

Controlo de Sistemas

8

“Equações de Estado”
(*State equations*)

parte I

J. A. M. Felippe de Souza

Equações de Estado



Já vimos no capítulo 4 (“*Representação de Sistemas*”) uma forma de representar sistemas *lineares e invariantes no tempo* (SLIT) através de uma *função de transferência* que relaciona diretamente a *entrada* (*input*) com a *saída* (*output*).

Aqui veremos uma outra forma de representar sistemas com o uso de *variáveis internas* ao sistema (*variáveis de estado*).

Com as *variáveis de estado* se constrói um sistema de *equações diferenciais* de 1ª ordem que são chamadas de “*equações de estado*”

Equações de Estado

A representação de um sistema em equações de estado considera variáveis internas (*variáveis de estado*)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

← “variáveis de estado”

chamadas de o “estado”.

Normalmente o “vetor estado” $\mathbf{x}$ terá n componentes, sendo n a ordem do sistema

(A dimensão do vetor estado $\mathbf{x}$ poderá eventualmente ser maior que ordem do sistema, mas neste caso haverá equações redundantes).

Equações de Estado

Para sistemas *lineares e invariantes no tempo (SLIT)* de ordem n , as *equações de estado* têm a forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x + D u \end{cases}$$

onde:

A é uma matriz $n \times n$

B é uma matriz $n \times p$

C é uma matriz $q \times n$

D é uma matriz $q \times p$

sendo:

p = número de **entradas**

q = número de **saídas**

$\dot{x}$ = vetor **derivada** de x

$\dot{\mathbf{x}}$ = vetor derivada de $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

Equações de Estado

No caso de sistemas com apenas uma entrada $u(t)$, i.e., $p = 1$, temos que:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou seja, neste caso

B é um *vetor coluna*.

No caso de sistemas com apenas uma saída $y(t)$, i.e., $q = 1$, temos que:

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]$$

C é um *vetor linha*.

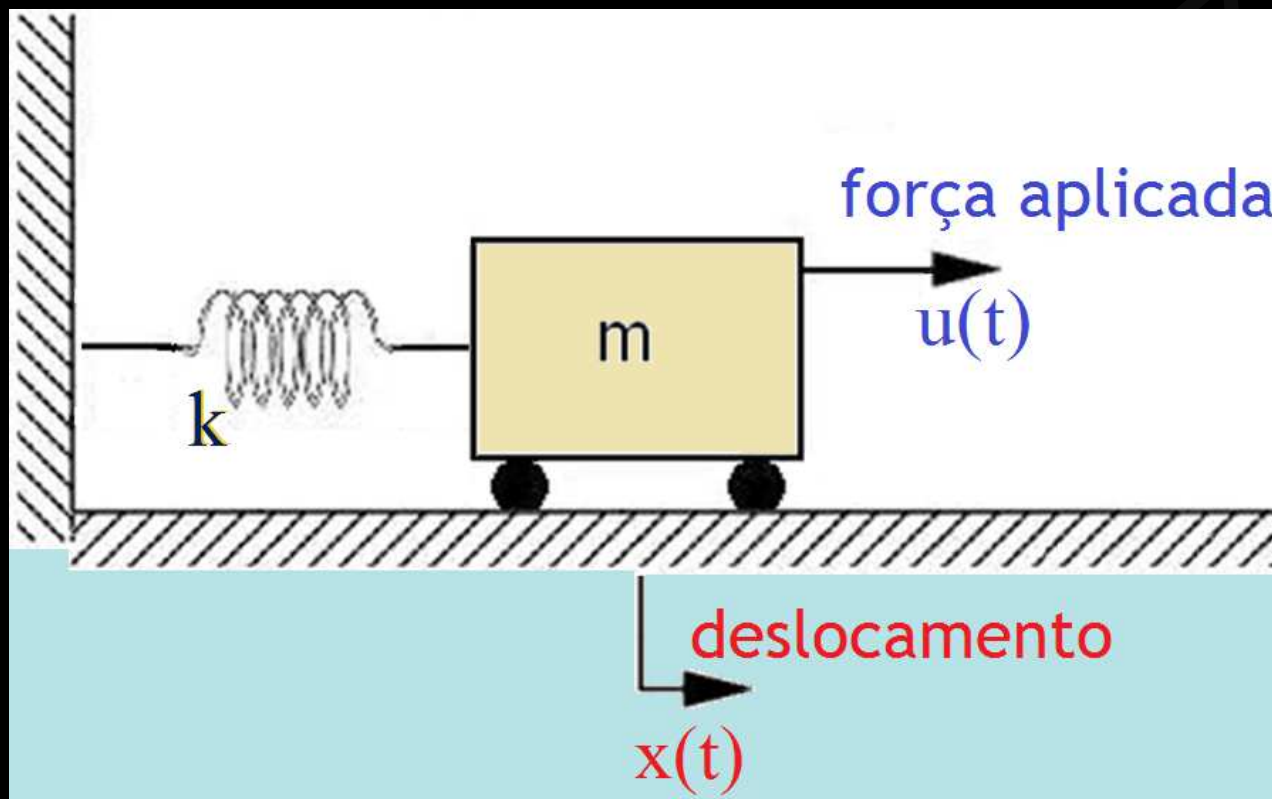
No caso de sistemas com apenas uma entrada $u(t)$ e uma saída $y(t)$,

