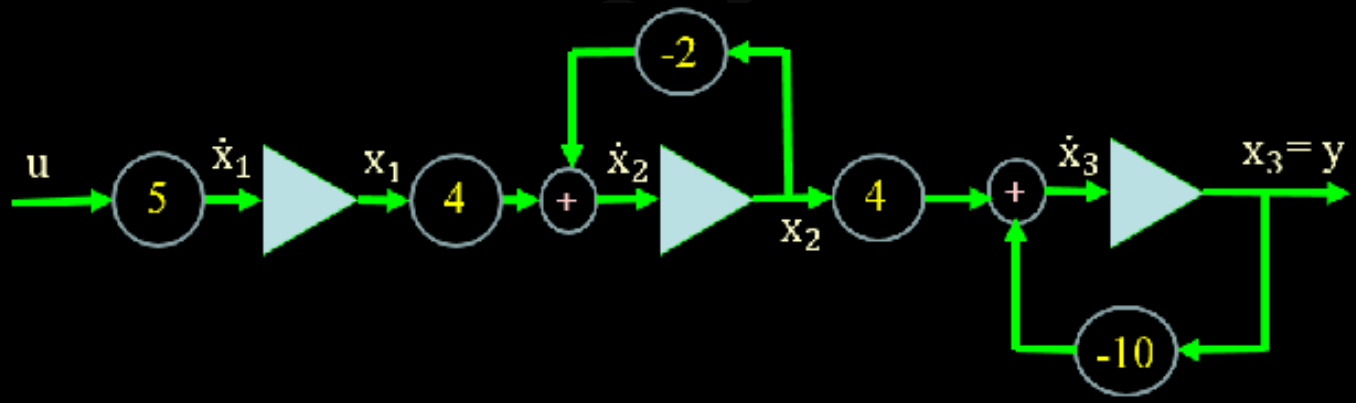
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5u \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_3 = 4x_2 - 10x_3 \\ y = x_3 \end{cases}$$

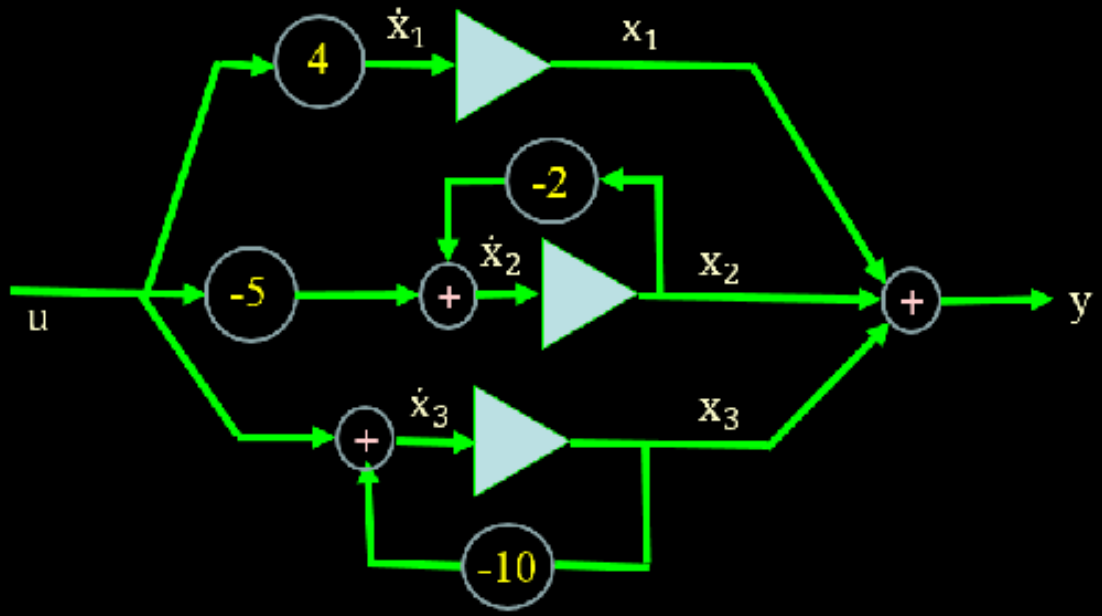
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - 5u \\ \dot{x}_3 = -10x_3 + u \\ y = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

Equações de Estado

assim como obtivemos *3 simulações analógicas* diferentes para o mesmo *sistema*







Equações de Estado

Conforme já vimos na seções
"*Representações Equivalentes*",
a representação de um sistema em *equações de estado*
não é única!

Se a *variável de estado* é $x(t)$, então para cada matriz P *inversível*, obtém-se uma nova *variável de estado*

$$\bar{x}(t) = P\,x(t)$$

e desta forma, uma nova *representação* do *sistema* em *equação de estados*

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\,\bar{x} + \bar{B}\,u \\ y = \bar{C}\,\bar{x} + \bar{D}\,u \end{cases}$$

Prof. Felippe de Souza

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Thank you!
Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt

Prof. Felippe de Souza