$$D = [d_1]$$

D é uma *constante* d_1 (ou seja, D é uma matriz 1×1).

Exemplo 1:

Sistema *carro-massa-mola*



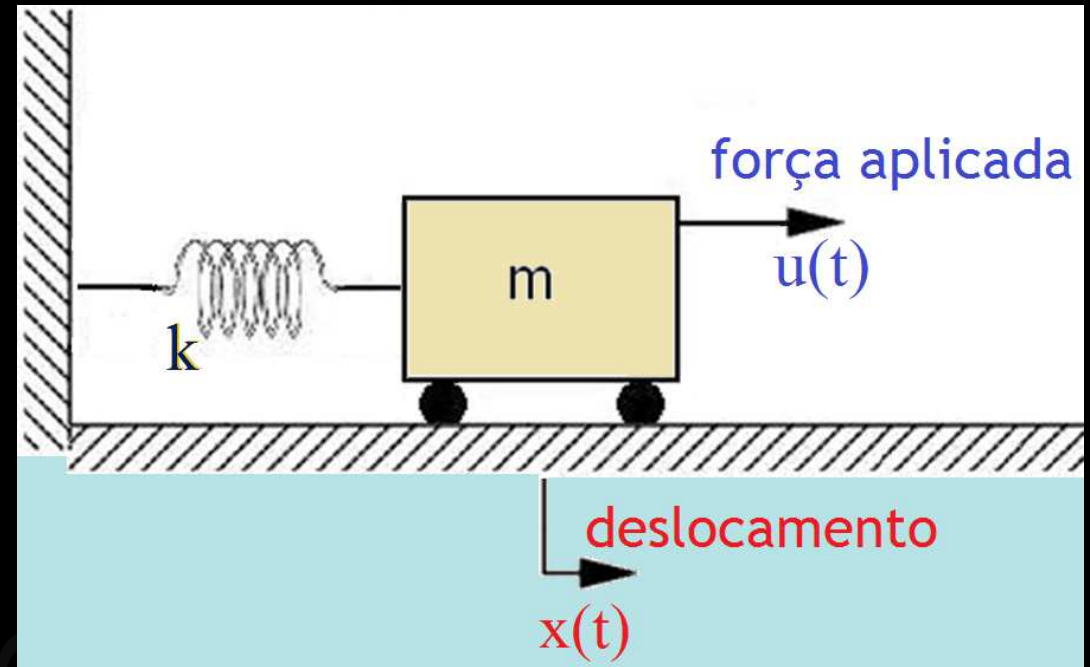
A *equação diferencial ordinária* (EDO) que descreve este sistema, conforme já visto no capítulo 3 (“*Modelização de Sistemas*”) é dada por:

$$my'' + \mu y' + ky = u$$

Exemplo 1 (continuação):

Definirmos a variável de estado

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



onde:

$x_1(t) = y(t) =$ *posição do carro* no instante t

$x_2(t) = y'(t) =$ *velocidade do carro* no instante t

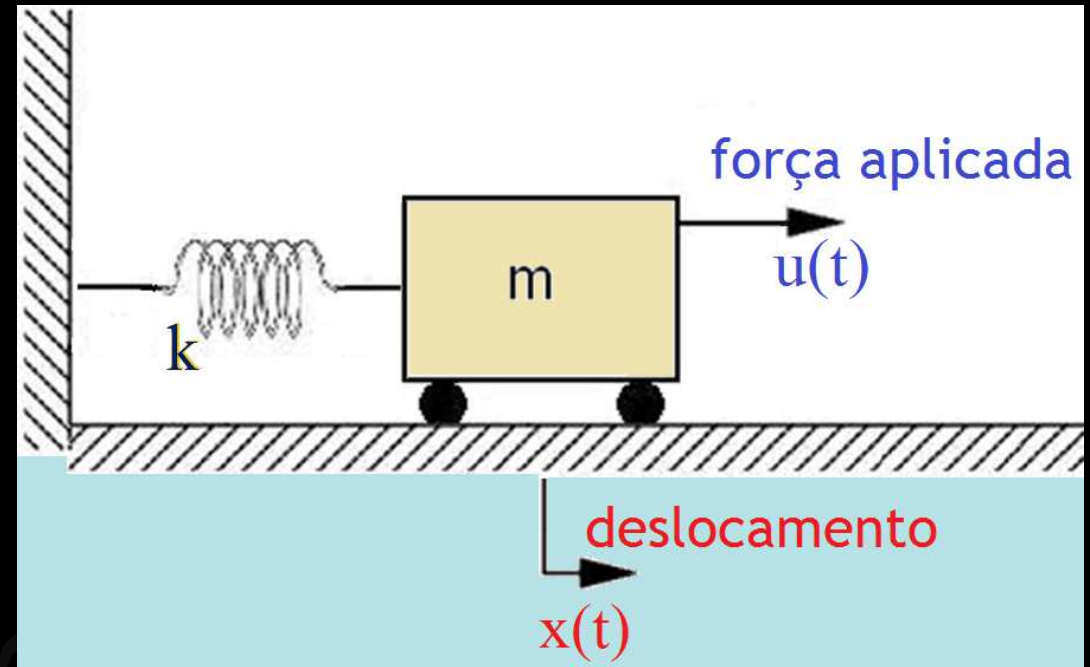
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

representa o *estado interno do sistema*.

Exemplo 1 (continuação):

Por exemplo, se

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$



então isso significa que no instante $t = 0$

o “*estado*” do sistema é: o carro passa pela origem
(ou seja, $x_1(0) = 0$)

com velocidade -3m/s ,

(ou seja, 3m/s para trás, $x_2(0) = -3$).

Exemplo 1 (continuação):

Logo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y' = x_2 \\ \dot{x}_2 = y'' = -\frac{k}{m}y - \frac{\mu}{m}y' + \frac{1}{m}u \end{cases}$$

e como $x_1 = y$ e $x_2 = y'$ então:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\mu}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Exemplo 1 (continuação):

portanto:

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\mu/m \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}_B u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x \end{cases}$$

$D = 0$

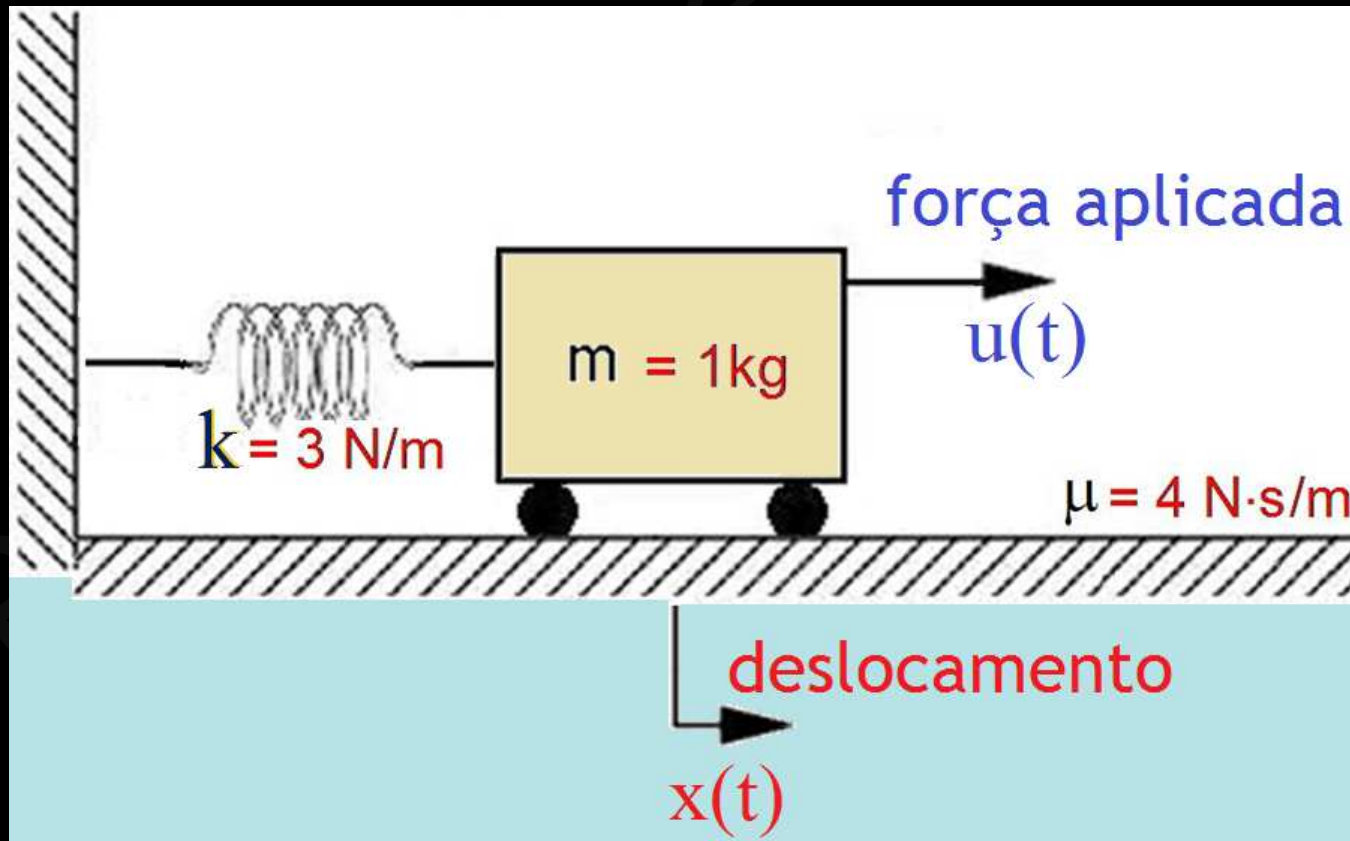
que é a *representação* deste sistema
em *equações de estado*.

Note que neste caso $D = 0$.

Exemplo 2:

Sistema *carro-massa-mola* do exemplo anterior com

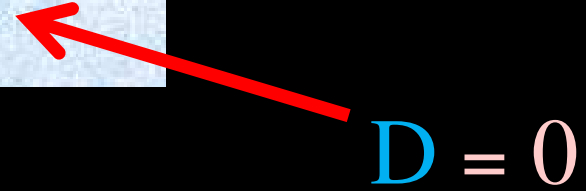
$$\begin{cases} m = 1 \\ \mu = 4 \\ k = 3 \end{cases}$$



Equações de Estado

Exemplo 2 (continuação):

então:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \end{cases}$$


$$\mathbf{D} = 0$$

e portanto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3:

Considere o sistema descrito por:

$$y''' + 4y'' + 5y' = 3u$$

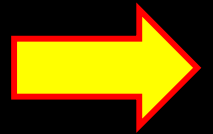
cuja *função de transferência* é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{3}{s \cdot (s^2 + 4s + 5)} \\ &= \frac{3}{s^3 + 4s^2 + 5s}\end{aligned}$$

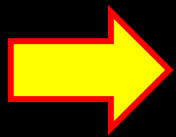
Exemplo 3 (continuação):

Definindo-se
as *variáveis
de estado*
como:

$$\begin{cases} X_1(s) = Y(s) = \frac{3 \cdot U(s)}{s^3 + 4s^2 + 5s} \\ X_2(s) = s \cdot Y(s) \\ X_3(s) = s^2 \cdot Y(s) \end{cases}$$



$sX_2(s)$

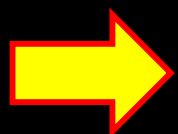


$$\begin{cases} s \cdot X_1(s) = X_2(s) \\ s^2 \cdot X_1(s) = X_3(s) \\ s^3 \cdot X_1(s) + 4s^2 \cdot X_1(s) + 5s \cdot X_1(s) = 3 \cdot U(s) \end{cases}$$

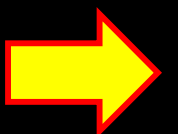
$sX_3(s)$

Exemplo 3 (continuação):

logo:

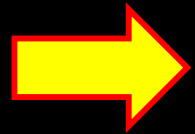


$$\left\{ \begin{array}{l} s \cdot X_1(s) = X_2(s) \\ s \cdot X_2(s) = X_3(s) \\ s \cdot X_3(s) + 4 \underbrace{s^2 \cdot X_1(s)}_{X_3(s)} + 5 \underbrace{s \cdot X_1(s)}_{X_2(s)} = 3 \cdot U(s) \end{array} \right.$$

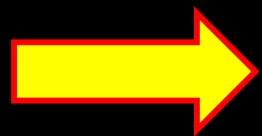


$$\left\{ \begin{array}{l} s \cdot X_1(s) = X_2(s) \\ s \cdot X_2(s) = X_3(s) \\ s \cdot X_3(s) + 5 \cdot X_2(s) + 4 \cdot X_3(s) = 3 \cdot U(s) \\ Y(s) = X_1(s) \end{array} \right.$$

Exemplo 3 (continuação):



$$\begin{cases} s \cdot X_1(s) = X_2(s) \\ s \cdot X_2(s) = X_3(s) \\ s \cdot X_3(s) = -5 \cdot X_2(s) - 4 \cdot X_3(s) + 3 \cdot U(s) \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = 0$$

Exemplo 3 (continuação):
e portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz A é dita estar na “*forma companheira*”

isto porque:

- os elementos *acima da diagonal principal* são = 1;
- a última linha contém os *coeficientes da equação característica* na *ordem inversa* e com *sinais trocados*;
- os demais elementos da matriz são todos = 0.

Equações de Estado

No caso geral, uma matriz A na “*forma companheira*” tem o seguinte aspecto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \left(\frac{-a_n}{a_o} \right) & \left(\frac{-a_{n-1}}{a_o} \right) & \left(\frac{-a_{n-2}}{a_o} \right) & \left(\frac{-a_{n-3}}{a_o} \right) & \dots & \left(\frac{-a_1}{a_o} \right) \end{bmatrix}$$

onde $a_o, a_1, \dots, a_{n-1}$ e a_n são os *coeficientes* da *equação característica* $p(s)$:

$$p(s) = a_o s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

Observe que as matrizes A dos 2 exemplos anteriores também estão na “*forma companheira*”.

Equações de Estado

No caso particular, mas bastante comum, de $a_0 = 1$, a matriz A na “*forma companheira*” tem o seguinte aspecto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

onde $a_1, \dots, a_{n-1}$ e a_n são os *coeficientes da equação característica* $p(s)$:

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

Equações de Estado

Se $p = q = 1$ (i.e., 1 entrada e 1 saída) e $m = \text{grau do numerador da função de transferência}$ é menor que o grau do polinômio característico (i.e., $m < n$), então dizemos que o sistema está na “*forma companheira*” quando

além da matriz A estar na “*forma companheira*” temos as matrizes B , C e D nas formas:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [\beta_n \quad \beta_{n-1} \quad \dots \quad \beta_1]$$

$$D = [0]$$

onde $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ e β_n , são os *coeficientes* do *numerador da função de transferência*, $q(s)$:

$$q(s) = \beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n$$

Equações de Estado

Já no caso de $p = q = 1$ (i.e., 1 entrada e 1 saída) e $m = \text{grau do numerador da função de transferência}$ é igual que o grau do *polinómio característico* (i.e., $m = n$), então do *numerador da função de transferência*, $q(s)$ é dado por:

$$q(s) = \beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n$$

e dizemos que o sistema está na “*forma companheira*” quando além da matriz A estar na “*forma companheira*”, temos as matrizes B , C e D nas formas:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [c_n \quad c_{n-1} \quad \dots \quad c_1] \quad D = [d_1]$$

onde $d_1 = \beta_0/a_0$
e $c_1, \dots, c_{n-1}$ e c_n , são os *coeficientes* do *polinómio*, $r(s)$, o resto da divisão $q(s)/p(s)$

$$r(s) = c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \dots + c_{n-1} s + c_n$$

Exemplo 4:

Se a *equação diferencial ordinária* (EDO) também tivesse derivadas de u , a escolha acima não seria apropriada.

Considere o sistema descrito por:

$$y'' + 2y' + 2y = u' + 2u$$

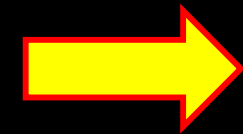
Aqui a *função de transferência* do sistema é:

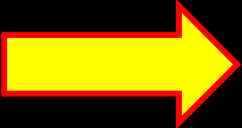
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

Exemplo 4 (continuação):

Define-se neste caso as seguintes *variáveis de estado*:

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{U(s)}{s^2 + 2s + 2} \\ X_2(s) = \frac{s \cdot U(s)}{s^2 + 2s + 2} \end{cases}$$



A large yellow arrow with a red outline pointing to the right, indicating a transition from the state variable definitions to the state equations.
$$\begin{cases} s \cdot X_1(s) = X_2(s) \\ s^2 \cdot X_1(s) + 2s \cdot X_1(s) + 2 \cdot X_1(s) = U(s) \end{cases}$$

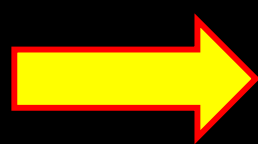
$sX_2(s)$

$X_2(s)$

Exemplo 4 (continuação):

logo:

$$\begin{cases} s \cdot X_1(s) = X_2(s) \\ s \cdot X_2(s) = -2 \cdot X_1(s) - 2 \cdot X_2(s) + U(s) \\ Y(s) = 2 \cdot X_1(s) + X_2(s) \end{cases}$$


$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \end{cases}$$

$\mathbf{D} = 0$

Exemplo 4 (continuação):

e portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [2 \quad 1]$$

$$D = [0]$$

Observe que a *matriz* A deste exemplo está na *forma companheira* novamente, pois a *equação característica* do sistema é:

$$p(s) = s^2 + 2s + 2$$

Exemplo 5:

Considere o sistema cuja *função de transferência* é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^2 + 4s - 2}$$

Neste caso o sistema é de *segunda ordem*, logo tem 2 polos

Mas como o numerador da *função de transferência* tem o mesmo grau que o denominador, o sistema também tem 2 zeros

Exemplo 5 (continuação):

Primeiramente, dividindo-se o *numerador* pelo *denominador*:

$$\begin{array}{r} 2s^2 + 7s + 3 \\ -2s^2 - 8s + 4 \\ \hline -s + 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} s^2 + 4s - 2 \\ 2 \end{array}$$

Obtemos o *quociente* 2 e o *resto* $(-s+7)$. Logo,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^2 + 4s - 2} = 2 + \frac{-s + 7}{s^2 + 4s - 2}$$

Exemplo 5 (continuação):

ou seja,

$$Y(s) = \frac{(-s + 7) \cdot U(s)}{s^2 + 4s - 2} + 2 \cdot U(s)$$

Agora definindo as *variáveis de estado*

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{U(s)}{s^2 + 4s - 2} \\ X_2(s) = \frac{s \cdot U(s)}{s^2 + 4s - 2} \end{cases}$$

Exemplo 5 (continuação):

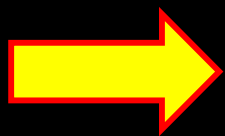
temos que:

$$\begin{cases} s \cdot X_1(s) = \frac{s \cdot U(s)}{s^2 + 4s - 2} = X_2(s) \\ s^2 \cdot X_1(s) + 4s \cdot X_1(s) - 2X_1(s) = U(s) \end{cases}$$


$$s \cdot X_2(s)$$


$$X_2(s)$$

logo:



$$\begin{cases} s \cdot X_1(s) = X_2(s) \\ s \cdot X_2(s) = 2X_1(s) - 4X_2(s) + U(s) \end{cases}$$

Exemplo 5 (continuação):

e observe que a *saída* $y(t)$:

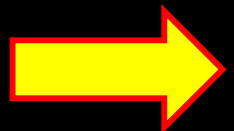
$$Y(s) = \frac{(-s + 7) \cdot U(s)}{s^2 + 4s - 2} + 2 \cdot U(s)$$

pode ser reescrita como:

$$Y(s) = 7 \cdot \frac{U(s)}{2s^2 + 4s - 2} - \frac{s \cdot U(s)}{2s^2 + 4s - 2} + 2 \cdot U(s)$$

$X_1(s)$

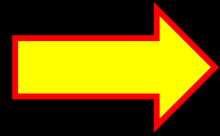
$X_2(s)$



$$Y(s) = 7 \cdot X_1(s) - X_2(s) + 2 \cdot U(s)$$

Exemplo 5 (continuação):

logo:



$$\begin{cases} s \cdot X_1(s) = X_2(s) \\ s \cdot X_2(s) = 2 \cdot X_1(s) - 4 \cdot X_2(s) + U(s) \\ Y(s) = 7 \cdot X_1(s) - X_2(s) + 2 \cdot U(s) \end{cases}$$

e assim temos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2 + u \\ y = 7x_1 - x_2 + 2u \end{cases}$$

Exemplo 5 (continuação):

então:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} + \underbrace{2}_{\mathbf{D}} u \end{cases}$$

e portanto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz $\mathbf{A}$ aqui neste exemplo também está na *forma companheira*

a *equação característica* e
os *polos* do sistema

A equação característica e os polos do sistema

Um sistema descrito na forma de equação de estados

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x + D u \end{cases}$$

tem o seu polinómio característico dado por:

$$p(s) = \det \{ [sI - A] \}$$

Os *polos* do sistema são os “autovalores” (ou “valores próprios”) de A , podendo ser *repetidos*, i.e., *duplos*, *triplos*, etc.

Como é sabido, os autovalores de A são as *raízes* do *polinómio característico*

$$p(s) = \det [s \cdot I - A]$$

Exemplo 6:

Para o sistema do *exemplo 1* a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(-\frac{k}{m}\right) & \left(-\frac{\mu}{m}\right) \end{bmatrix}$$

logo, o *polinómio característico* $p(s) = \det [s \cdot I - A]$

$$p(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ (k/m) & (s + \mu/m) \end{bmatrix}$$

e portanto:

$$p(s) = s^2 + \frac{\mu}{m}s + \frac{k}{m}$$

Exemplo 7:

Para o sistema do *exemplo 2* a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

logo, o *polinómio característico* $p(s) = \det [s \cdot I - A]$

$$p(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & (s + 4) \end{bmatrix}$$

e portanto:

$$p(s) = s^2 + 4s + 3$$

e os *polos* do sistema são as raízes de $p(s)$:

$$s = -1 \quad \text{e} \quad s = -3$$

Exemplo 8:

Para o sistema do *exemplo 3* a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

logo, o *polinómio característico* $p(s) = \det [sI - A]$

$$p(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 5 & (s + 4) \end{bmatrix}$$

Exemplo 8 (continuação):

e portanto:

$$p(s) = s^3 + 4s^2 + 5s$$

e os *polos* do sistema são as raízes de $p(s)$:

$$s = 0, \quad s = -2 + j \quad \text{e} \quad s = -2 - j$$

Exemplo 9:

Para o sistema do *exemplo 4* a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

logo, o *polinómio característico* $p(s) = \det [s \cdot I - A]$

$$p(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & (s + 2) \end{bmatrix}$$

e portanto:

$$p(s) = s^2 + 2s + 2$$

e os *polos* do sistema são as *raízes de* $p(s)$:

$$s = -1 + j \quad \text{e} \quad s = -1 - j$$

Exemplo 10:

Para o sistema do *exemplo 5* a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

logo, o *polinómio característico* $p(s) = \det [s \cdot I - A]$

$$p(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 & (s + 4) \end{bmatrix}$$

e portanto:

$$p(s) = s^2 + 4s - 2$$

e os *polos* do sistema são as *raízes* de $p(s)$:

$$s = 0,45 \quad \text{e} \quad s = -4,45$$

representações equivalentes

Representações Equivalentes

Considere um sistema descrito na forma de *equação de estados*

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x + D u \end{cases}$$

cuja *variável de estado* é $x(t)$.

Definindo-se agora uma nova *variável de estado* $\bar{x}$ como:

$$\bar{x} = P x \quad \text{sendo } P \text{ inversível.}$$

Logo, como:

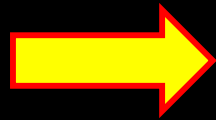
$$\dot{\bar{x}} = P \dot{x}$$

temos que:

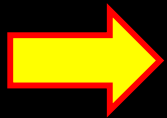
$$\begin{cases} x = P^{-1} \bar{x} \\ \dot{x} = P^{-1} \dot{\bar{x}} \end{cases}$$

Equações de Estado

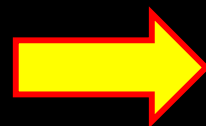
e substituindo na *equação de estados* obtém-se:



$$\begin{cases} P^{-1} \dot{\bar{x}} = A P^{-1} \bar{x} + B u \\ y = C P^{-1} \bar{x} + D u \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \overbrace{P A P^{-1}}^{\bar{A}} \bar{x} + \overbrace{P B}^{\bar{B}} u \\ y = \underbrace{C P^{-1}}_{\bar{C}} \bar{x} + \underbrace{D}_{\bar{D}} u \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u \\ y = \bar{C} \bar{x} + \bar{D} u \end{cases}$$

Equações de Estado

ou seja:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u \\ y = \bar{C} \bar{x} + \bar{D} u \end{cases}$$

é uma outra
representação
do mesmo
sistema em
equações de
estado

onde:

$$\bar{A} = P A P^{-1}$$

$$\bar{B} = P B$$

$$\bar{C} = C P^{-1}$$

$$\bar{D} = D$$

Note que a *entrada* u e a *saída* y não se alteraram. Somente a *representação interna* do sistema (as *variáveis de estado*)

Exemplo 11:

Considere um sistema de 2ª ordem do exemplo 4, cujas equações de estado são:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

a variável de estado original é:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Escolhendo-se

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 11 (continuação):

teremos que

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}$$

ou seja,

a nova variável de estado $\bar{\mathbf{x}}$ é a antiga variável de estado $\mathbf{x}$ com a ordem das componentes trocadas

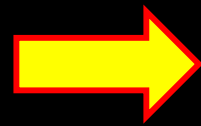
$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} = 0$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 11 (continuação):



$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \overbrace{\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\mathbf{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{B}}} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Observe que a *matriz* $\mathbf{P}$ deste exemplo é igual a própria inversa:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note também que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \Rightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2$$

mas $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$, logo,

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$$

Estas matrizes são chamadas de idempotentes

Exemplo 12: Considere agora o *sistema de 3ª ordem* do **exemplo 3** acima:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{D} = 0$$

Para que a nova *variável de estado* $\bar{\mathbf{x}}$ seja igual à antiga $\mathbf{x}$ apenas trocando a terceira componente x_3 pelo dobro:
 $\bar{x}_3 = 2 x_3$, a escolha de $\mathbf{P}$ deve ser:

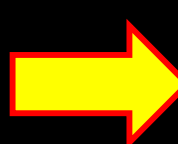
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 12 (continuação):
e desta forma temos que

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P} \mathbf{x}(t) =$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 2x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$



$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & -10 & -4 \end{bmatrix}$$

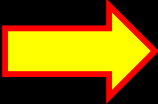
$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} = 0$$

Exemplo 12 (continuação):

logo, as equações de estado abaixo são uma representação diferente do mesmo sistema


$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & -10 & -4 \end{bmatrix}}^{\bar{A}} \bar{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \bar{x} \end{cases}$$

$\bar{D} = 0$

conversão de equação de estado
para
função de transferência

Conversão de Equação de Estado para Função de Transferência

Para se converter a representação de um sistema de *equações de estado*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

para *função de transferência*, a fórmula é dada por,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Exemplo 13:

Considere o sistema de segunda ordem do exemplo 4 dado pela sua equação de estado

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \end{cases}$$

$\mathbf{D} = 0$

Para calcular a *função de transferência*, primeiramente achamos a matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s + 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 13 (continuação):
e a sua inversa $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2} \\ \frac{-2}{s^2+2s+2} & \frac{s}{s^2+2s+2} \end{bmatrix}$$

e portanto, como $D = 0$ neste caso, **F.T.** = $C(sI - A)^{-1}B$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \underbrace{[2 \quad 1]}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2} \\ \frac{-2}{s^2+2s+2} & \frac{s}{s^2+2s+2} \end{bmatrix}}_{(sI - A)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B$$

Exemplo 13 (continuação):

logo, a *função de transferência* do sistema é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

que está de acordo com o exemplo 4.

Observe, para se obter apenas a *equação característica* bastaria calcular:

$$\begin{aligned} p(s) &= \det [s \cdot I - A] = \\ &= s^2 + 2s + 2 \end{aligned}$$

conforme já vimos no exemplo 9

Exemplo 14:

Considere o sistema de *segunda ordem* do exemplo 5 dado pela sua *equação de estado*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} + \underbrace{[2]}_{\mathbf{D}} u \end{cases}$$

Para calcular a *função de transferência*, primeiramente achamos a matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 & s + 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 14 (continuação):

e a sua inversa $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s^2+4s-2} & \frac{1}{s^2+4s-2} \\ \frac{2}{s^2+4s-2} & \frac{s}{s^2+4s-2} \end{bmatrix}$$

e portanto, a *função de transferência*

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s+4}{s^2+4s-2} & \frac{1}{s^2+4s-2} \\ \frac{2}{s^2+4s-2} & \frac{s}{s^2+4s-2} \end{bmatrix}}_{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} + \underbrace{2}_{\mathbf{D}}$$

Exemplo 14 (continuação):

logo, a *função de transferência* do sistema é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^2 + 4s - 2}$$

que está de acordo com o exemplo 5.

Observe, para se obter apenas a *equação característica* bastaria calcular:

$$\begin{aligned} p(s) &= \det [s \cdot I - A] = \\ &= s^2 + 4s - 2 \end{aligned}$$

conforme já vimos no exemplo 10.

Exemplo 15:

Considere o sistema de *terceira ordem* do exemplo 3 dado pela sua *equação de estado*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \end{cases}$$

$\mathbf{D} = 0$

Para calcular a *função de transferência*, primeiramente achamos a matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 5 & s + 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 15 (continuação):

e a sua inversa $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} =$$

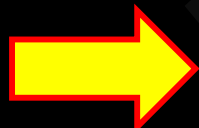
$$= \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 4s^2 + 5s} & \frac{s + 4}{s^3 + 4s^2 + 5s} & \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s} \\ 0 & \frac{s^2 + 4s}{s^3 + 4s^2 + 5s} & \frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s} \\ 0 & \frac{-5s}{s^3 + 4s^2 + 5s} & \frac{s^2}{s^3 + 4s^2 + 5s} \end{bmatrix}$$

Exemplo 15 (continuação):

e portanto, a *função de transferência* F.T. = $C (s I - A)^{-1} B$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \underbrace{[1 \quad 0 \quad 0]}_C \cdot \underbrace{(s I - A)^{-1}}_{(s I - A)^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_B$$

logo, a *função de transferência* do sistema é dada por:


$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^3 + 4s^2 + 5s}$$

que está de acordo com o exemplo 3.

Exemplo 15 (continuação):

Observe, para se obter apenas a *equação característica* bastaria calcular:

$$\begin{aligned} p(s) &= \det [s \cdot I - A] \\ &= s^3 + 4s^2 + 5s \\ &= s (s^2 + 4s + 5) \end{aligned}$$

conforme já vimos no exemplo 8.

continua
(*na próxima aula*)
parte II



Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Thank you!
Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt