Controlo de Sistemas

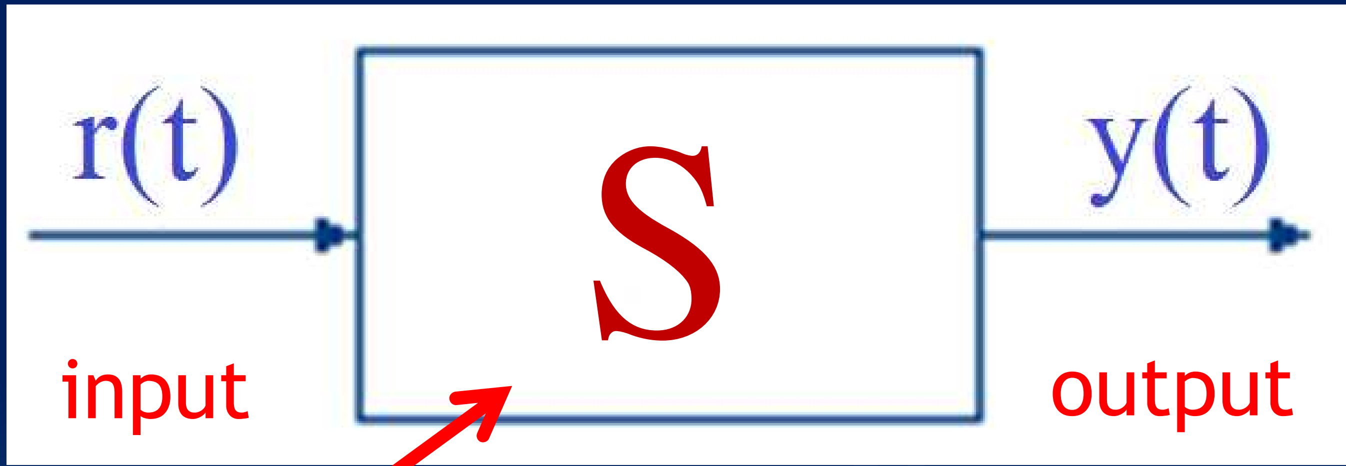
7

"Análise no domínio do tempo"

(*Time domain analysis*)

parte II - Sistemas de 2ª ordem

J. A. M. Felippe de Souza

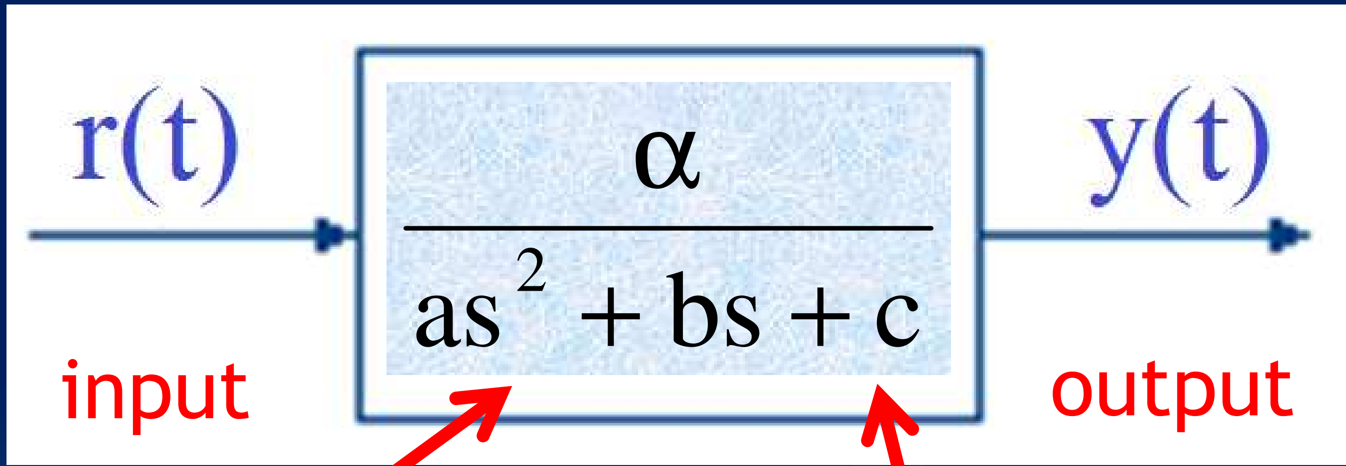


Sistema de segunda ordem

do tipo

$$G(s) = \frac{\alpha}{as^2 + bs + c}$$

Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem

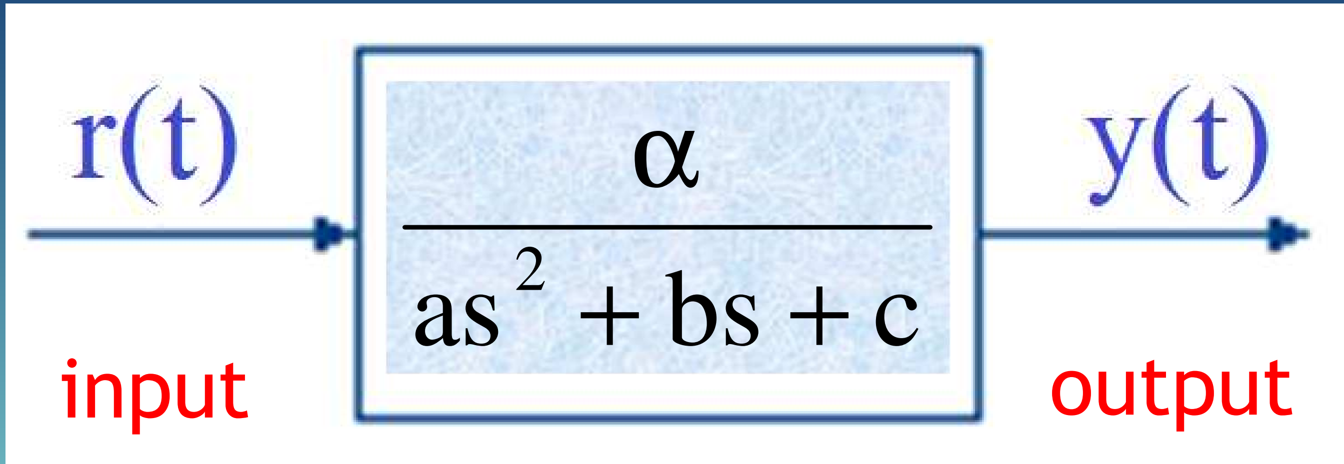


Sistema de segunda ordem

do tipo:

$$G(s) = \frac{\alpha}{as^2 + bs + c}$$

Sistemas de segunda ordem:



ou seja:

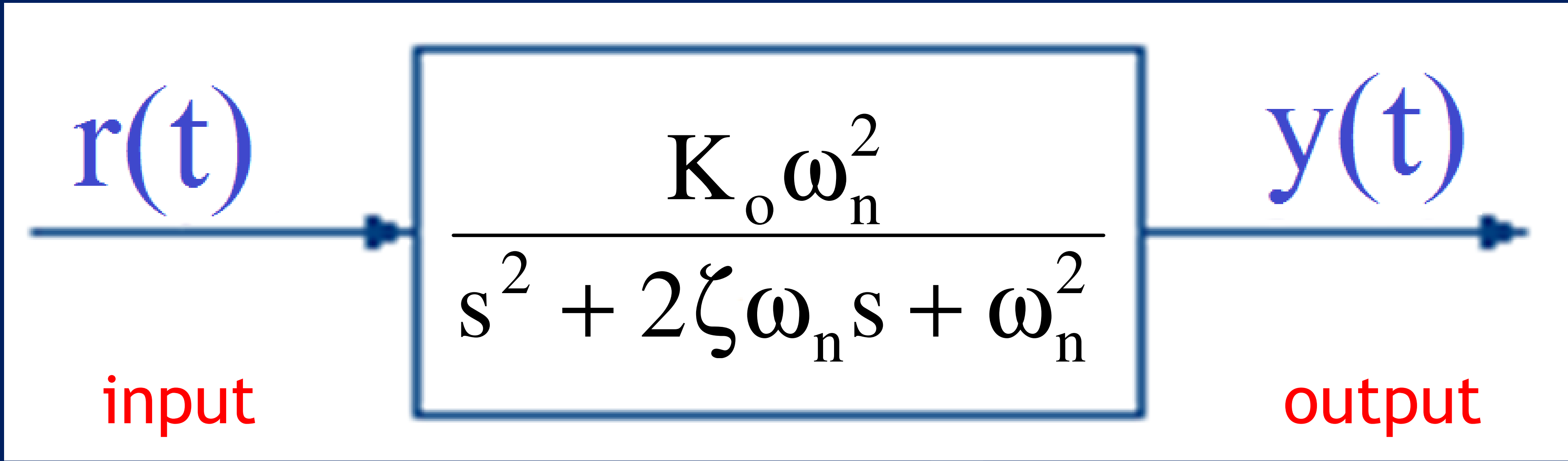
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha}{as^2 + bs + c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{\alpha}{a}}{s^2 + \frac{b}{a}s + \frac{c}{a}}$$

$\frac{\alpha}{a} \rightarrow K_o\omega_n^2$

$\frac{b}{a} \rightarrow 2\zeta\omega_n$

$\frac{c}{a} \rightarrow \omega_n^2$



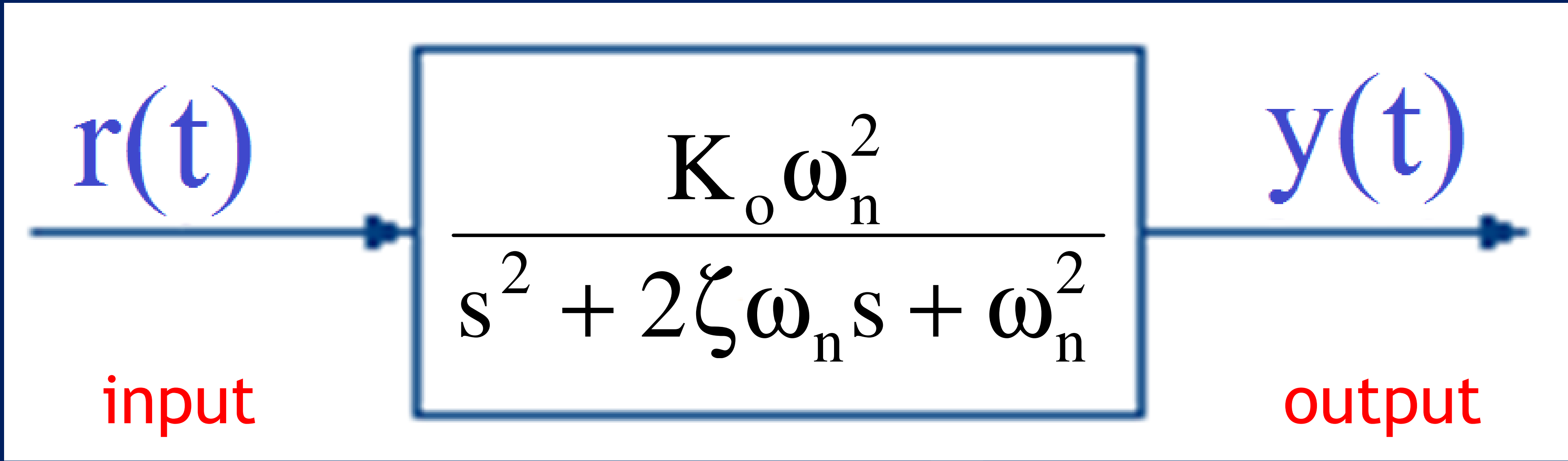
K_o = ganho do sistema

ζ = coeficiente de amortecimento

ω_n = frequência natural

a função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_o\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



K_o = ganho do sistema

ζ = coeficiente de amortecimento

ω_n = frequência natural

Além destes 3 parâmetros acima, temos também

ω_d = frequência natural amortecida

(*'damping frequency'*)

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \qquad 0 < \zeta \leq 1$$

Exemplo 1:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3}{4s^2 + 12s + 1}$$

pólos:
s = -2,914
s = -0,086

$K_o = 3 \qquad \zeta = 3 \qquad \omega_n = 0,5$

polos reais e distintos

Exemplo 2:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^2 + 2s + 1}$$

polos:
s = -1
(duplo)

$K_o = 3 \qquad \zeta = 1 \qquad \omega_n = 1 \qquad \omega_d = 0$

polos reais e duplos

Exemplo 3:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3}{2s^2 + 2s + 2}$$

polos:
$s = -0,5 \pm 0,866j$

$K_o = 1,5$ $\zeta = 0,5$ $\omega_n = 1$ $\omega_d = 0,866$

polos complexos conjugados

Exemplo 4:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^2 + 1}$$

polos:
$s = \pm j$
(imaginários puros)

$K_o = 3$ $\zeta = 0$ $\omega_n = \omega_d = 1$

polos complexos conjugados

Equação característica:

$$p(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\Delta = 4\,\zeta^2\,\omega^2_n - 4\,\omega^2_n =$$

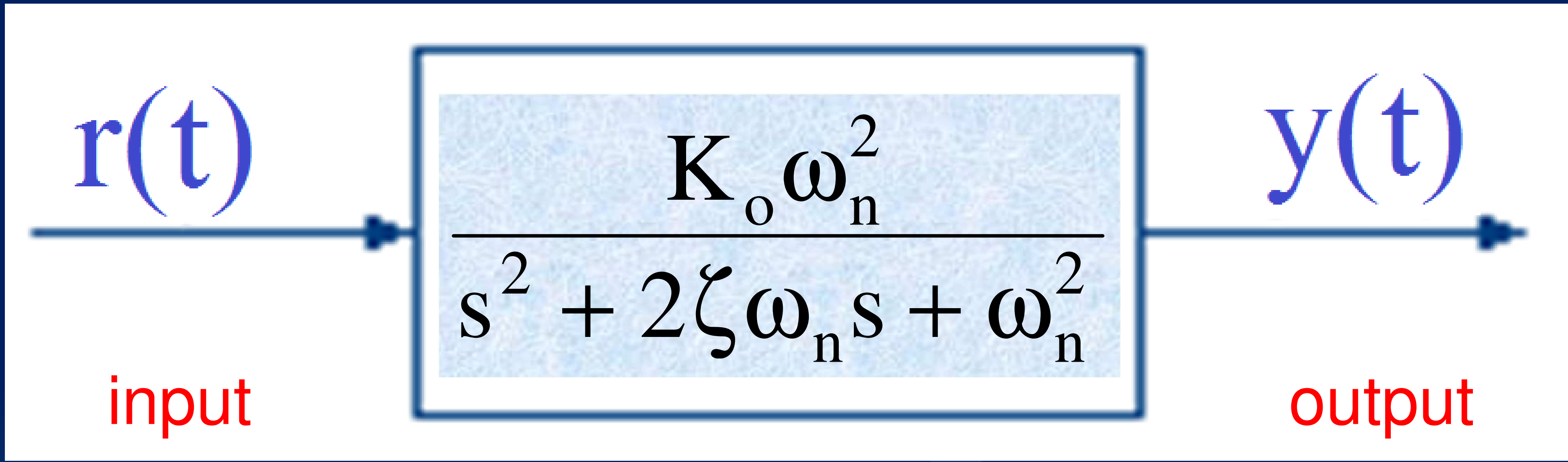
$$= 4\,\omega^2_n\,(\zeta^2 - 1)$$

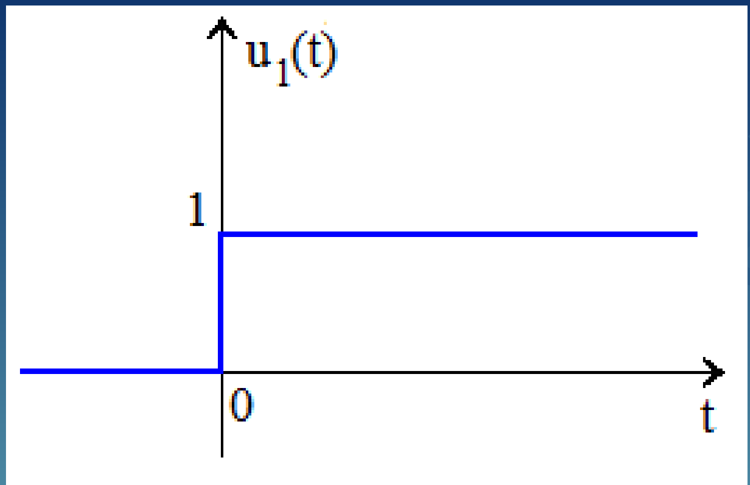
$$\begin{cases} \Delta > 0 & \rightarrow & (\zeta^2 - 1) > 0 & \rightarrow & \zeta^2 > 1 \rightarrow & \zeta > 1 \\ \Delta = 0 & \rightarrow & (\zeta^2 - 1) = 0 & \rightarrow & \zeta^2 = 1 \rightarrow & \zeta = 1 \\ \Delta < 0 & \rightarrow & (\zeta^2 - 1) < 0 & \rightarrow & \zeta^2 < 1 \rightarrow & \zeta < 1 \end{cases}$$

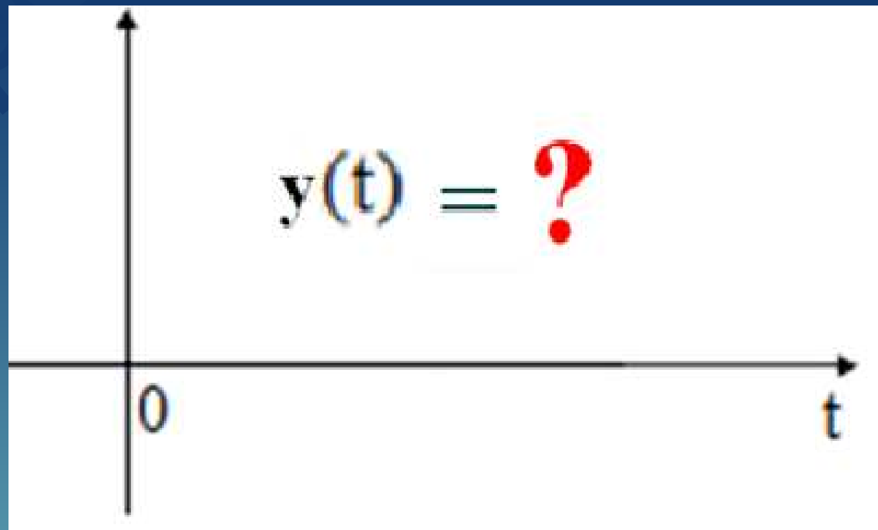
$\zeta > 1 \rightarrow$ *polos reais e distintos*

$\zeta = 1 \rightarrow$ *polos reais e duplos*

$0 < \zeta < 1 \rightarrow$ *polos complexos conjugados*



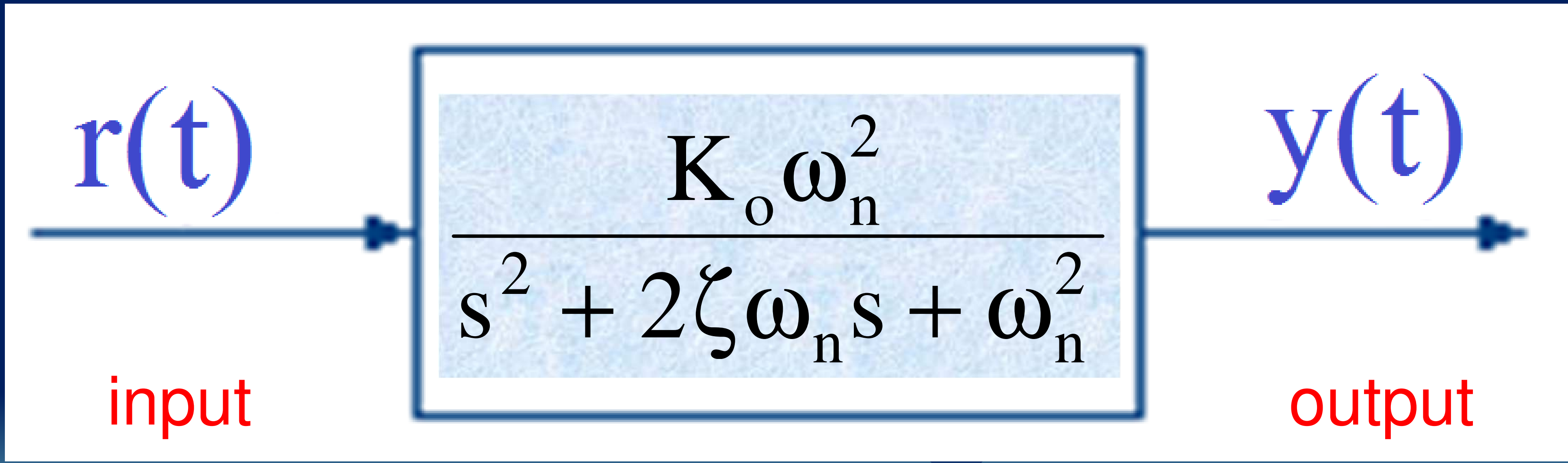




Entrada degrau unitário

Qual é a resposta ao degrau?
(*step response*)

Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem

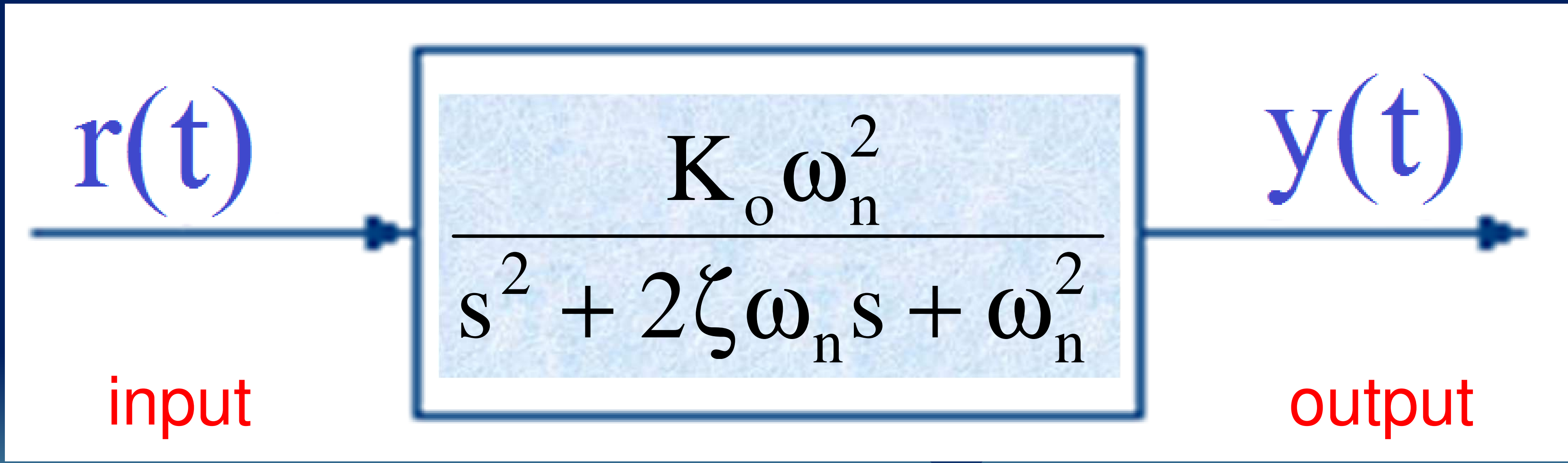


$$\frac{K_o\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = \frac{K_o\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot R(s)$$

e como r(t) = degrau unitário:

$$Y(s) = \frac{K_o\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$



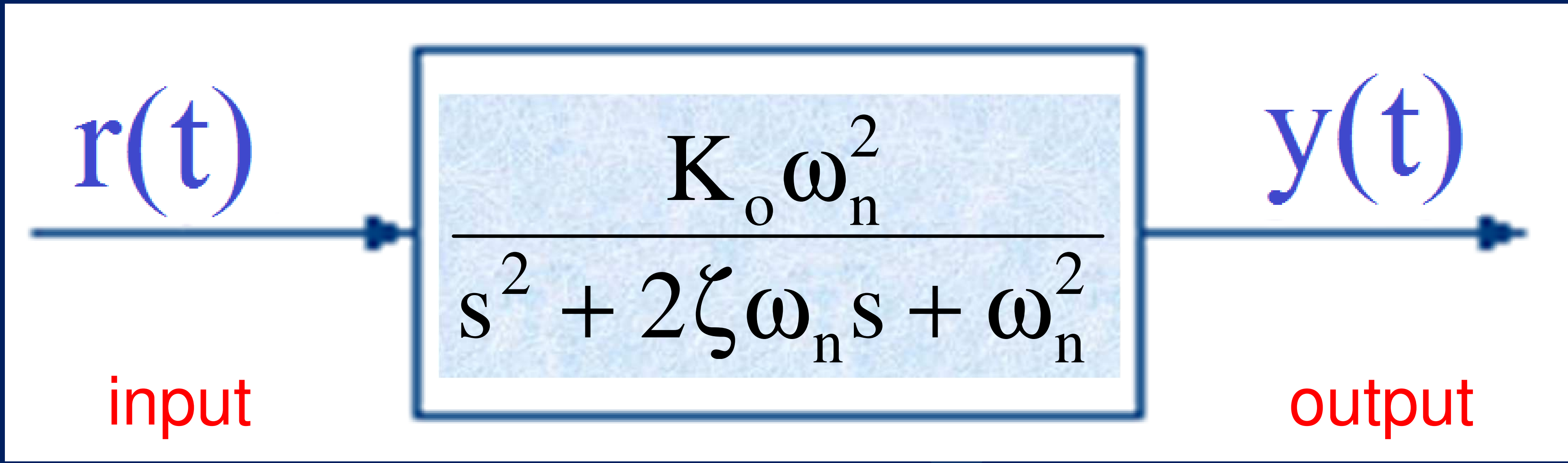
$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$$

a resposta ao degrau unitário depende do valor de ζ

a) $0 < \zeta < 1$ (sub amortecido)

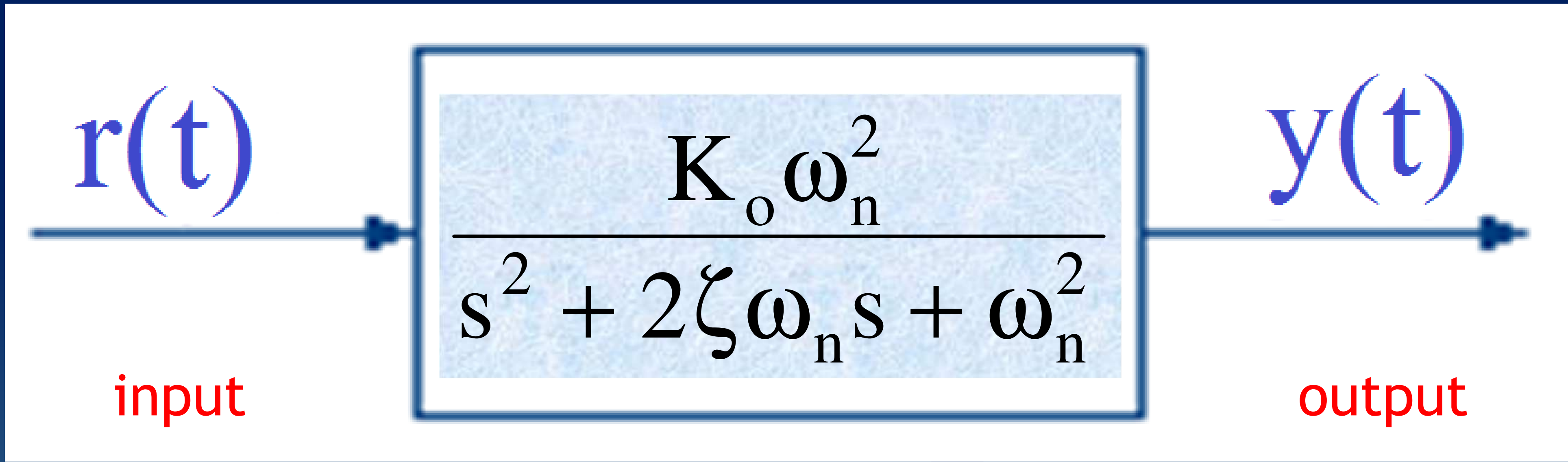
b) $\zeta = 1$ (*amortecimento crítico*)

c) $\zeta > 1$ (*sobre amortecido*)



Vamos ver agora $y(t)$, as respostas ao degrau unitário nestes 3 casos, a começar pelo caso (a)

a) $0 < \zeta < 1$ (sub amortecido)



$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$$

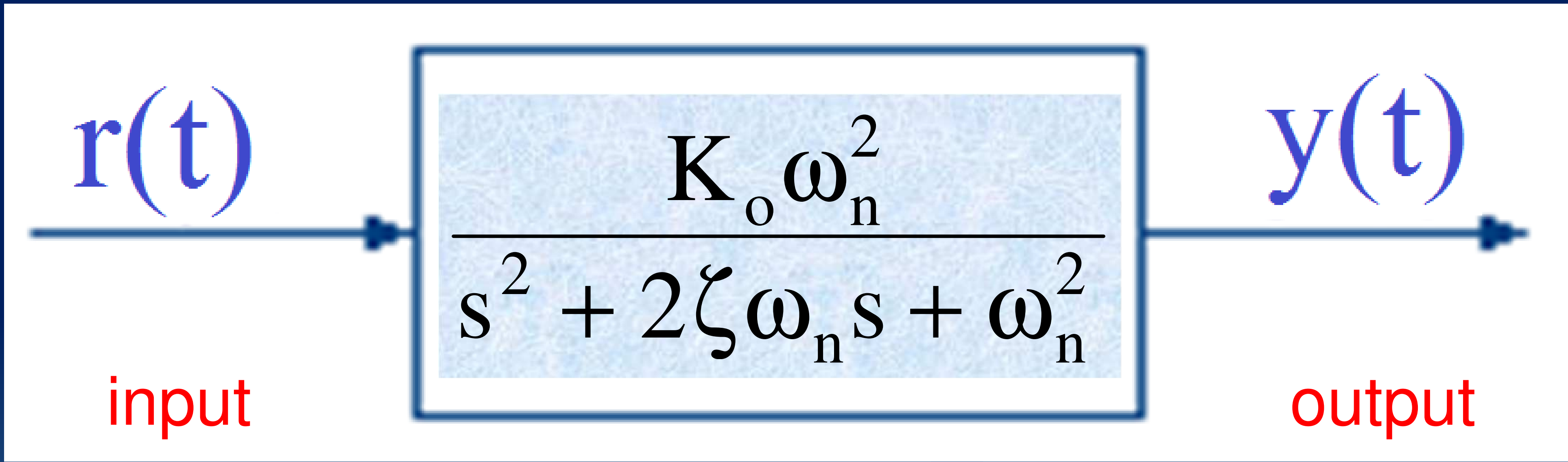
Logo, no caso de $0 < \zeta < 1$ (*sub amortecido*) a resposta ao degrau unitário é:

$$y(t) = K_o \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \operatorname{sen} \omega_d t \right) \right], \quad t > 0$$

onde

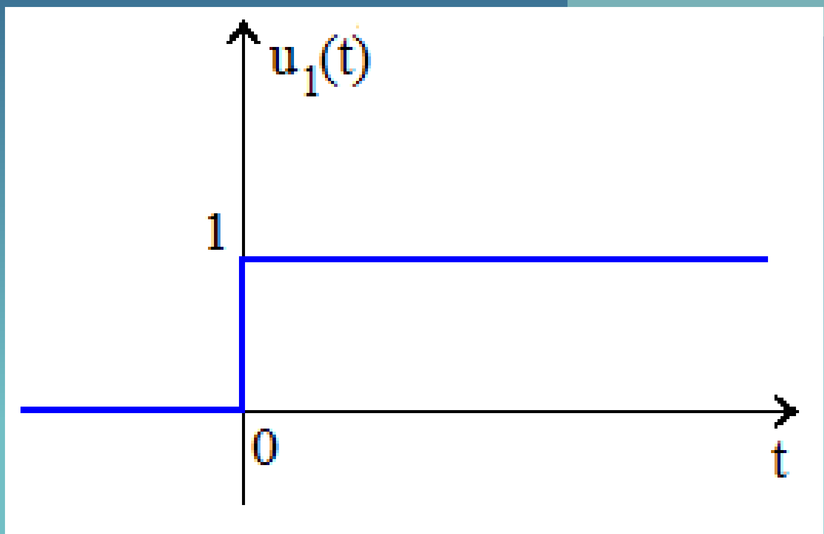
$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$$

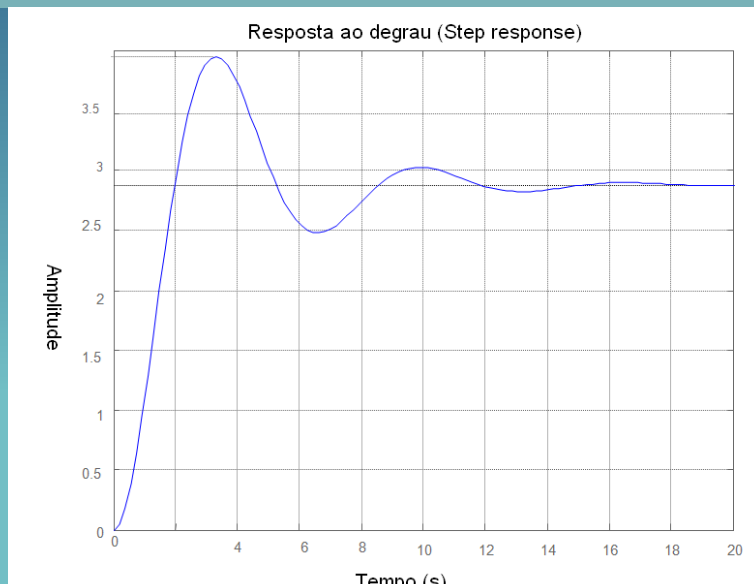
frequência natural amortecida
(*damping frequency*)



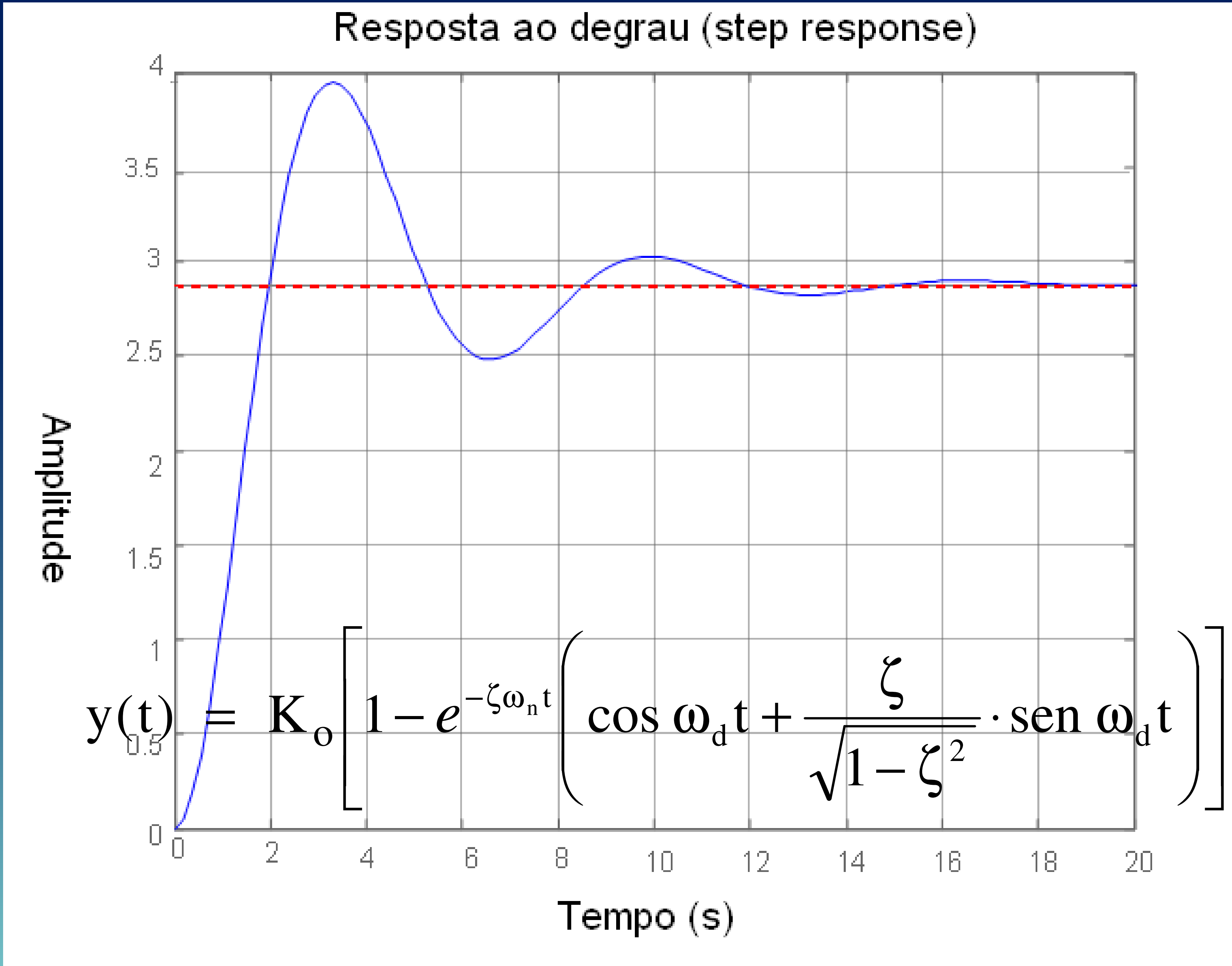
resposta ao degrau unitário:

$$y(t) = K_o \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \operatorname{sen} \omega_d t \right) \right]$$

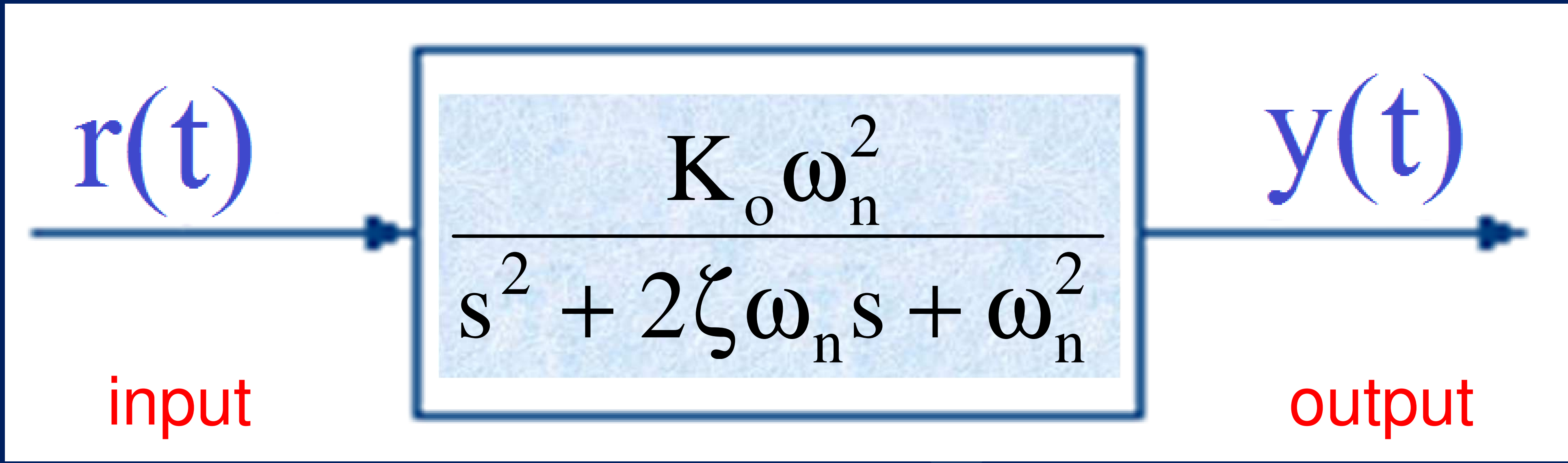




a resposta ao degrau unitário é:

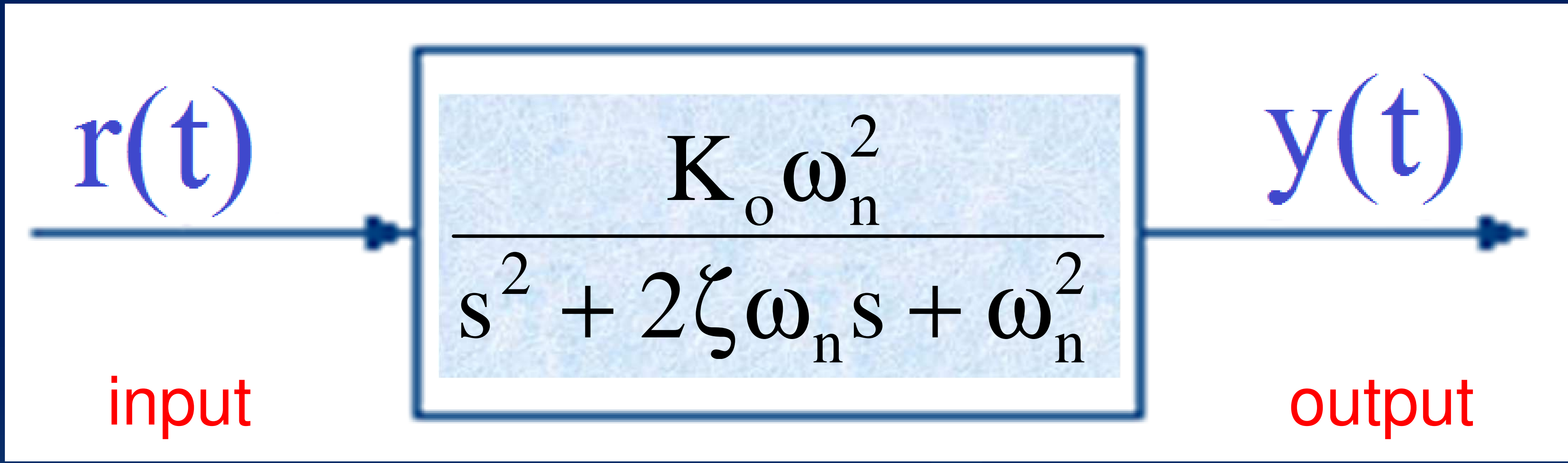


$$y(t) = K_o\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot \operatorname{sen}\omega_d t\right)\right]$$



Vamos agora ver $y(t)$, a resposta ao degrau unitário para o caso (b)

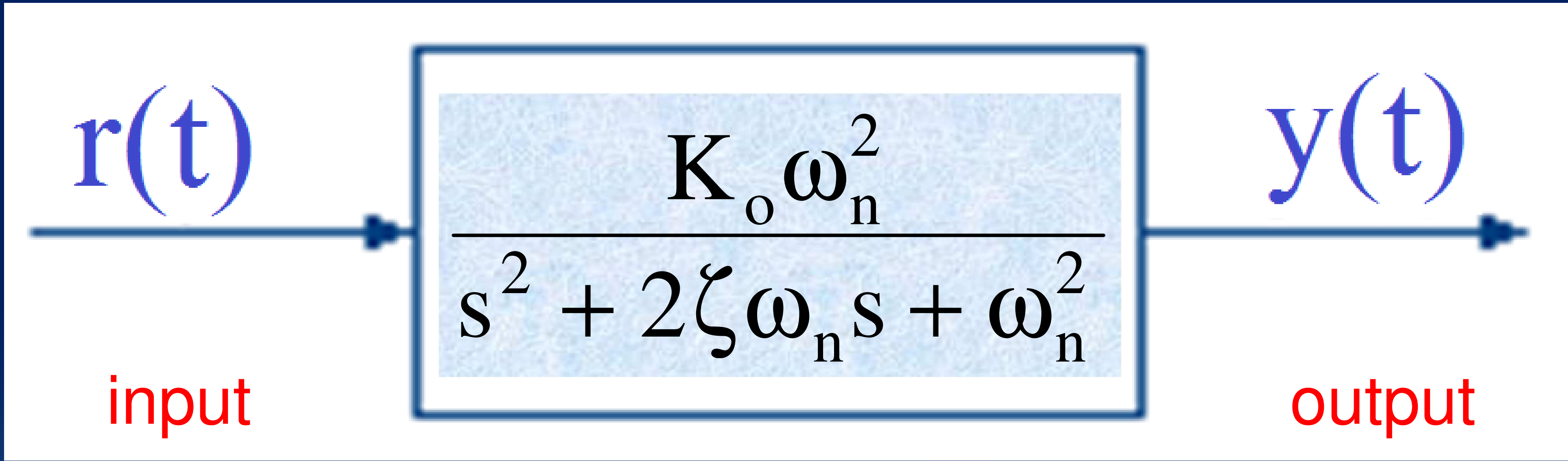
b) $\zeta = 1$ amortecimento crítico)



$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[Y(s)\right]$$

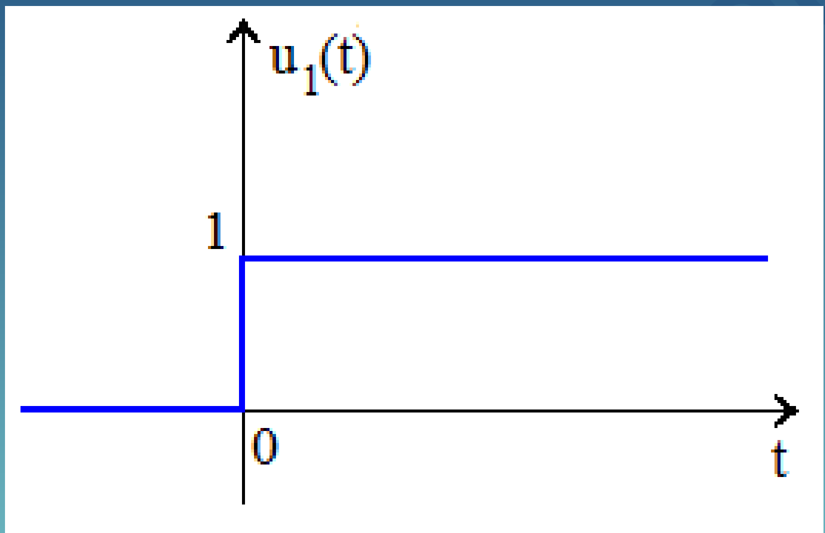
No caso de $\zeta = 1$ (*amortecimento crítico*), a resposta ao degrau unitário é:

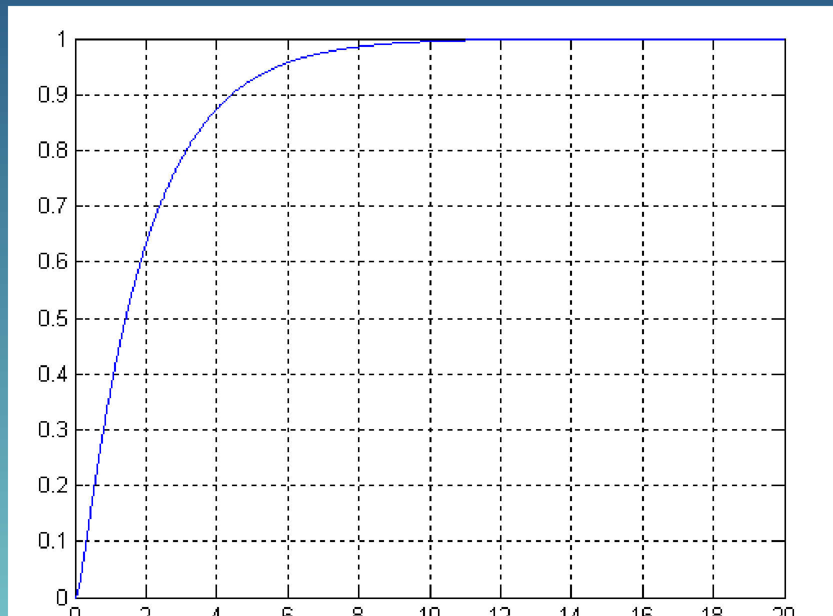
$$y(t) = K_o\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \left(1 + \omega_n t\right)\right], \qquad t > 0$$



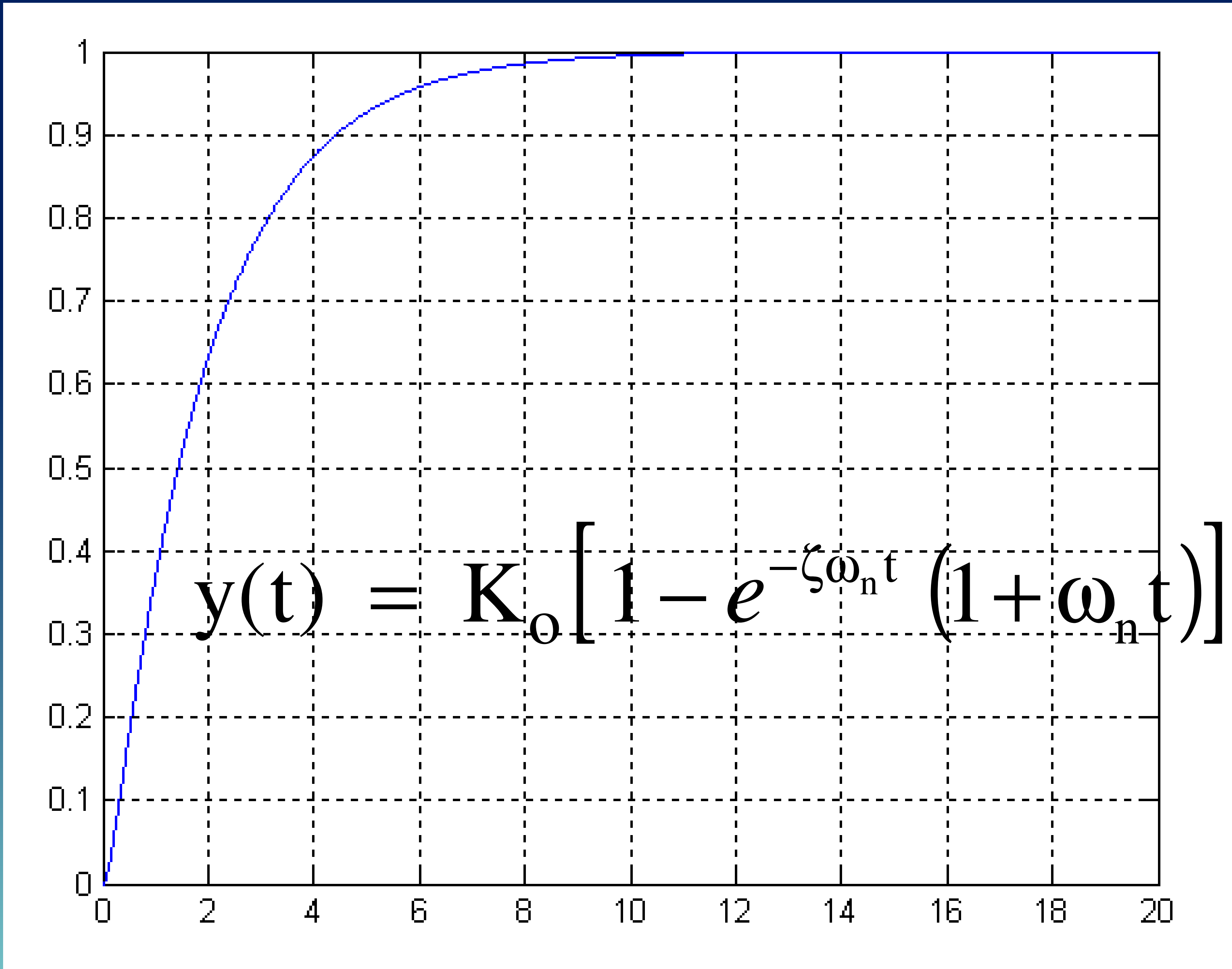
resposta ao degrau unitário:

$$y(t) = K_o\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(1 + \omega_n t\right)\right]$$

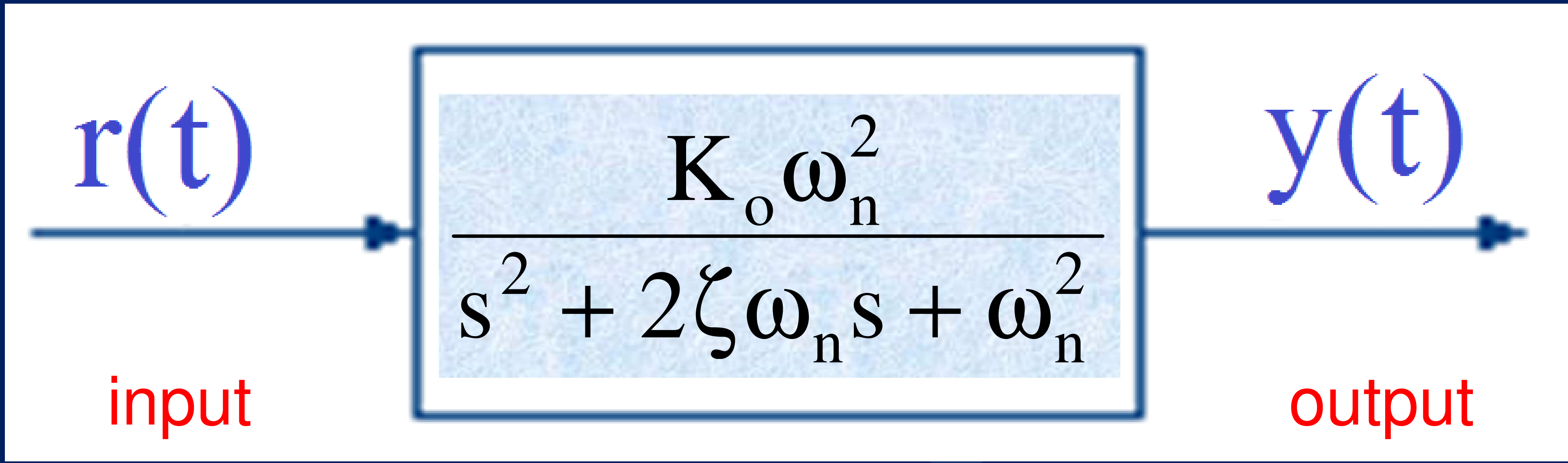




resposta ao degrau unitário é:

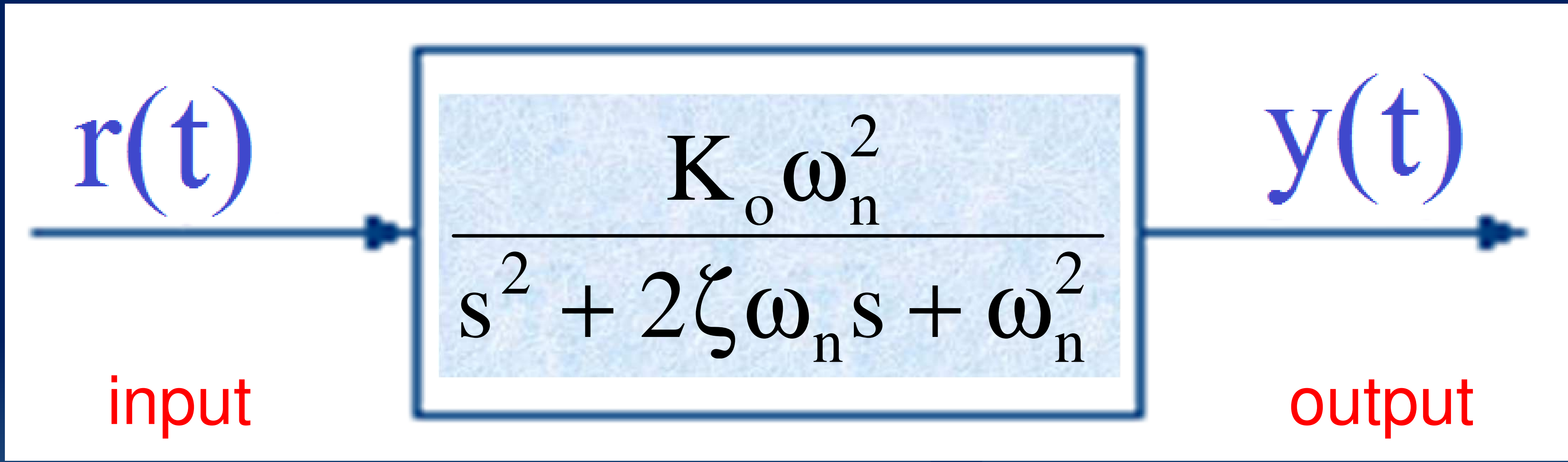


$$y(t) = K_o\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(1+\omega_n t\right)\right]$$



Finalmente, vamos agora ver $y(t)$, a resposta ao degrau unitário para o caso (c)

c) $\zeta > 1$ sobre-amortecido



$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$$

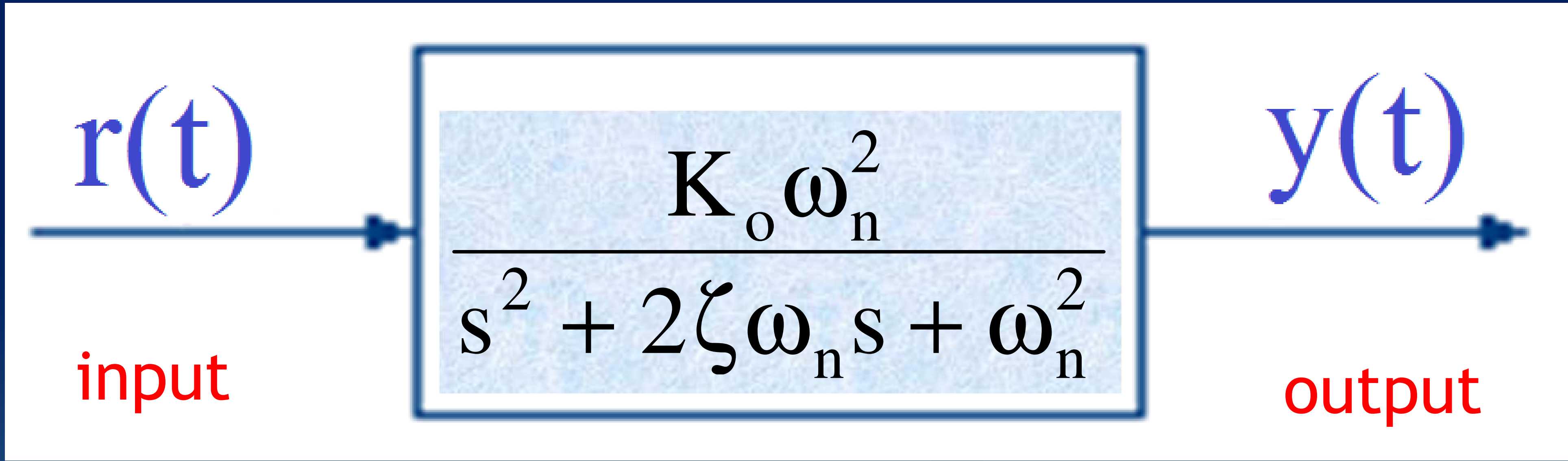
No caso de $\zeta > 1$ (*sobre amortecido*), a resposta ao degrau unitário é:

$$y(t) = K_o\left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right], \qquad t > 0$$

onde

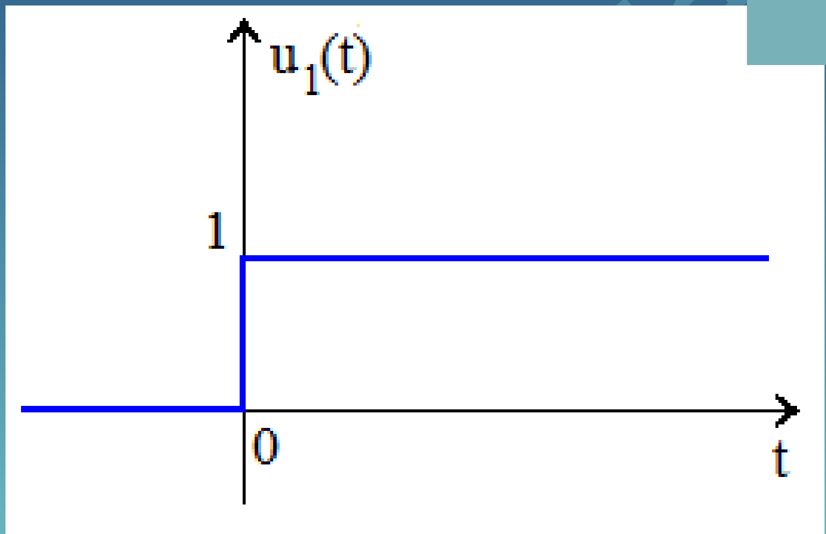
$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\omega_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

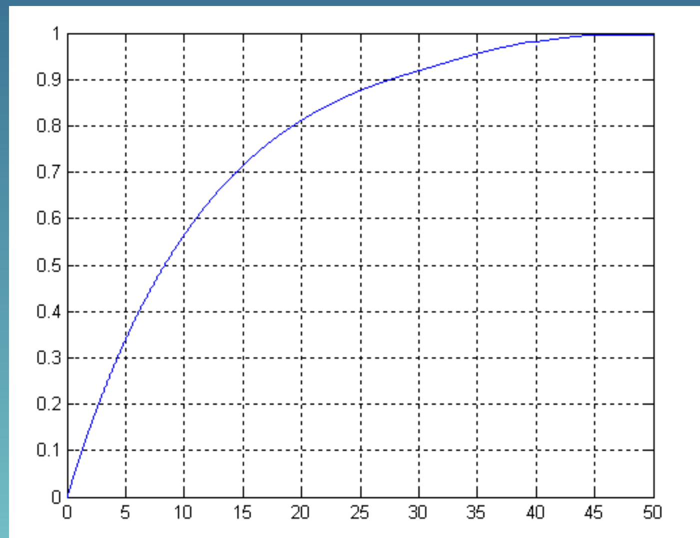
Sistema tem polos reais



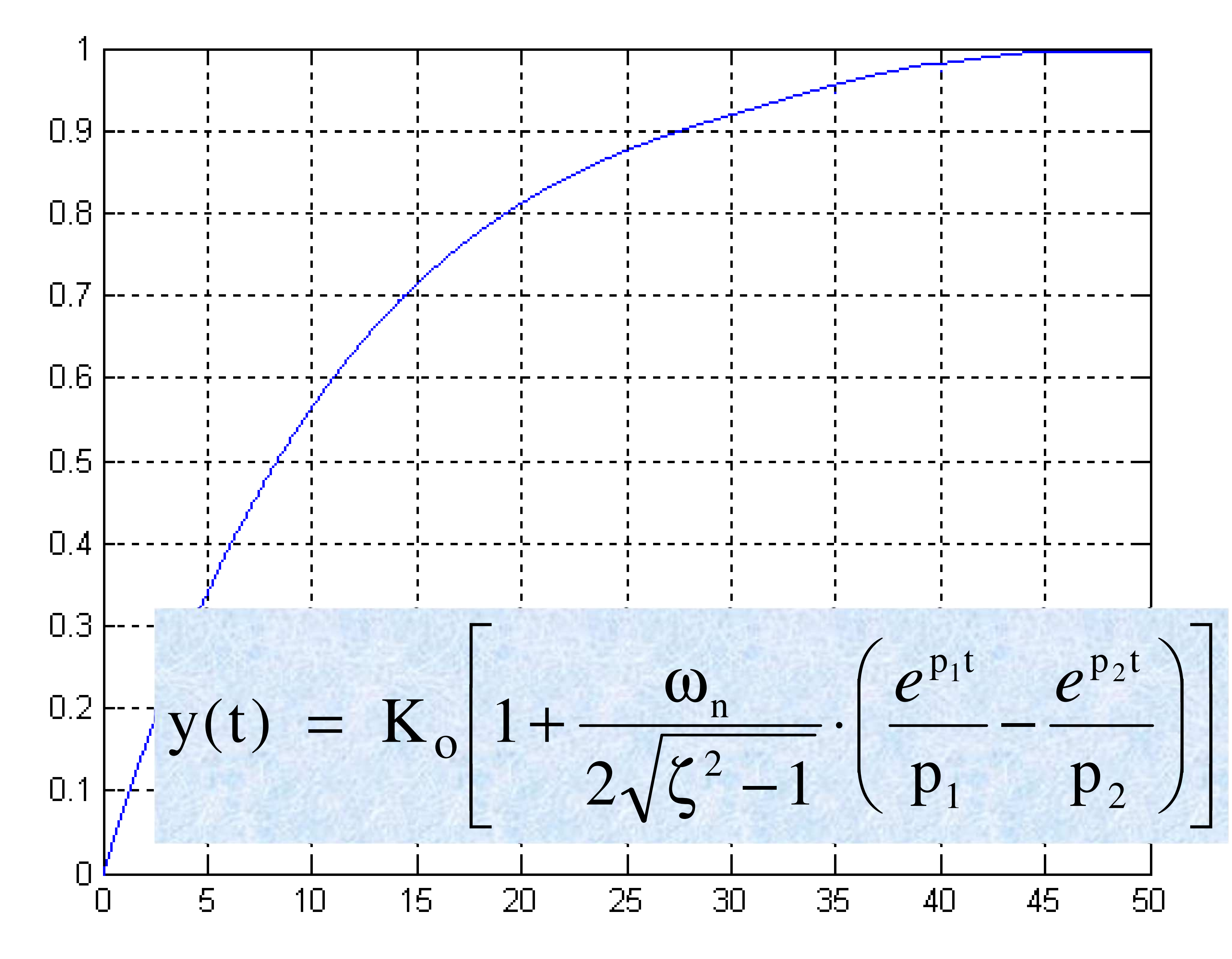
resposta ao degrau unitário:

$$y(t) = K_o\left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right]$$





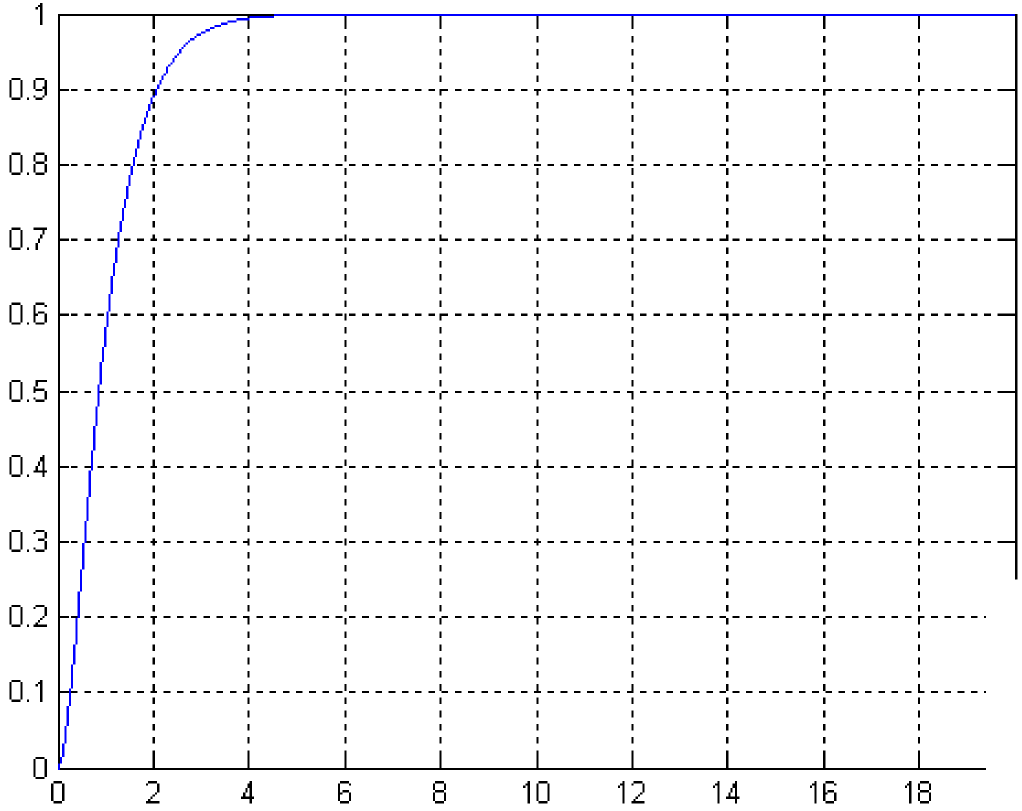
resposta ao degrau unitário:



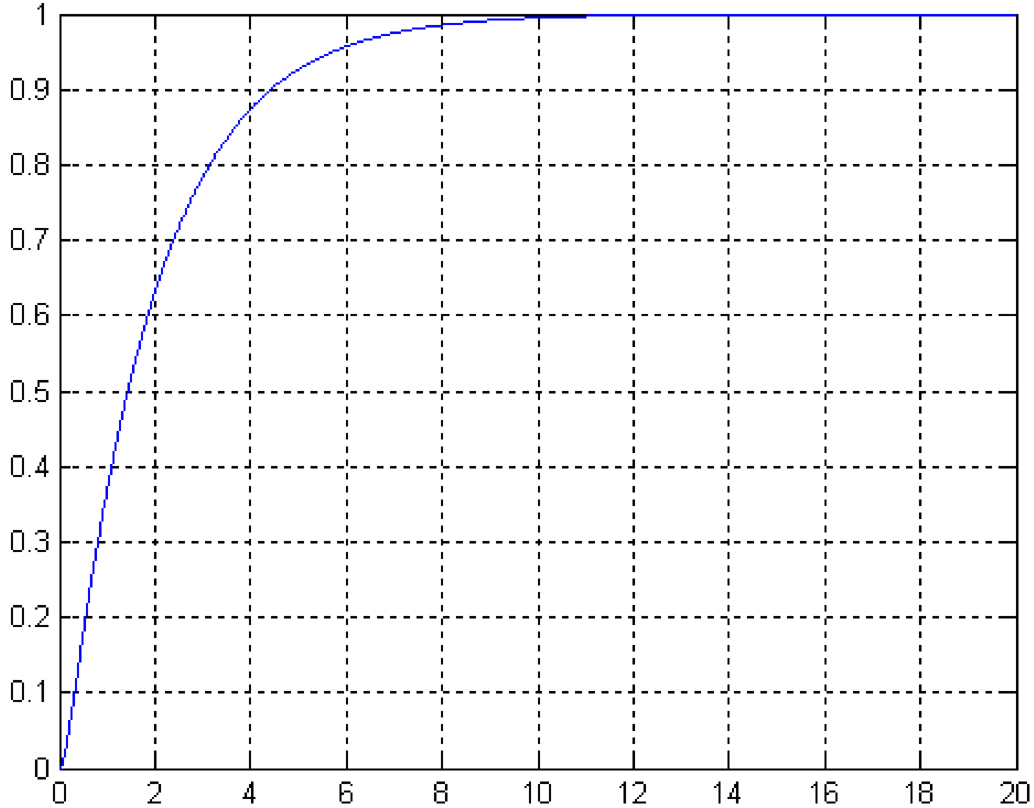
$$y(t) = K_o\left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right]$$

Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem

resposta ao degrau unitário

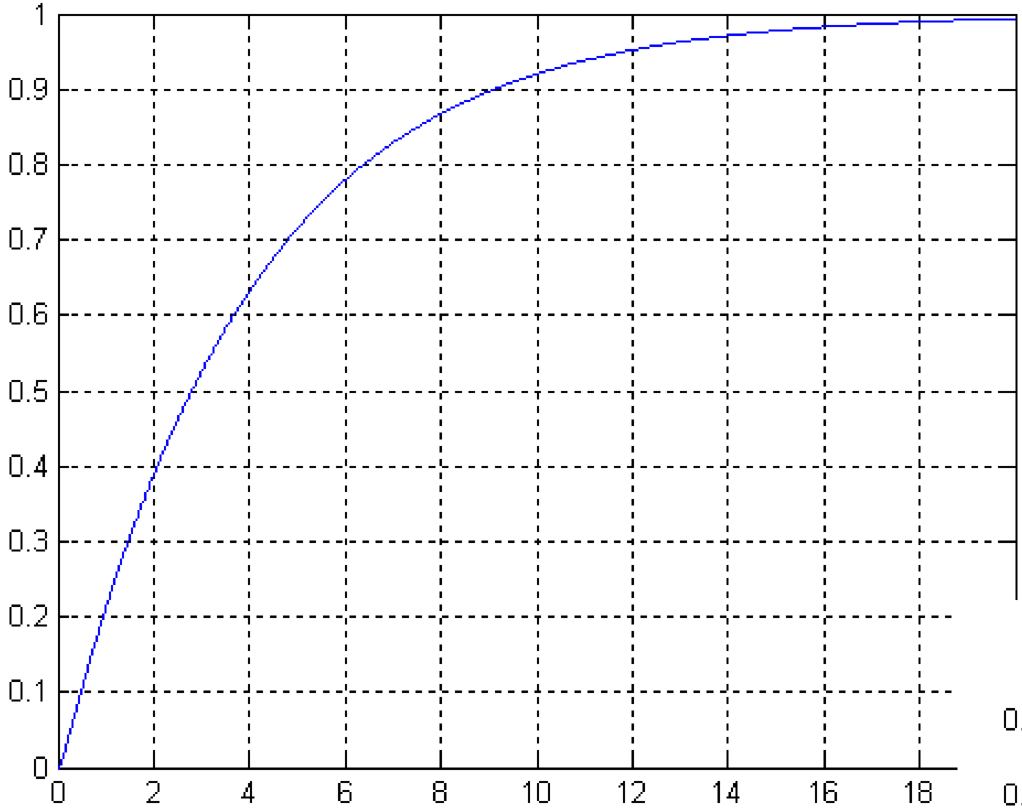


$\zeta = 1$



$\zeta = 2$

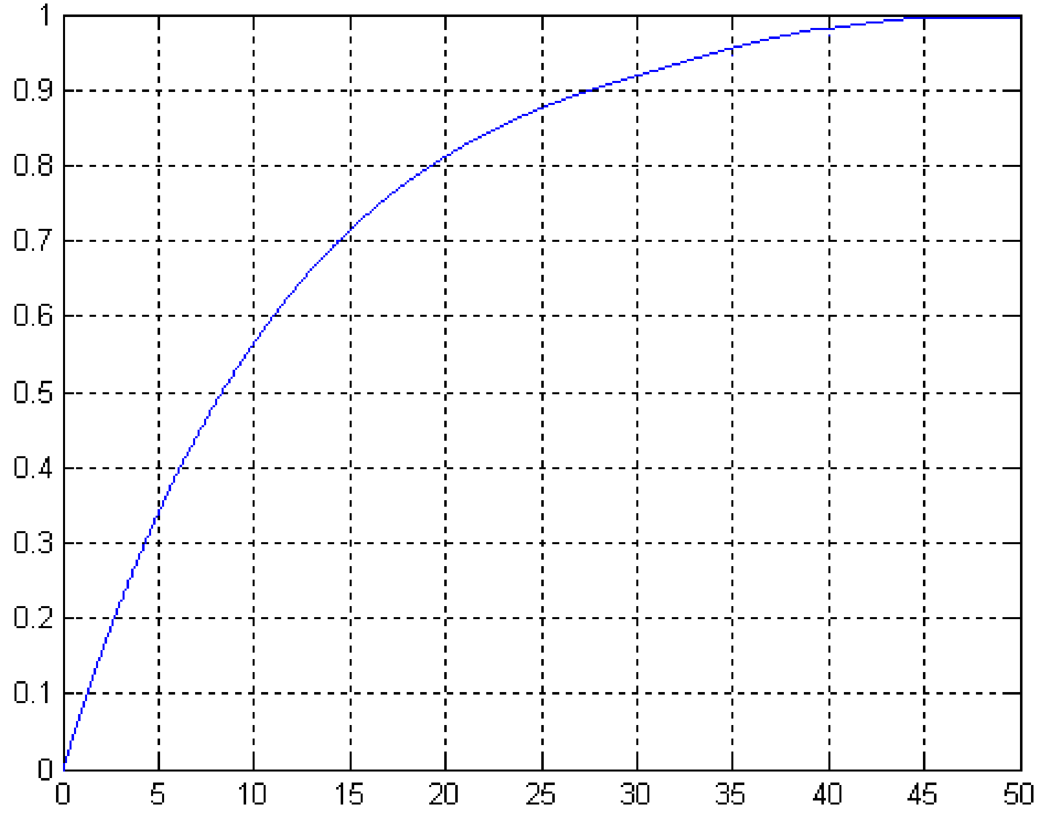
Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



resposta ao degrau unitário

$\zeta = 4$

$\zeta = 12$



Agora vamos analisar alguns parâmetros associados ao caso *sub amortecido*

$$0 < \zeta < 1 \quad \text{(sub amortecido)}$$

No caso $0 < \zeta < 1$,
A resposta ao degrau unitário

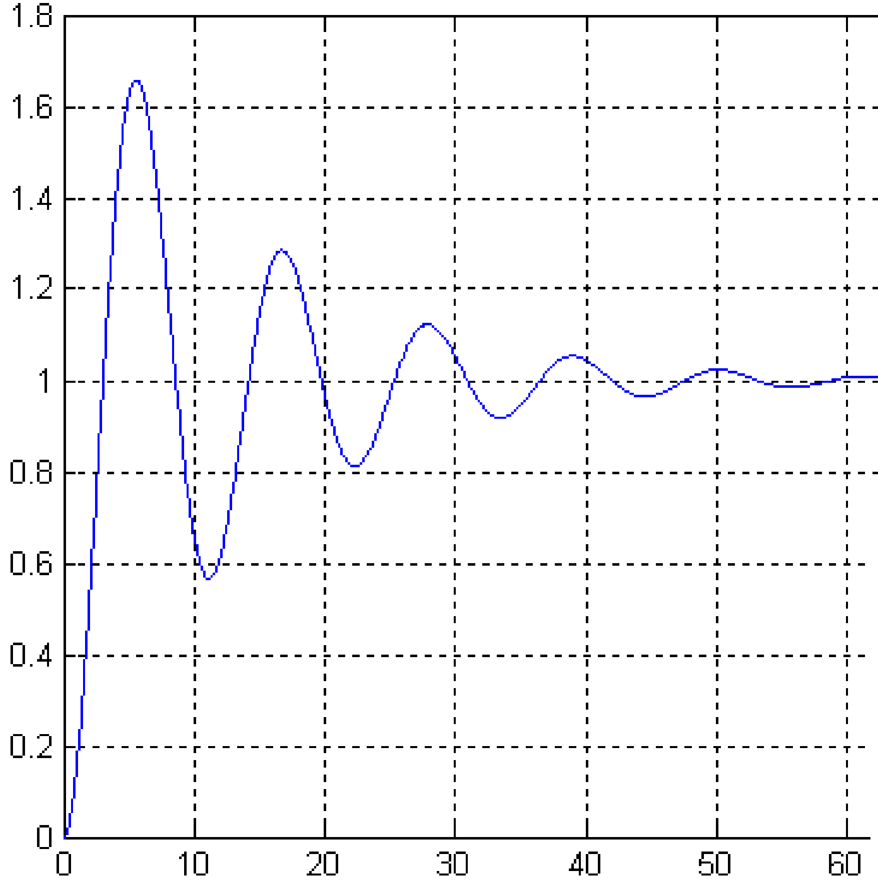
$$y(t) = K_o \left[1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \operatorname{sen} \omega_d t \right) \right], \quad t > 0$$

pode ter muitas formas diferentes, dependendo dos valores de ζ (*coeficiente de amortecimento*), ω_n (*frequência natural*) e K_o (*ganho*)

Observe que ω_d depende de ζ e ω_n

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$$

frequência natural amortecida (*damping frequency*) resposta ao degrau unitário

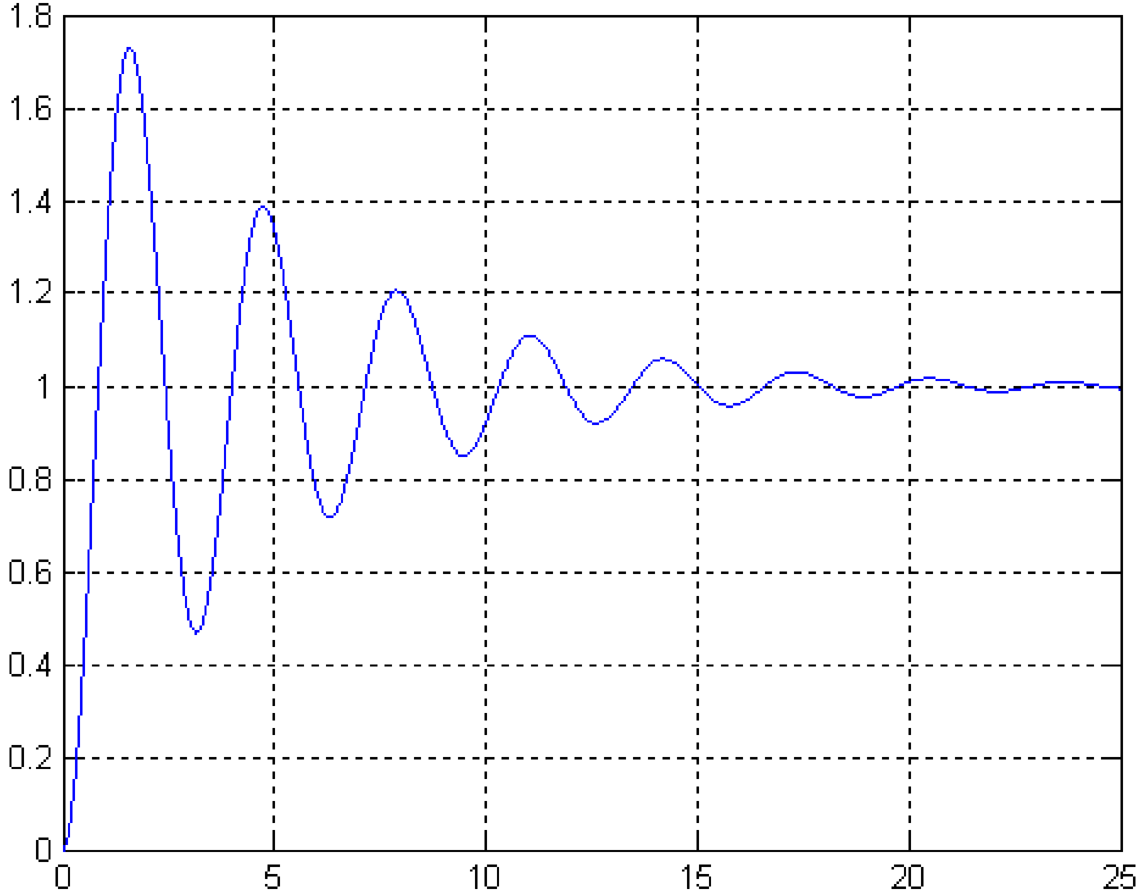


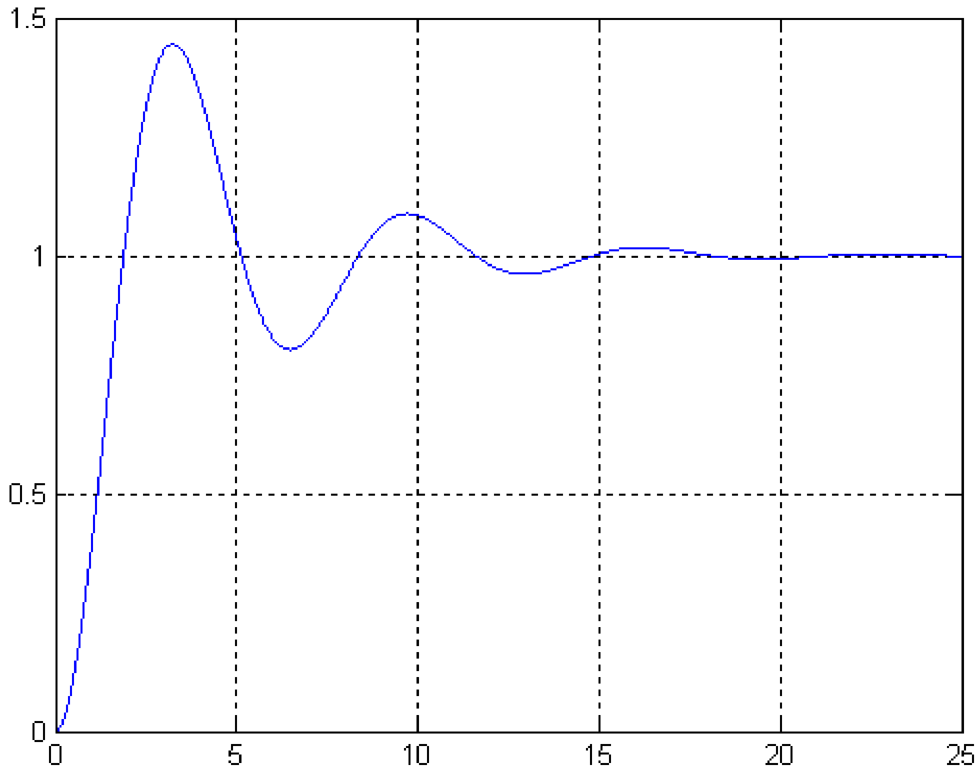
$\zeta = 0,132$

$\omega_n = 0,57$

$\zeta = 0,1$

$\omega_n = 2$





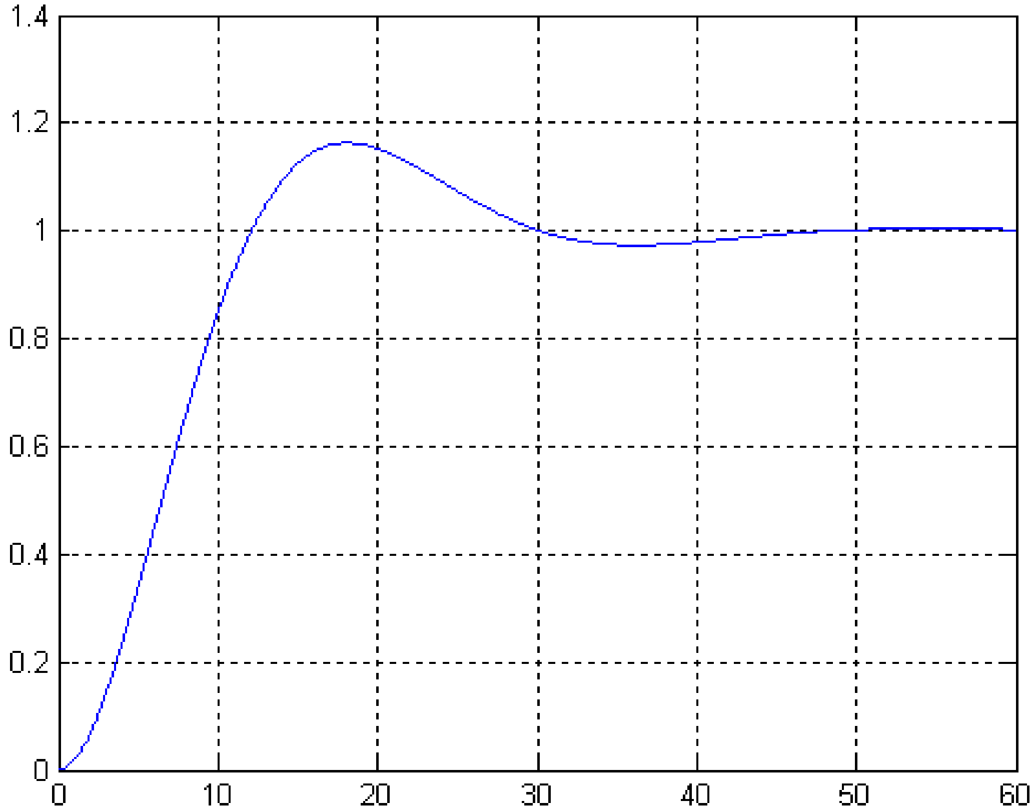
resposta ao degrau unitário

$\zeta = 0{,}25$

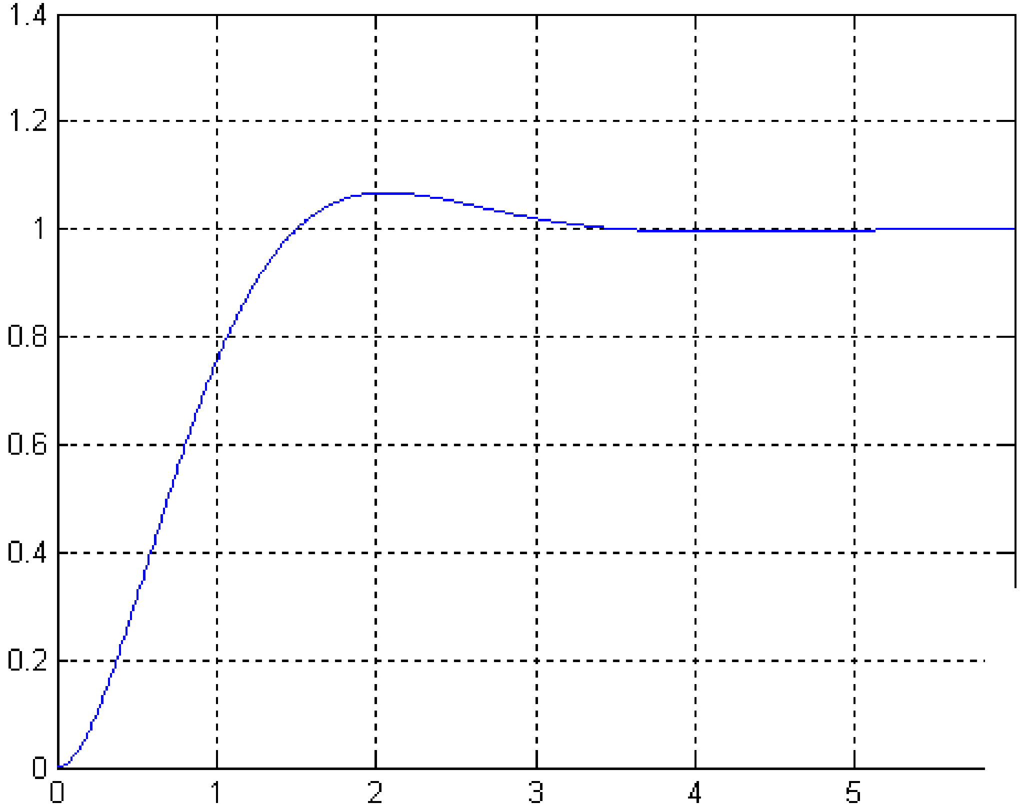
$\omega_n = 1$

$\zeta = 0{,}5$

$\omega_n = 0{,}2$



Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



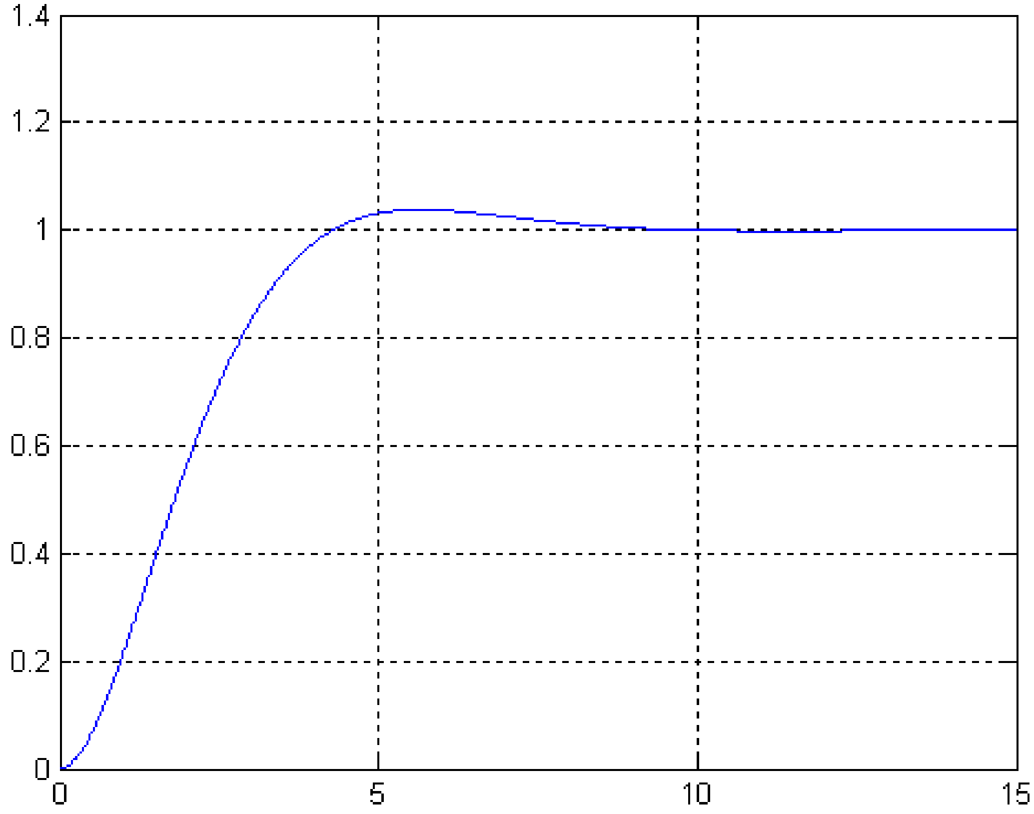
resposta ao degrau unitário

$\zeta = 0{,}65$

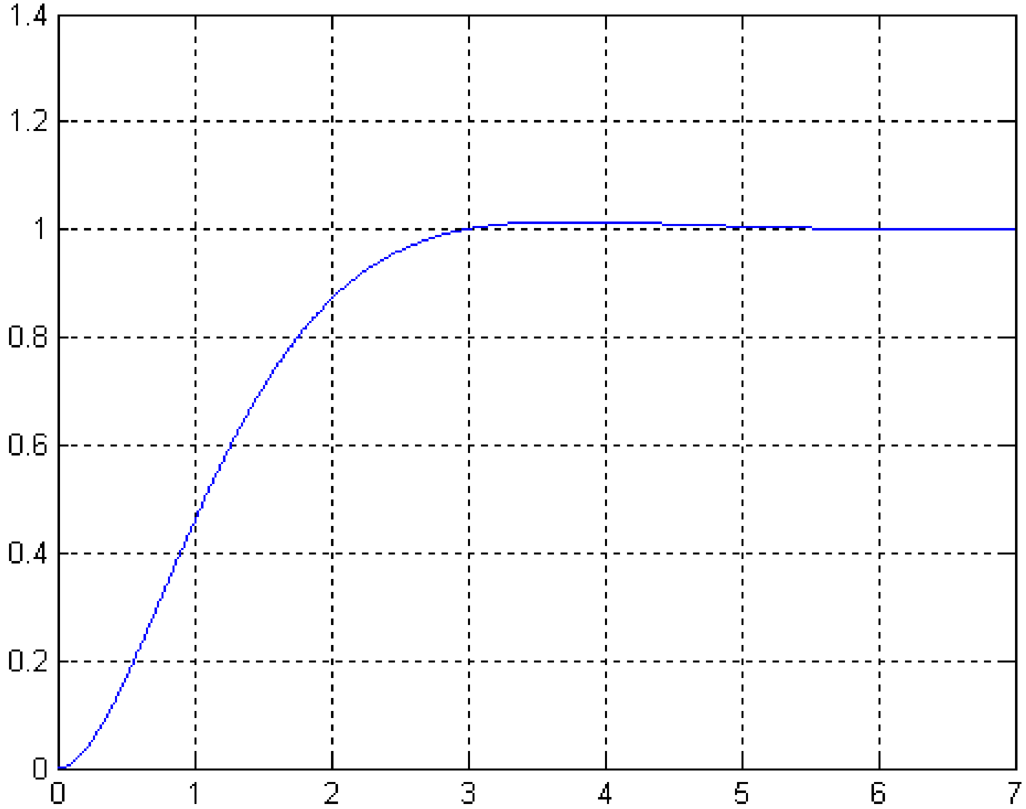
$\omega_n = 2$

$\zeta = 0{,}72$

$\omega_n = 0{,}8$



Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



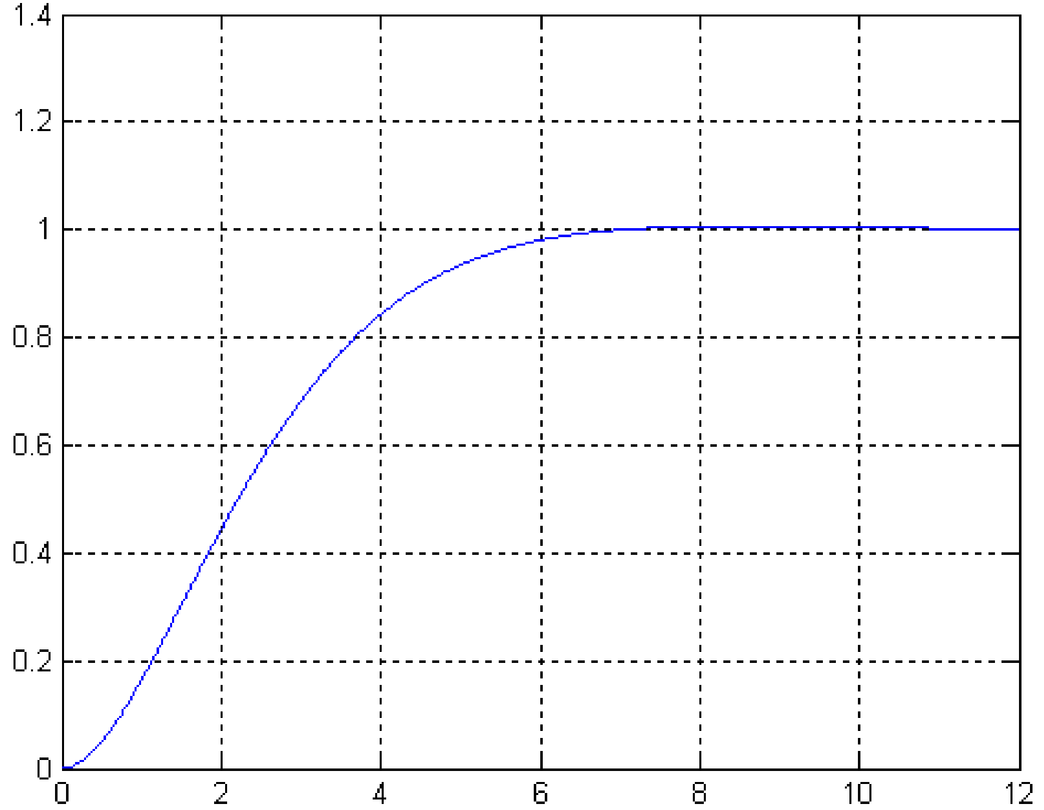
resposta ao degrau unitário

$\zeta = 0{,}8$

$\omega_n = 1{,}4$

$\zeta = 0{,}85$

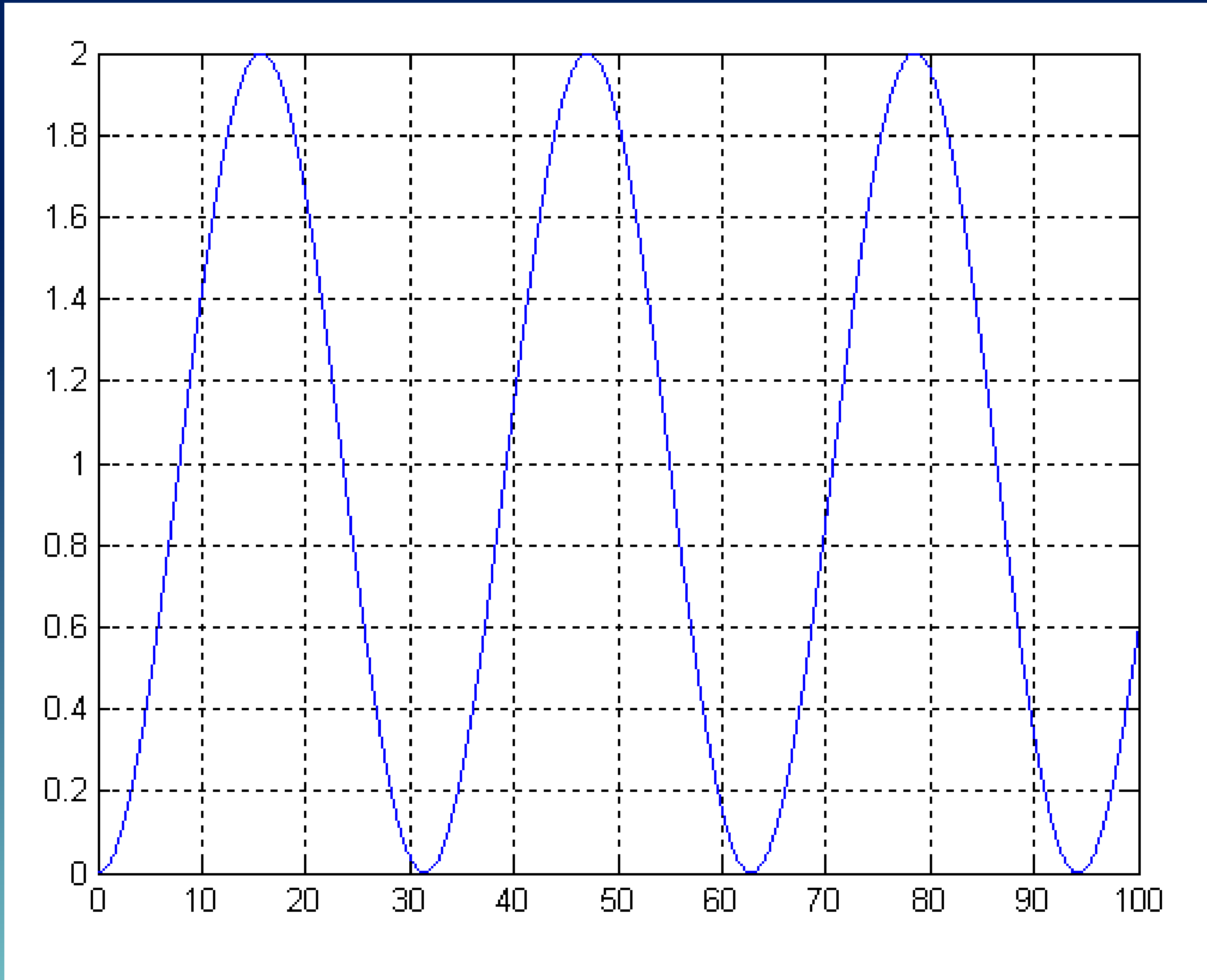
$\omega_n = 0{,}7$



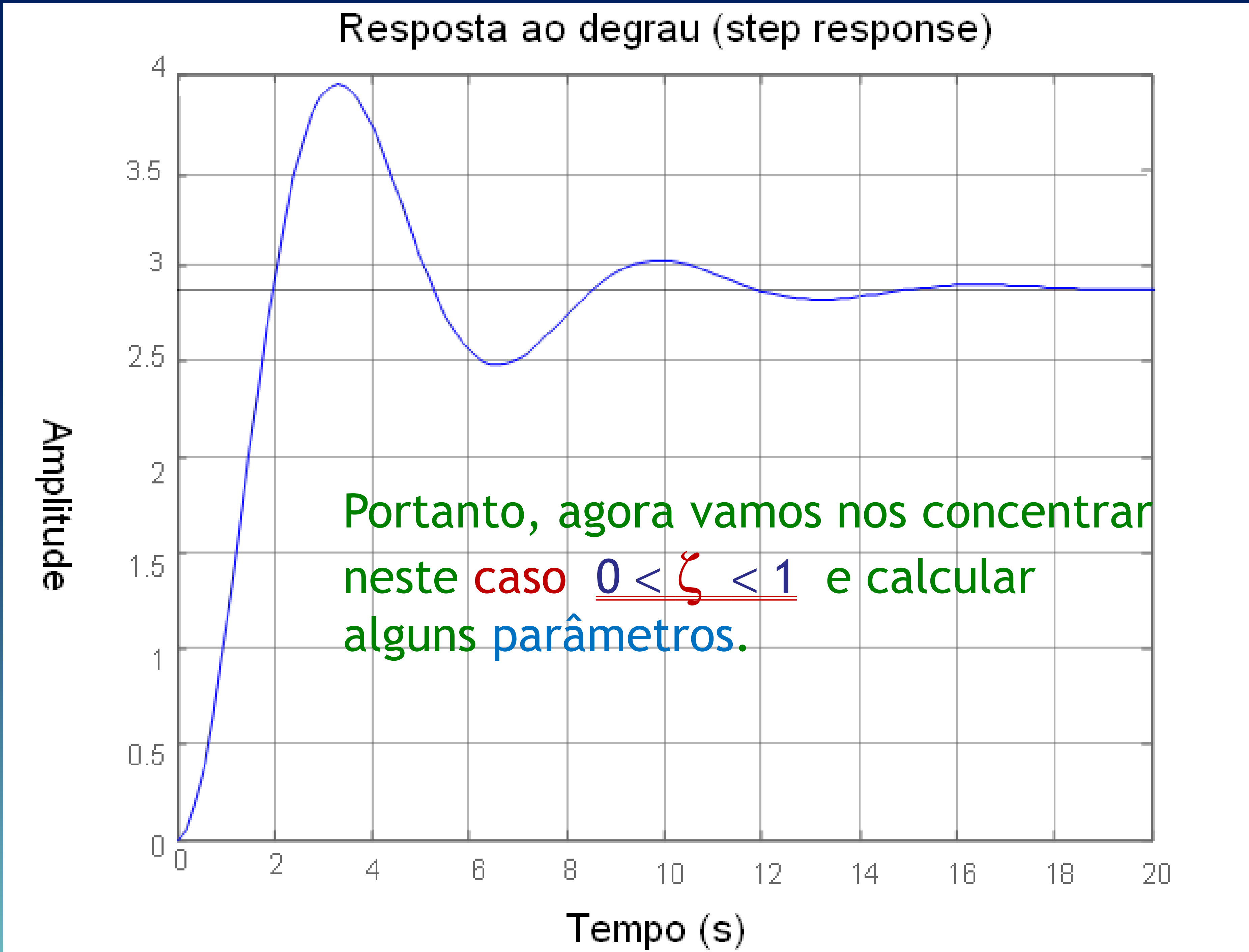
resposta ao degrau unitário

$\zeta = 0$

$\omega_n = 0,2$

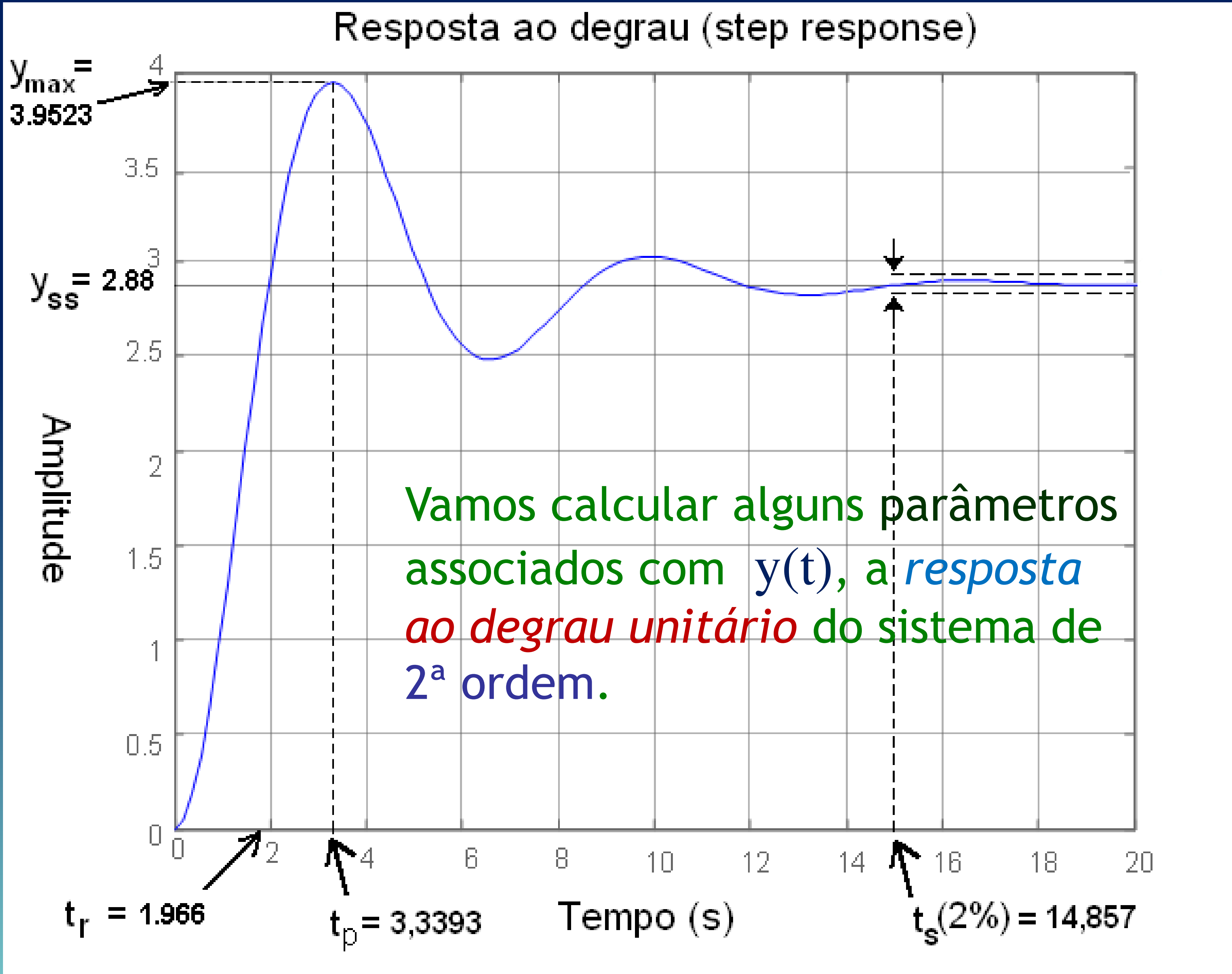


Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



Portanto, agora vamos nos concentrar neste caso $0 < \zeta < 1$ e calcular alguns parâmetros.

Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



Vamos calcular alguns parâmetros associados com y(t), a *resposta ao degrau unitário* do sistema de 2ª ordem.

resposta em estado estacionário

(*steady state output*)

y_{ss}

y_{ss} = resposta em estado estacionário ou
saída em regime permanente
(*steady state output*)

$$Y(s) = \frac{K_o \, \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot R(s)$$

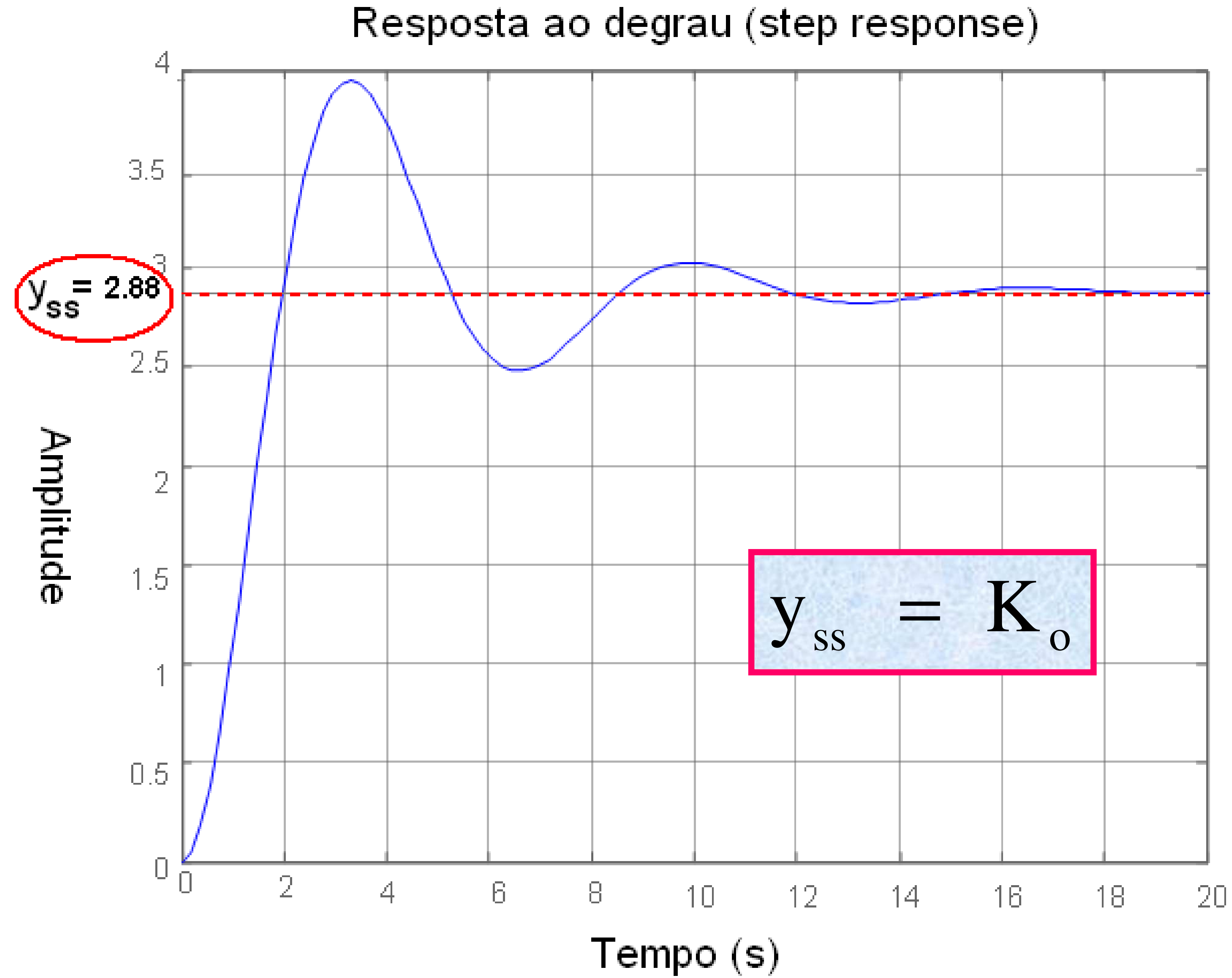
$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to o} s \cdot Y(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{K_o \, \omega_n^2 \, s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$= K_o$$

$$y_{ss} = K_o$$



Resposta ao degrau (step response)
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Amplitude
Tempo (s)
y_ss = 2.88

$$y_{ss} = K_o$$

tempo de subida

(*rising time*)

t_r

t_r tempo de subida (*rising time*)

tempo necessário para que a resposta ao degrau, $y(t)$, atinja o valor final $y_{ss} = K_o$ pela primeira vez.

t_r = tempo de subida (*rising time*)

é o instante em que $y(t)$ atinge o valor final K_o pela primeira vez.

$$y(t_r) = K_o\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot \operatorname{sen}\omega_d t_r\right)\right] = K_o$$

$$e^{-\zeta\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot \operatorname{sen}\omega_d t_r\right) = 0$$

$$\operatorname{tg}(\omega_d t_r) = \frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \frac{-\omega_d}{\zeta\omega_n}$$

t_r = tempo de subida (*rising time*)

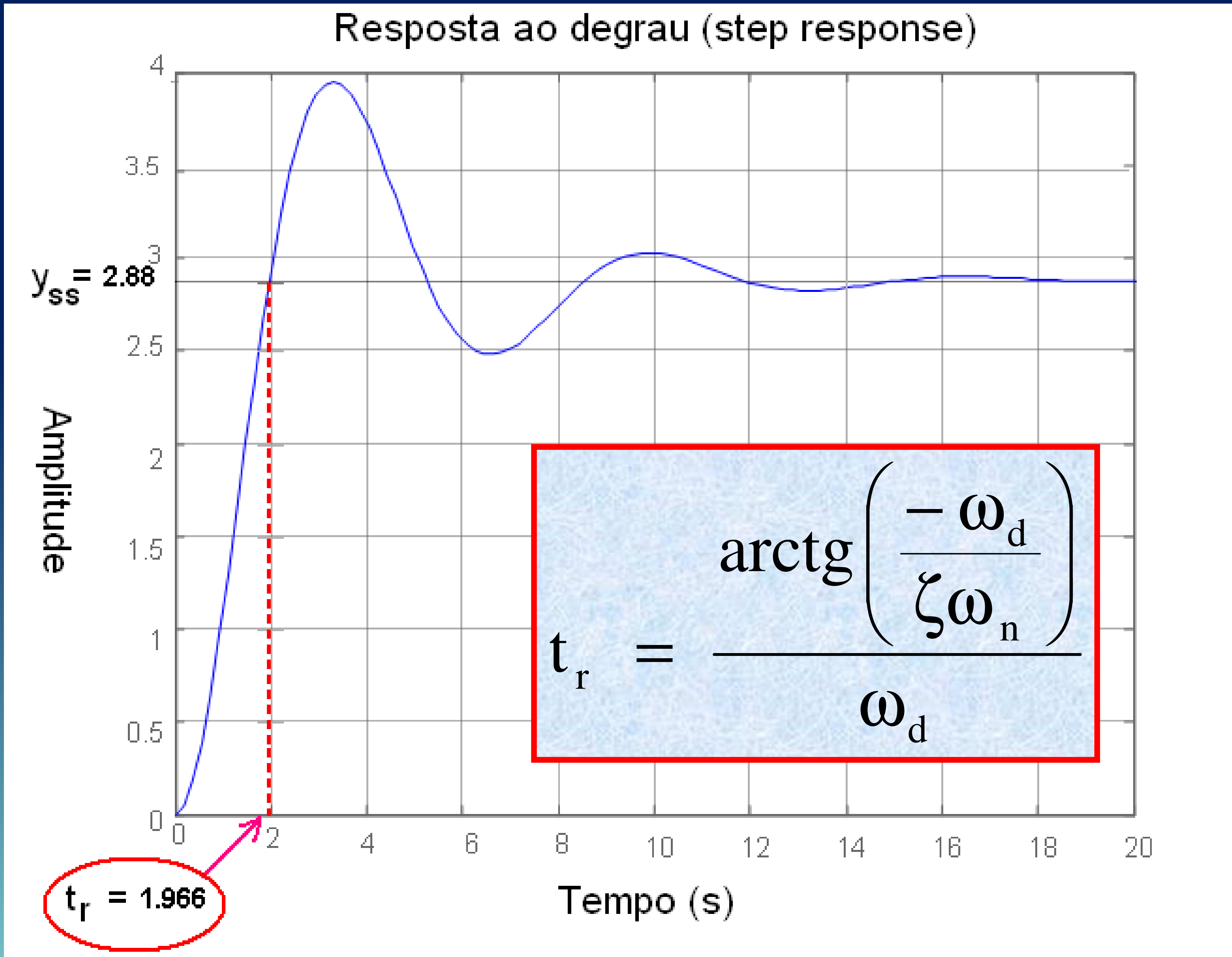
depende dos valores de ζ (*coeficiente de amortecimento*),

e de ω_n (*frequência natural*)

$$t_r = \frac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\omega_d}{\zeta\omega_n}\right)}{\omega_d} = \frac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)}{\omega_d}$$

$$t_r = \operatorname{arctg}(-\omega_d/\zeta\omega_n) / \omega_d$$

Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



$$t_r = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{-\omega_d}{\zeta\omega_n}\right)}{\omega_d}$$

instante de pico

(*peak time*)

t_p

t_p instante de pico (*peak time*)

é o instante em que a reposta ao degrau $y(t)$ atinge o primeiro pico.

instante de pico
(peak time)

$y_{ss} = K_o$ *(ganho)*
ζ *(coeficiente de amortecimento),*
ω_n *(frequência natural)*

$$y' = \frac{dy}{dt} = K_o \left[\zeta\omega_n \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \operatorname{sen} \omega_d t_r \right) + \right.$$

$$\left. - e^{-\zeta\omega_n t} \left(-\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t_r + \zeta \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \cos \omega_d t_r \right) \right]$$

ω_n

instante de pico
(*peak time*)

$$\frac{dy}{dt} = K_o \cdot e^{-\zeta\omega_n t}\left(\zeta\omega_n \cos\omega_d t + \frac{\zeta^2\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \operatorname{sen}\omega_d t \; + \right.$$

$$\left. + \; \omega_d \operatorname{sen}\omega_d t - \zeta\omega_n \cdot \cos\omega_d t \right)$$

$$= K_o \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \operatorname{sen}\omega_d t \cdot \left(\frac{\zeta^2\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\omega_n(1-\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

$$= K_o \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \operatorname{sen}\omega_d t \cdot \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0$$

instante de pico

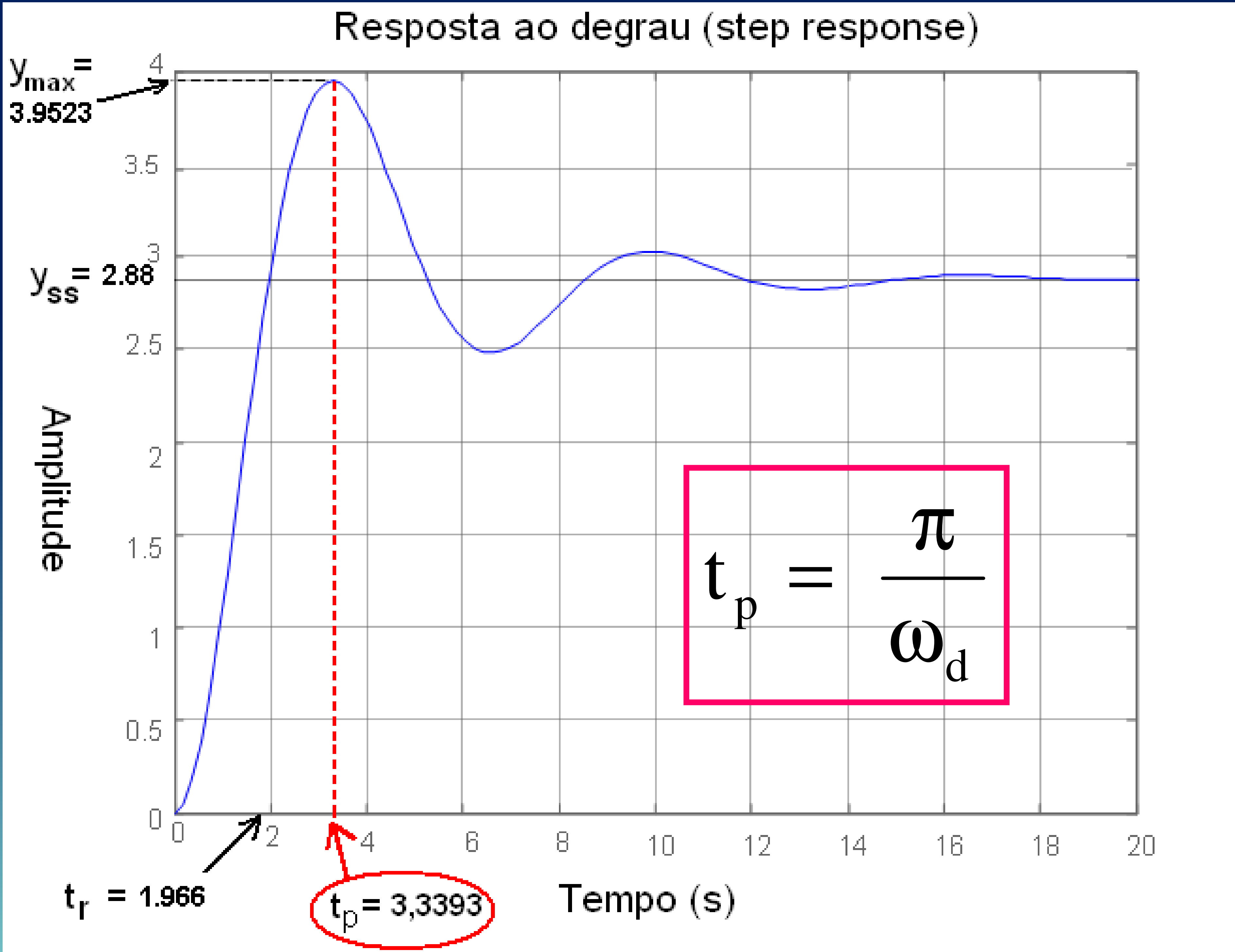
(*peak time*)

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\omega_d t = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_d t = 0, \; \pi, \; 2\pi, \; 3\pi, \; \cdots$$

$$\Rightarrow \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$t_p = \pi / \omega_d$

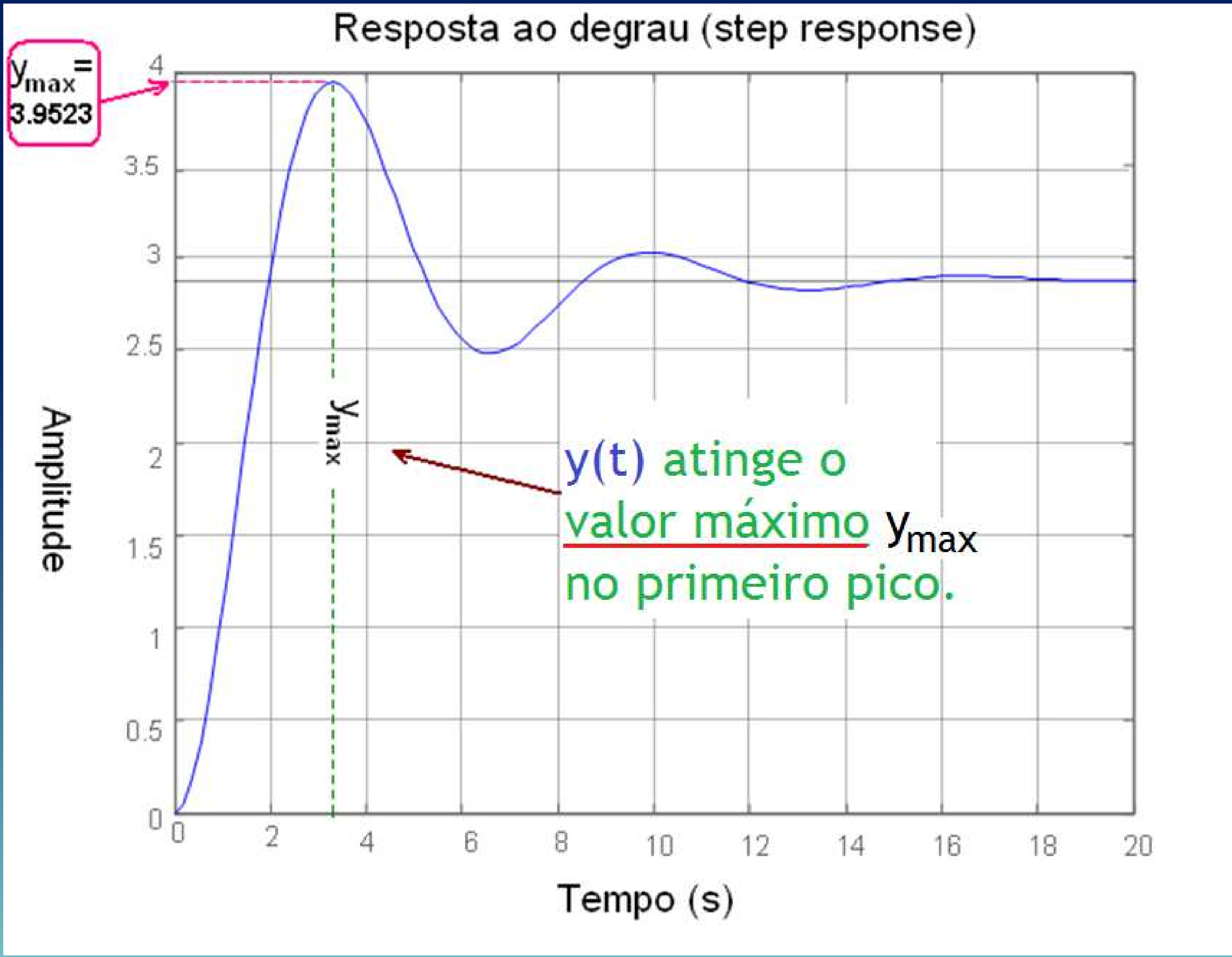

Resposta ao degrau (step response)
y_{max} = 3.9523
y_{ss} = 2.88
Amplitude
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
t_r = 1.966
t_p = 3,3393
Tempo (s)
$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

overshoot

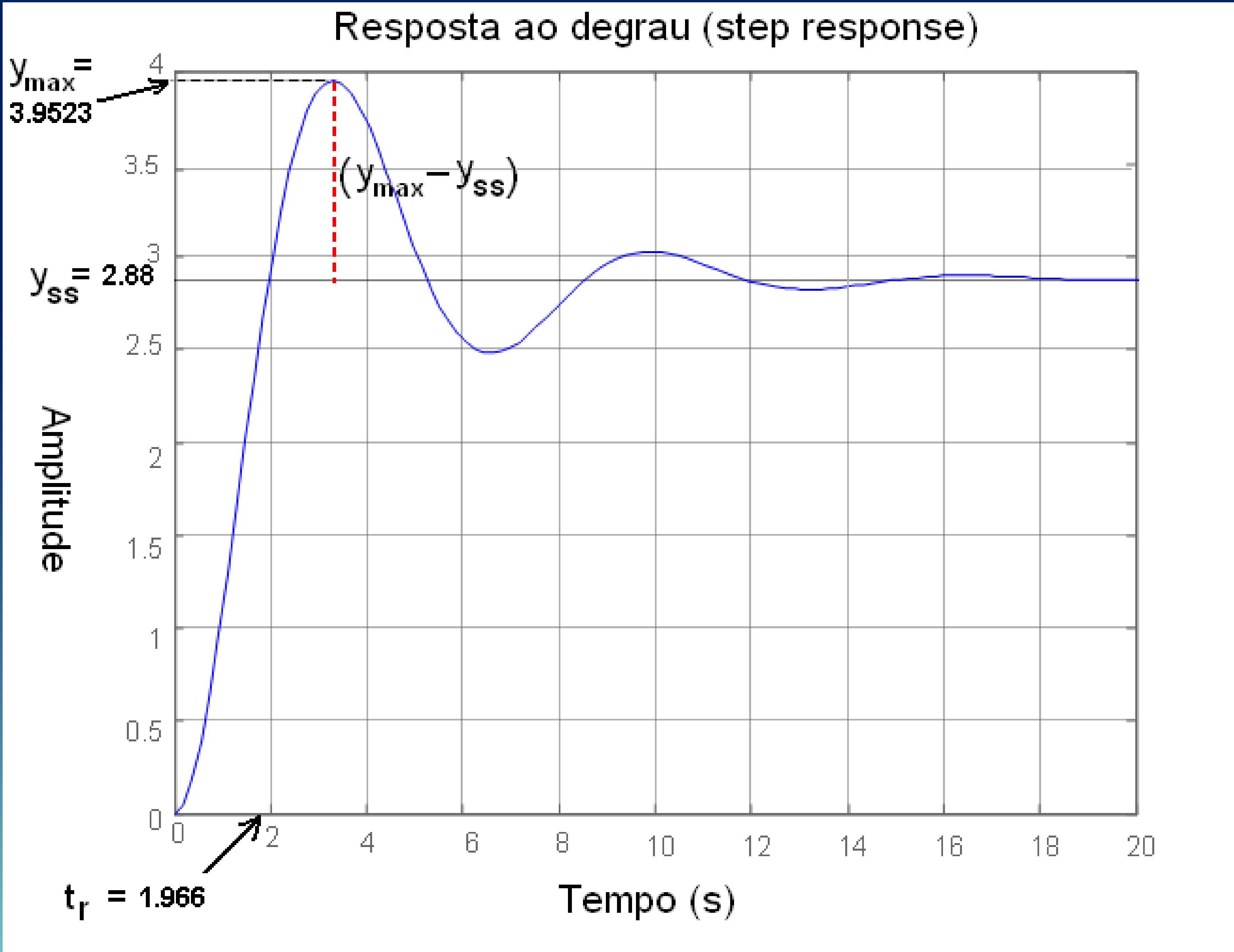
(*sobressinal máximo*)

M_p

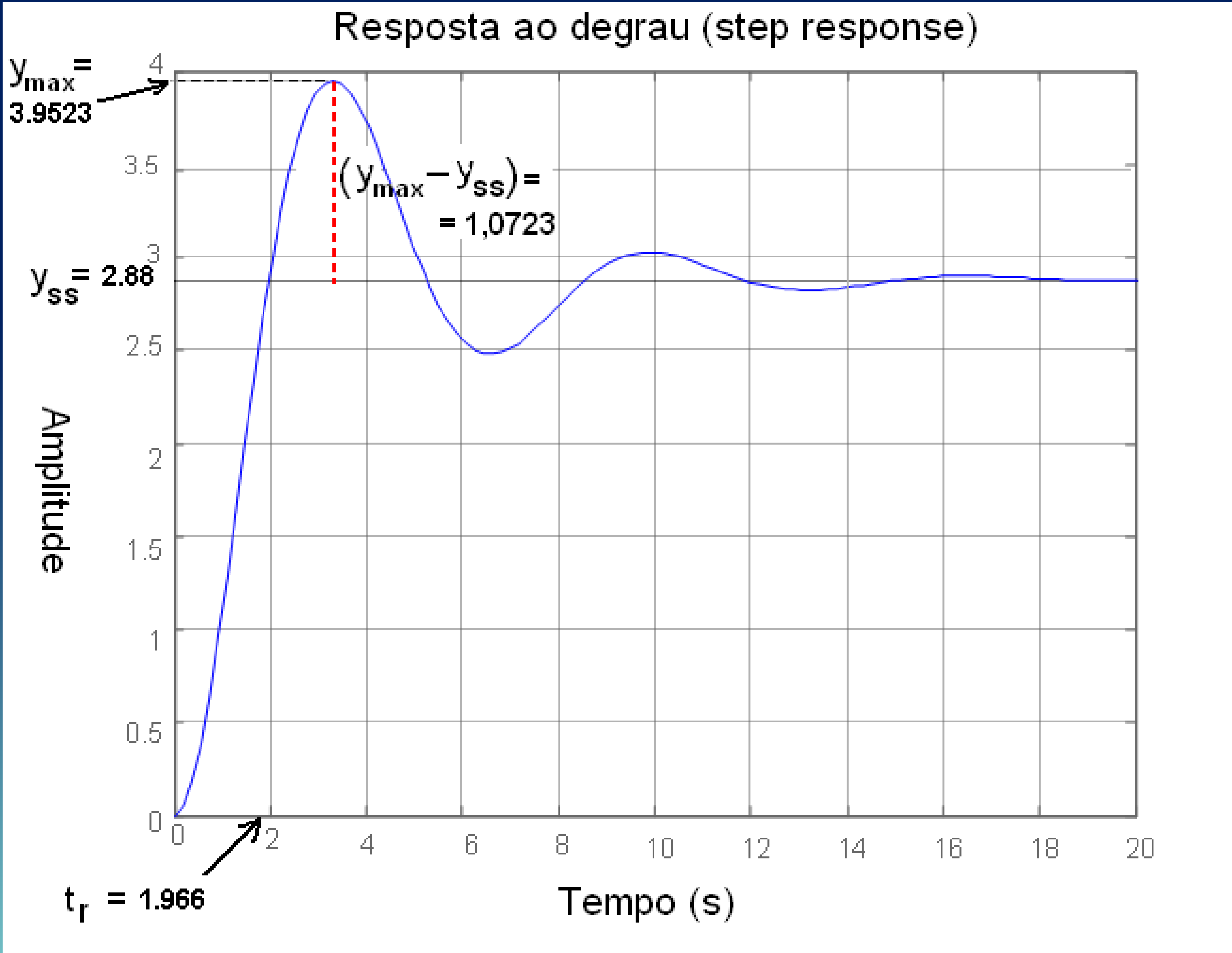
Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem

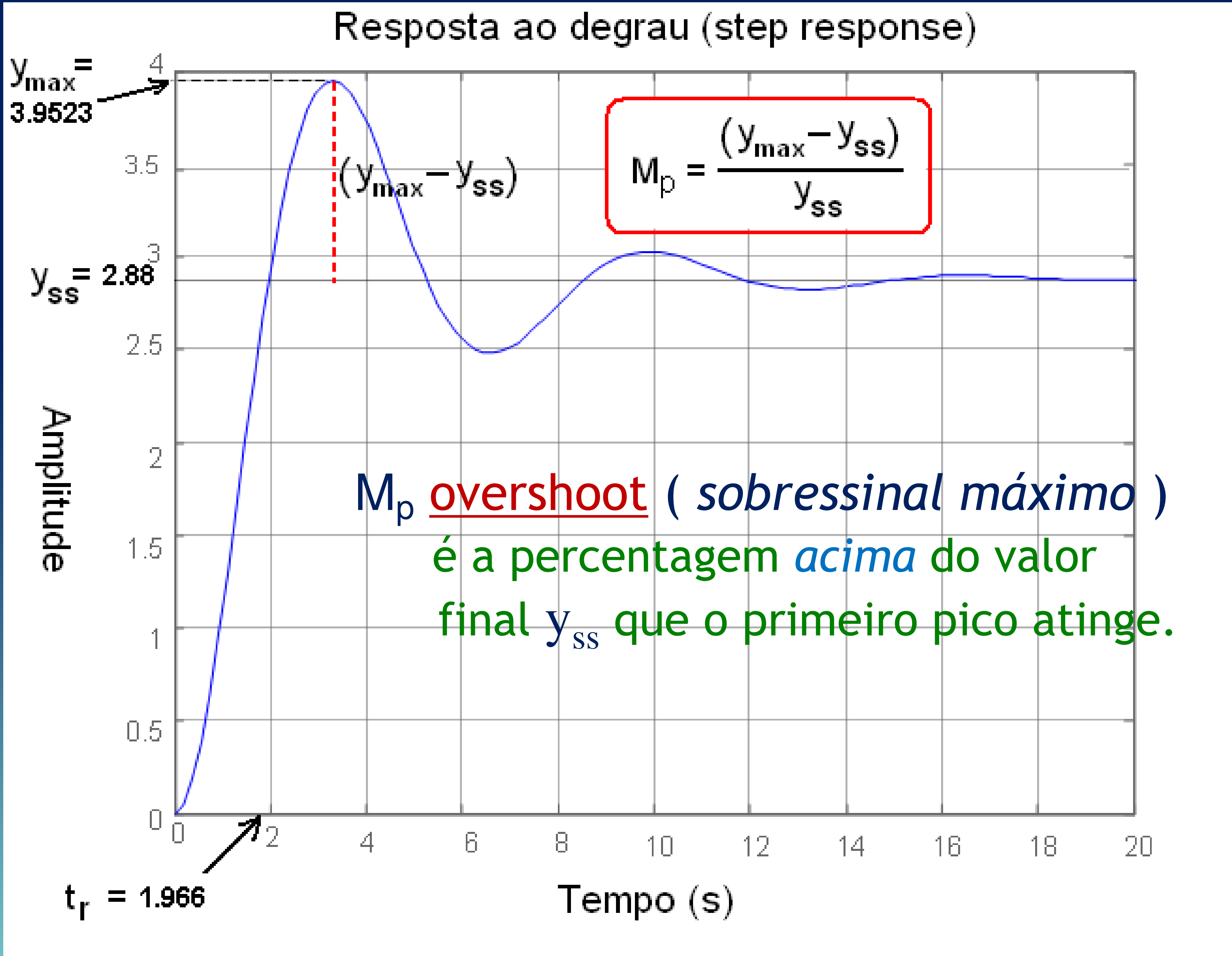


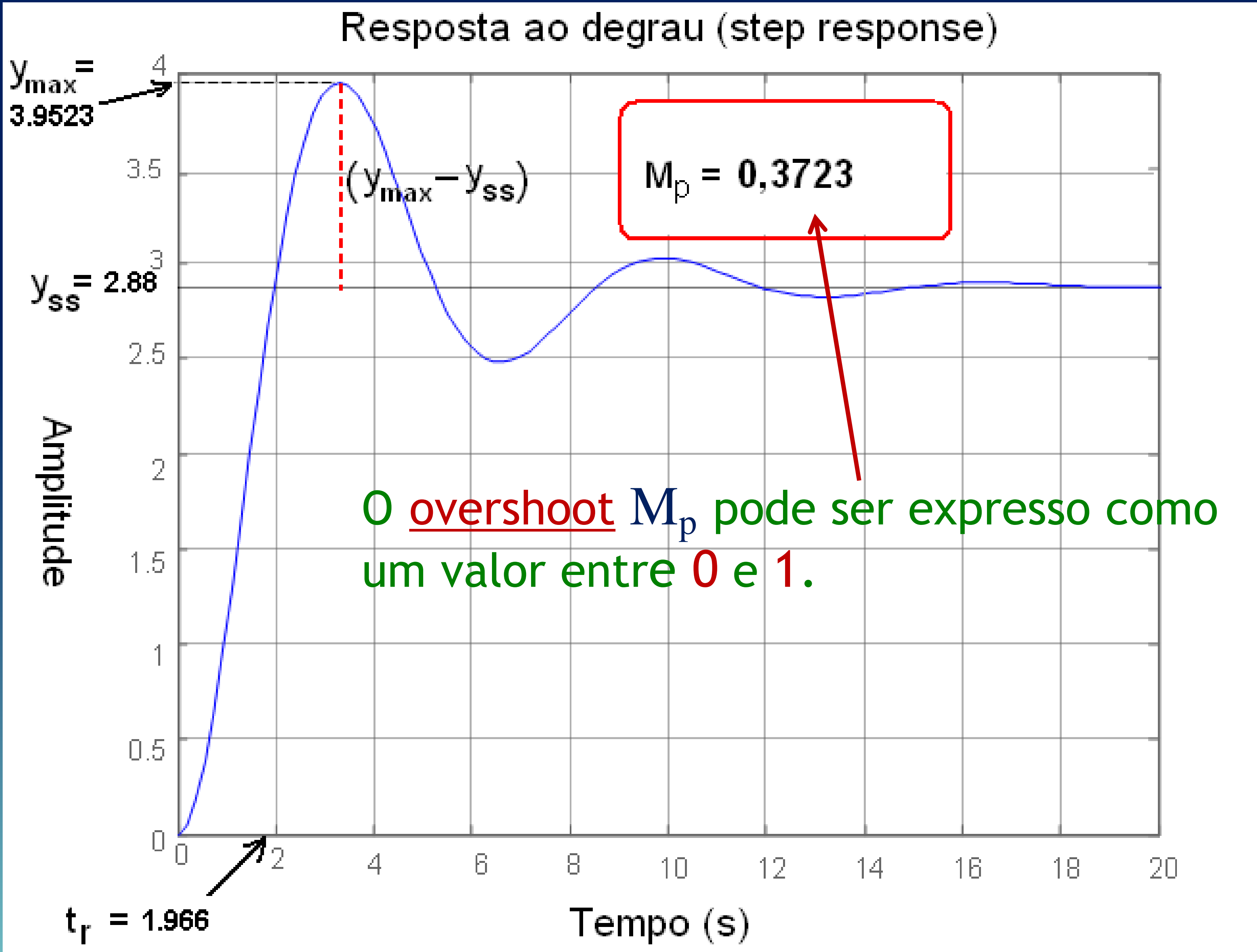
Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



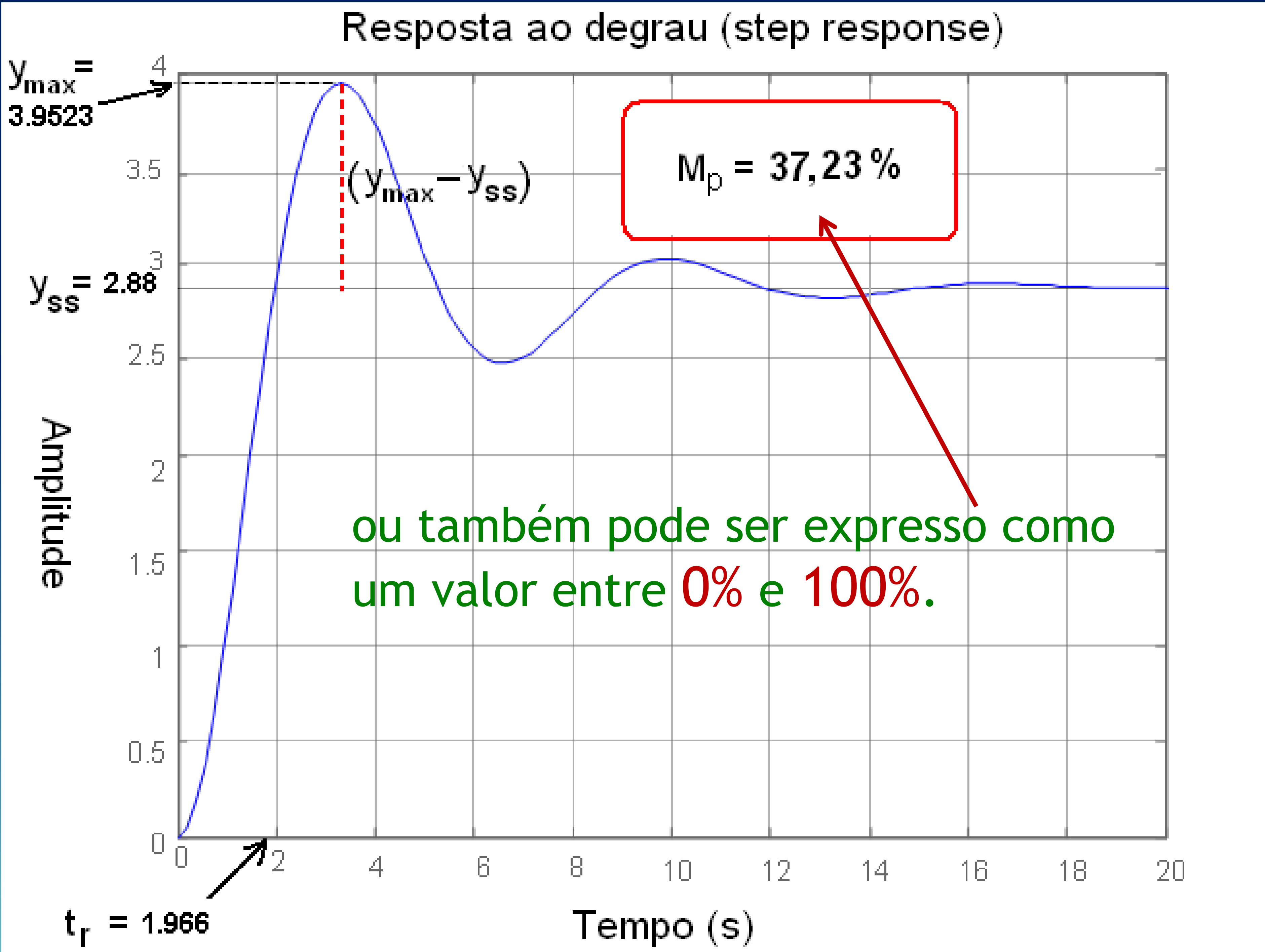
Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem




Resposta ao degrau (step response)
ymax= 3.9523
yss= 2.88
(ymax−yss)
Mp = (ymax−yss) / yss
Amplitude
Tempo (s)
tr = 1.966
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Mp overshoot (sobressinal máximo)
é a percentagem acima do valor
final yss que o primeiro pico atinge.

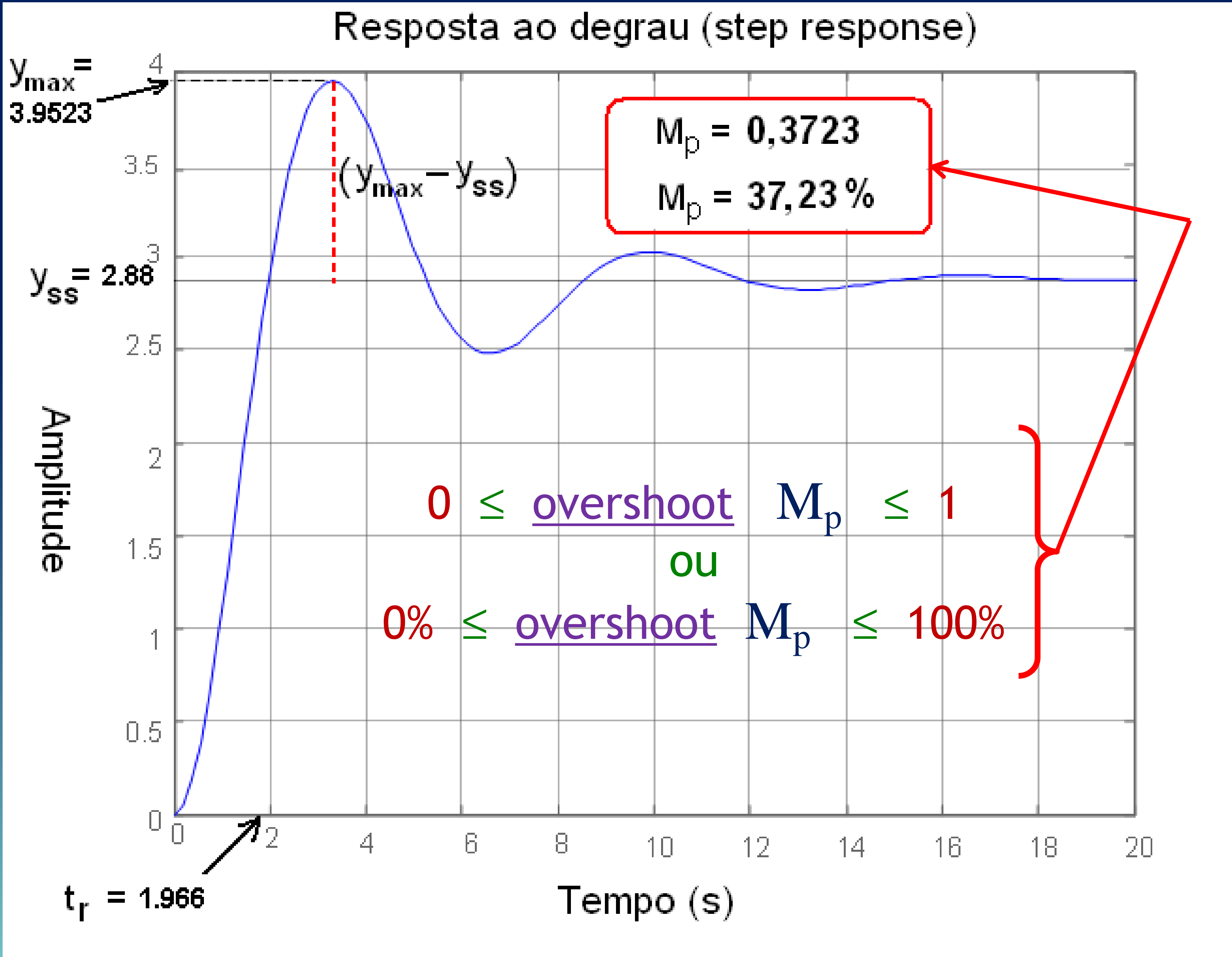


O overshoot M_p pode ser expresso como um valor entre 0 e 1.



ou também pode ser expresso como um valor entre 0% e 100%.

Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



overshoot

(sobressinal máximo)

$y_{ss} = K_o$ *(ganho)*

ζ *(coeficiente de amortecimento),*

ω_n *(frequência natural)*

$$M_p = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \quad \text{ou} \quad M_p = \frac{y(t_p) - K_o}{K_o}$$

$$M_p = \frac{K_o\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t_p}\left(\overbrace{\cos(\pi)}^{-1} - \overbrace{\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\mathrm{sen}(\pi)}^{0}\right)\right] - K_o}{K_o}$$

$$M_p = \frac{\cancel{K_o} + K_o e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)} - \cancel{K_o}}{K_o}$$

overshoot

(*sobressinal máximo*)

$$M_p = \frac{K_o \, e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{K_o}$$

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

M_p depende apenas de ζ (*coeficiente de amortecimento*)

overshoot

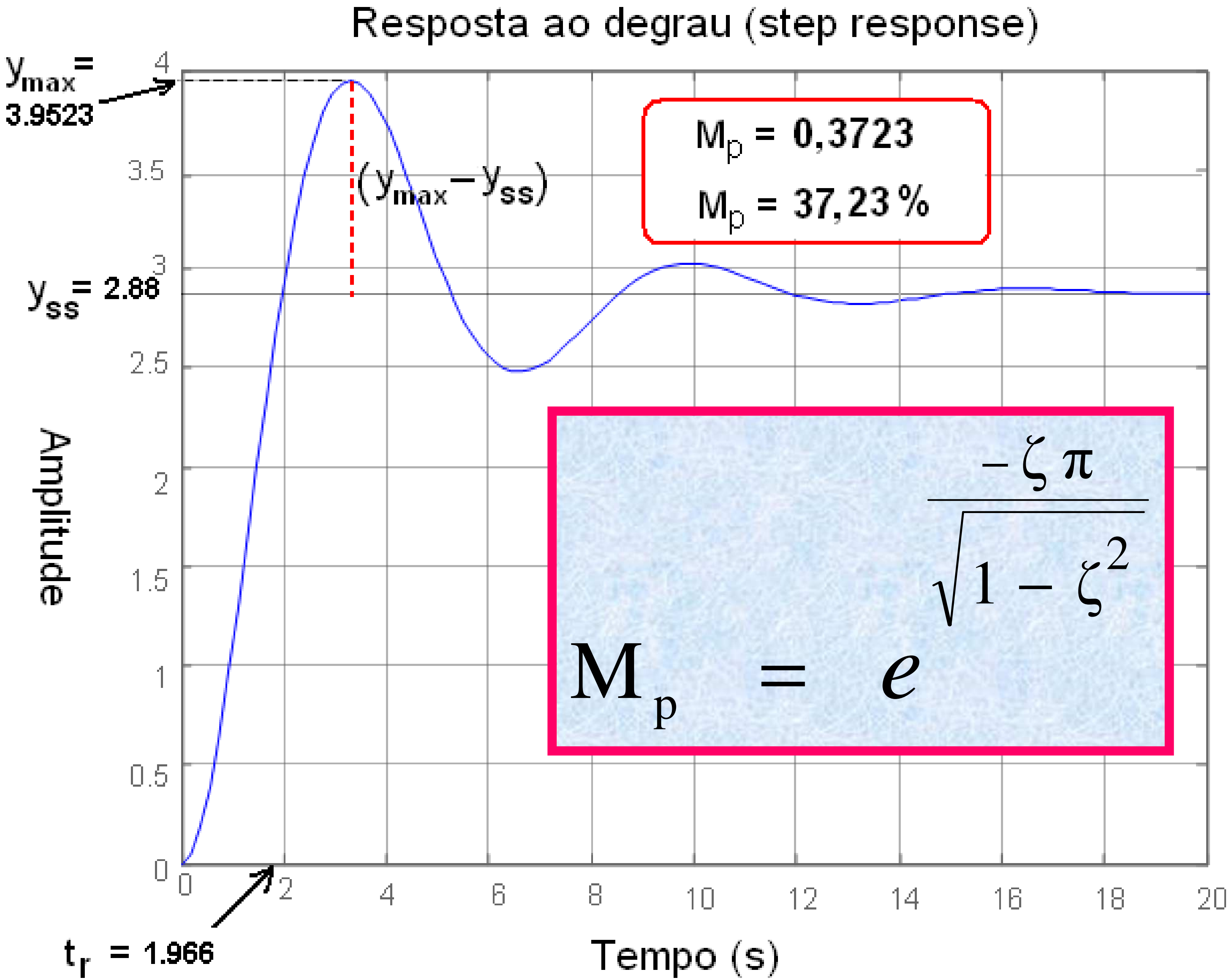
(*sobressinal máximo*)

M_p depende apenas de ζ (*coeficiente de amortecimento*)

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

ou

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\,\%$$



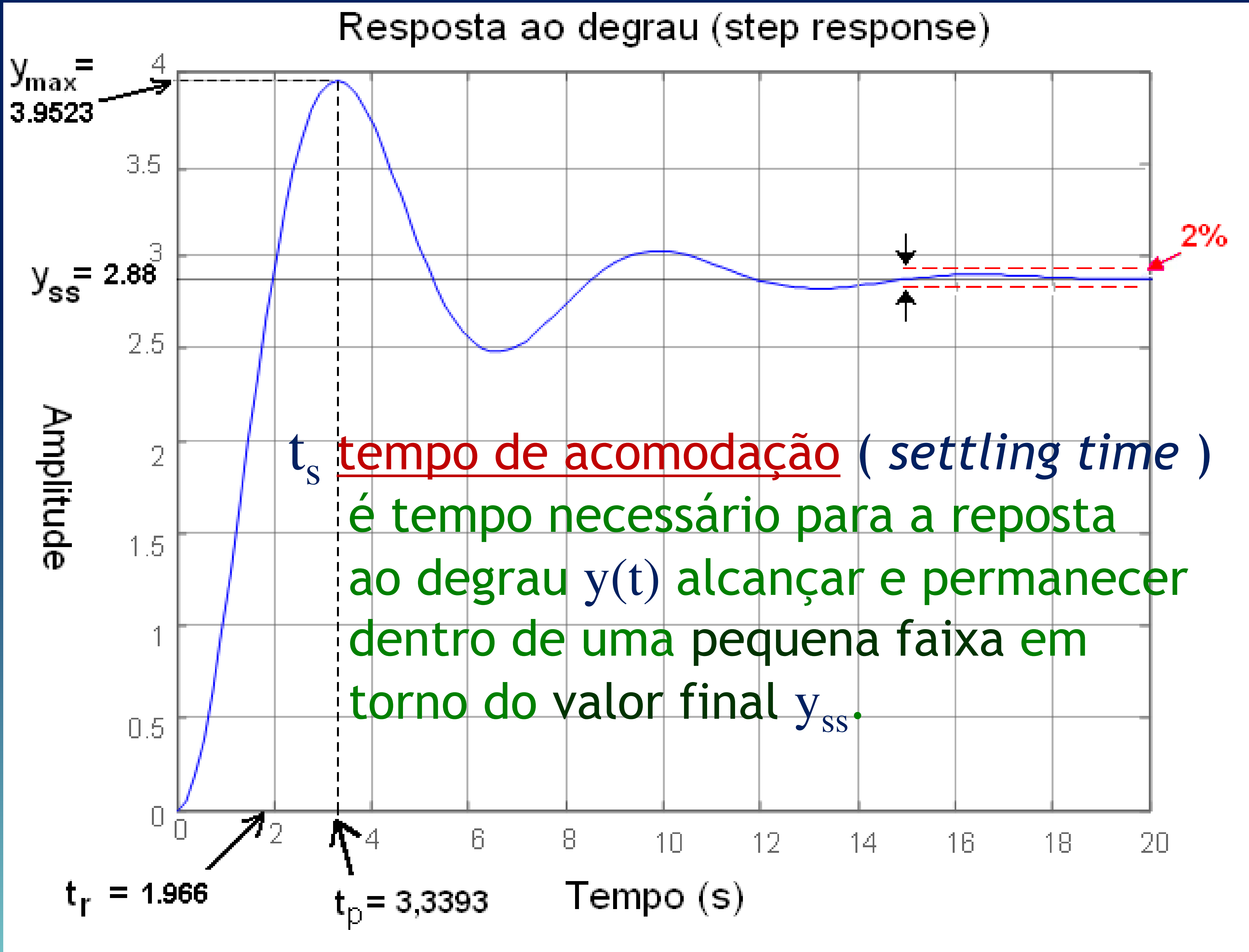
$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

tempo de acomodação

(*settling time*)

t_s

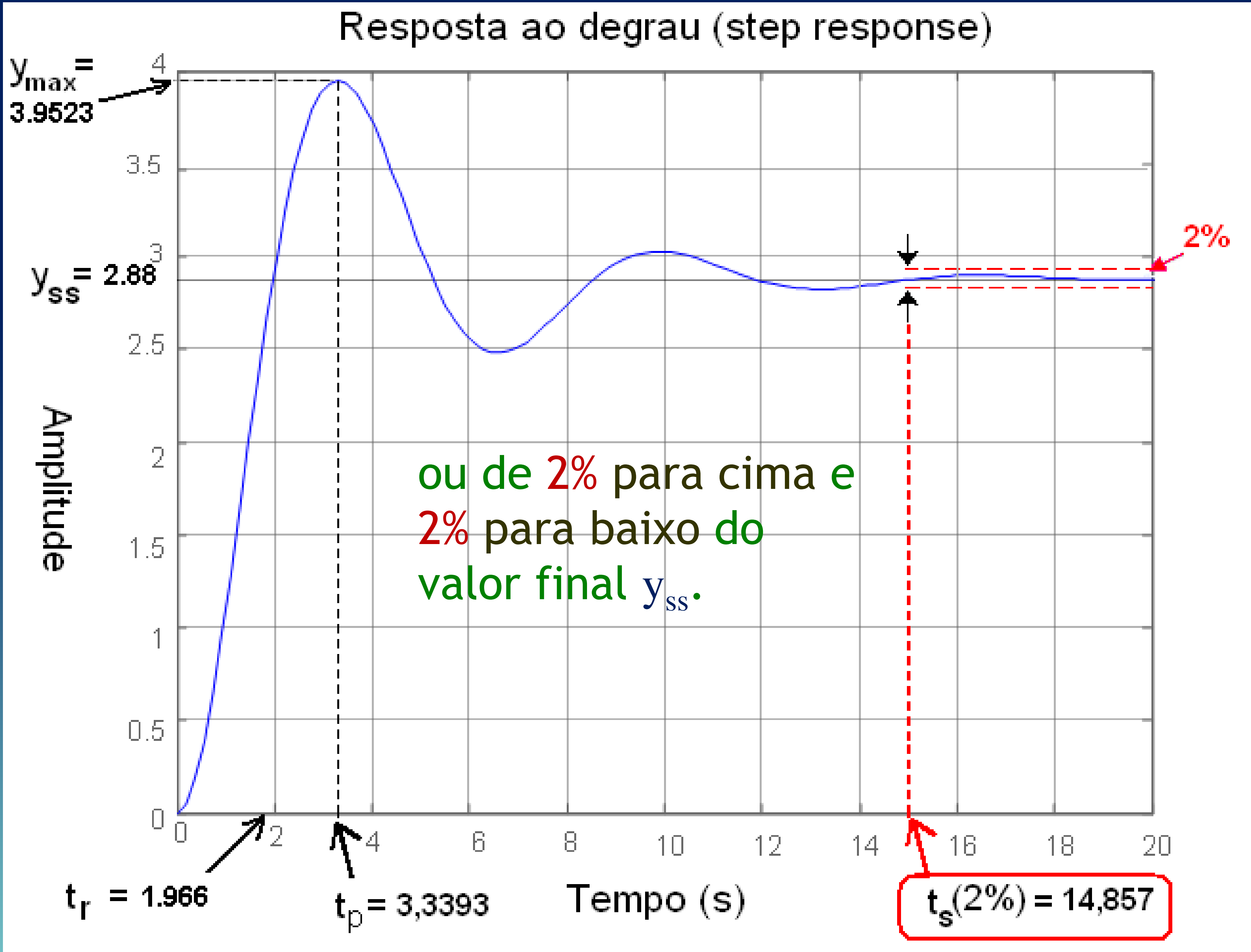
Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



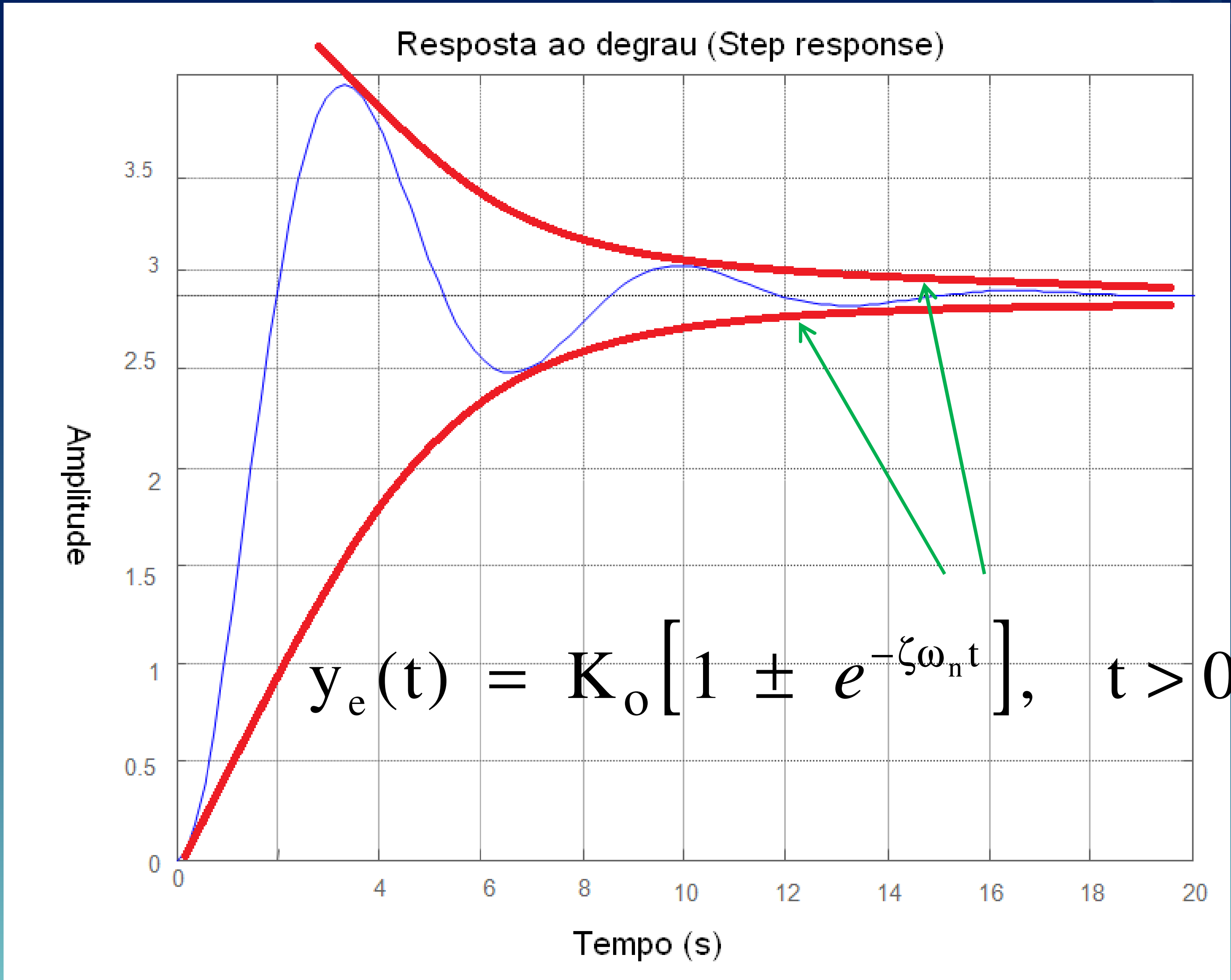
t_s tempo de acomodação (*settling time*)
é tempo necessário para a reposta ao degrau $y(t)$ alcançar e permanecer dentro de uma pequena faixa em torno do valor final y_{ss}.

Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem

Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



O tempo de acomodação (*settling time*) é obtido a partir das equações de $y_e(t)$, as curvas envoltórias de $y(t)$.



$$y_e(t) = K_o\left[1 \pm e^{-\zeta\omega_n t}\right], \quad t > 0$$

O tempo de acomodação (*settling time*) t_s é obtido fazendo

$$y_e(t_s) \approx 1{,}05\ K_o$$

para o caso de t_s com 5% de tolerância, e

$$y_e(t_s) \approx 1{,}02\ K_o$$

para o caso de t_s com 2% de tolerância.

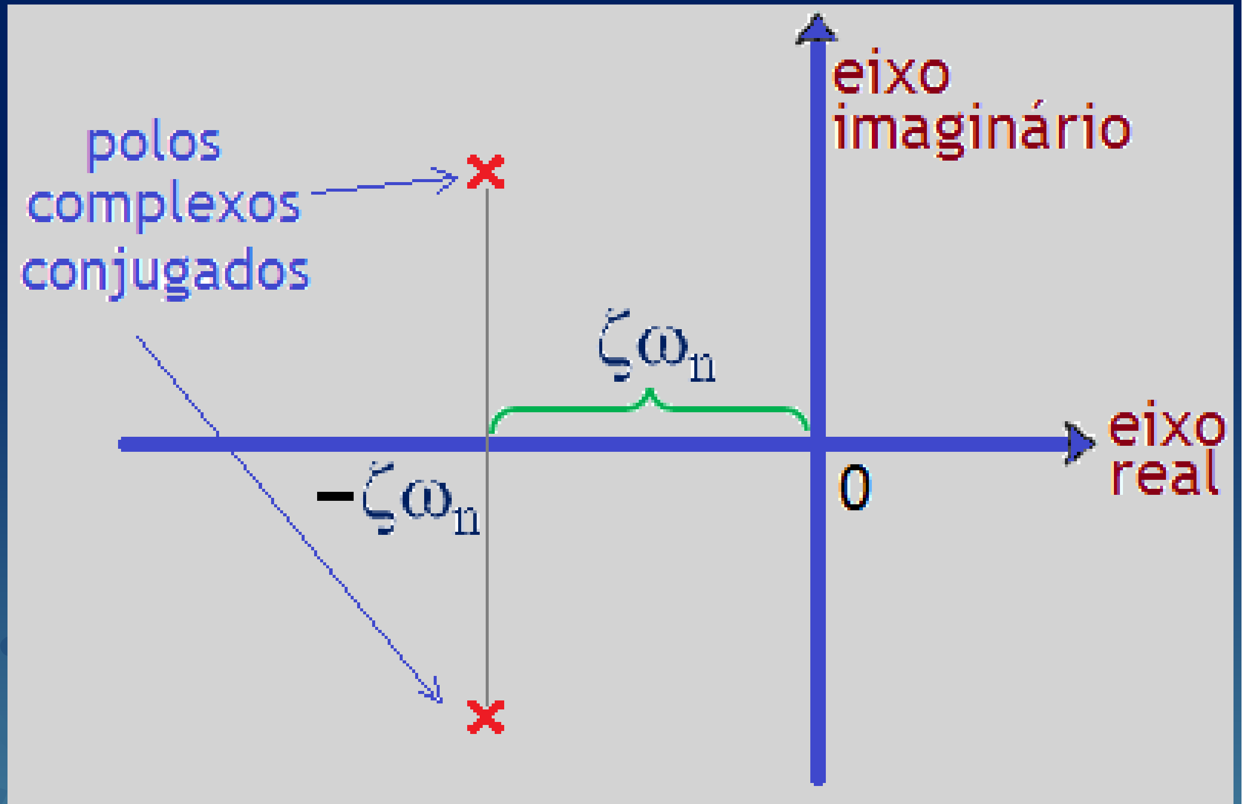
Os valores que se obtém são:

$$t_s(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

tempo de acomodação (*settling time*)

Note que o tempo de acomodação t_r é inversamente proporcional a $\zeta\omega_n$, que é a distância da parte real dos polos à origem.



portanto:

$$t_s(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

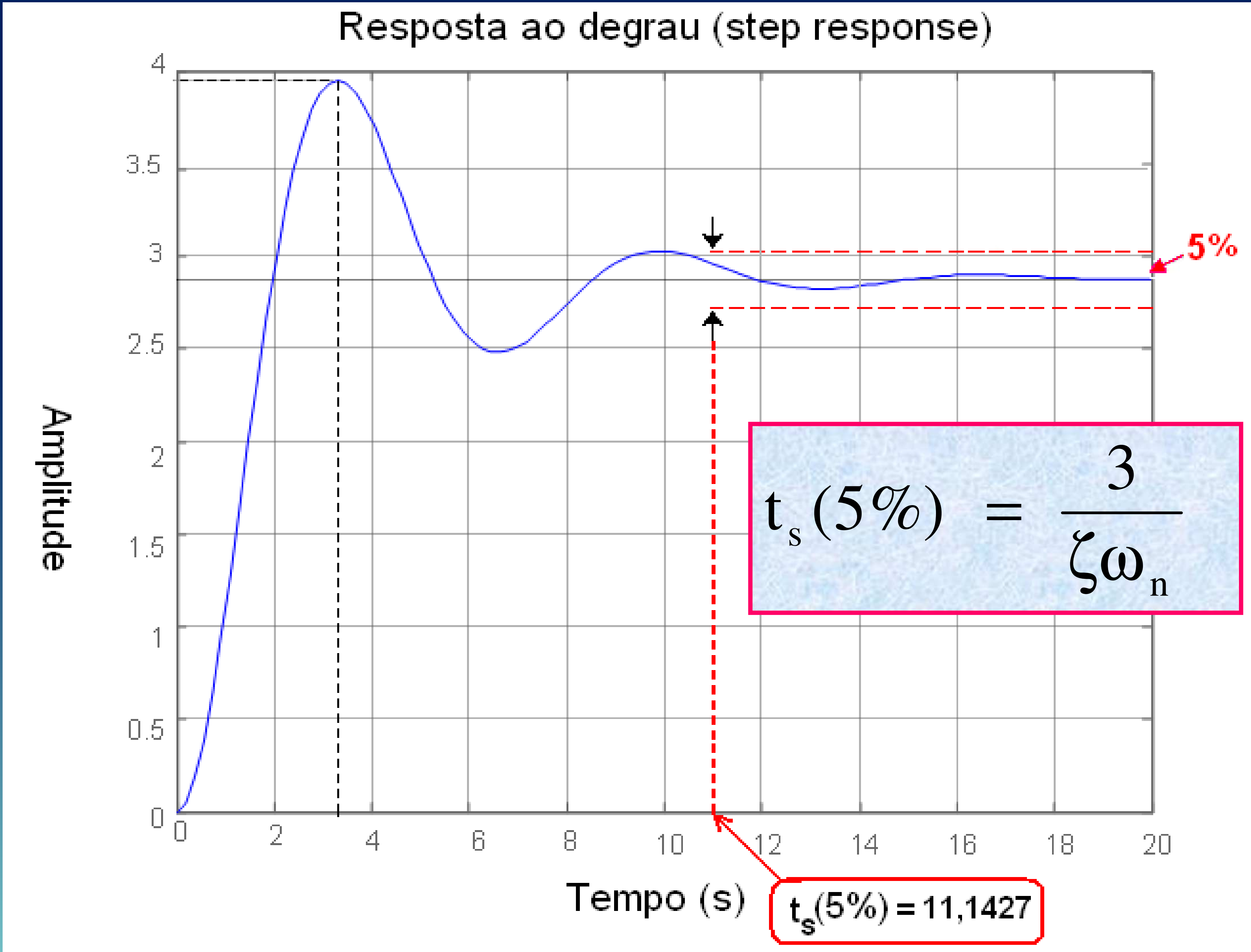
e

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$t_s(5\%) = 3 / \zeta\omega_n$

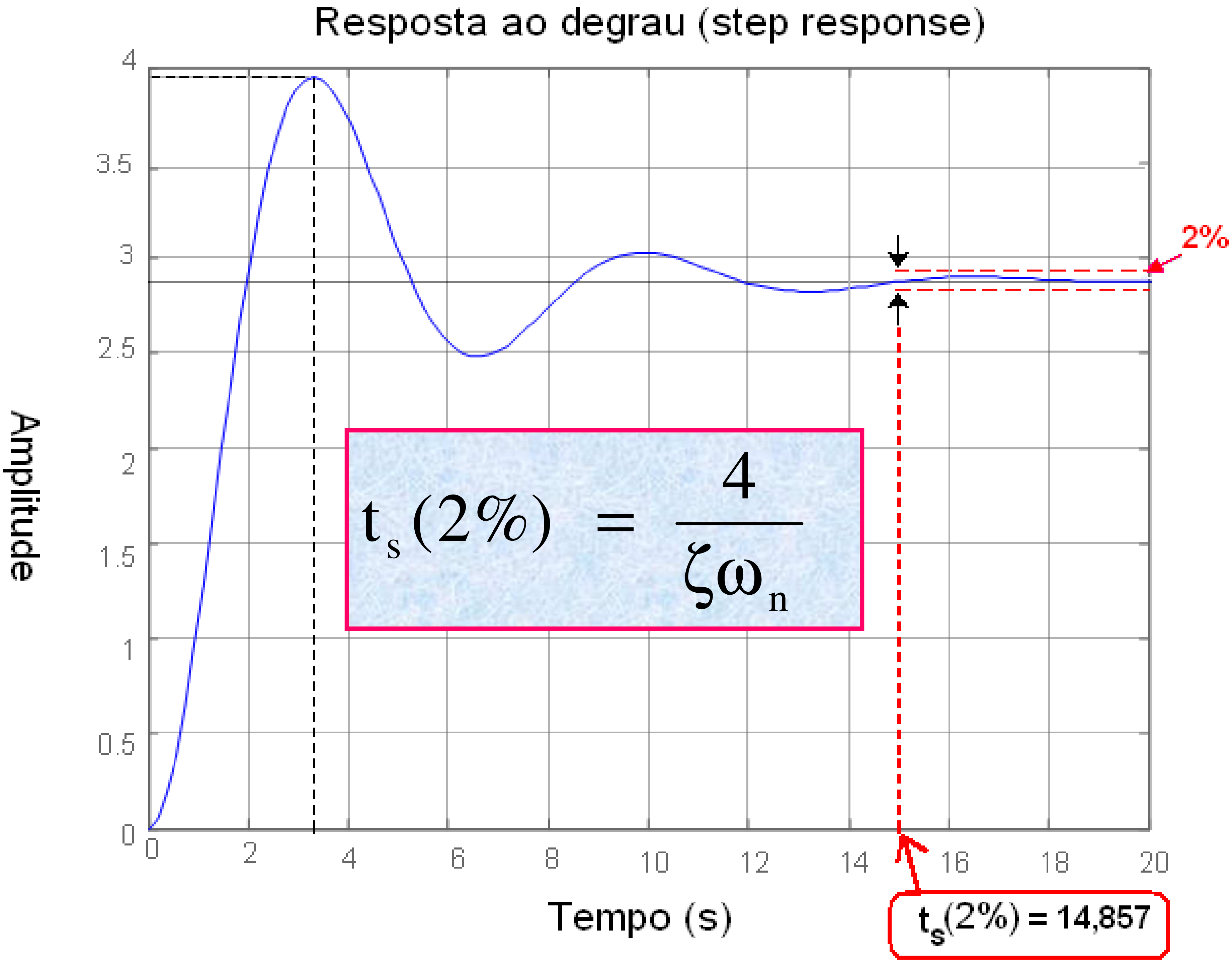
$t_s(2\%) = 4 / \zeta\omega_n$

Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



$$t_s(5\%) = \frac{3}{\zeta \omega_n}$$

Análise no domínio do tempo - Sistemas de 2ª ordem



$$t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Observe que vimos aqui 3 casos

$$0 < \zeta < 1$$

$$\zeta = 1$$

$$\zeta > 1$$

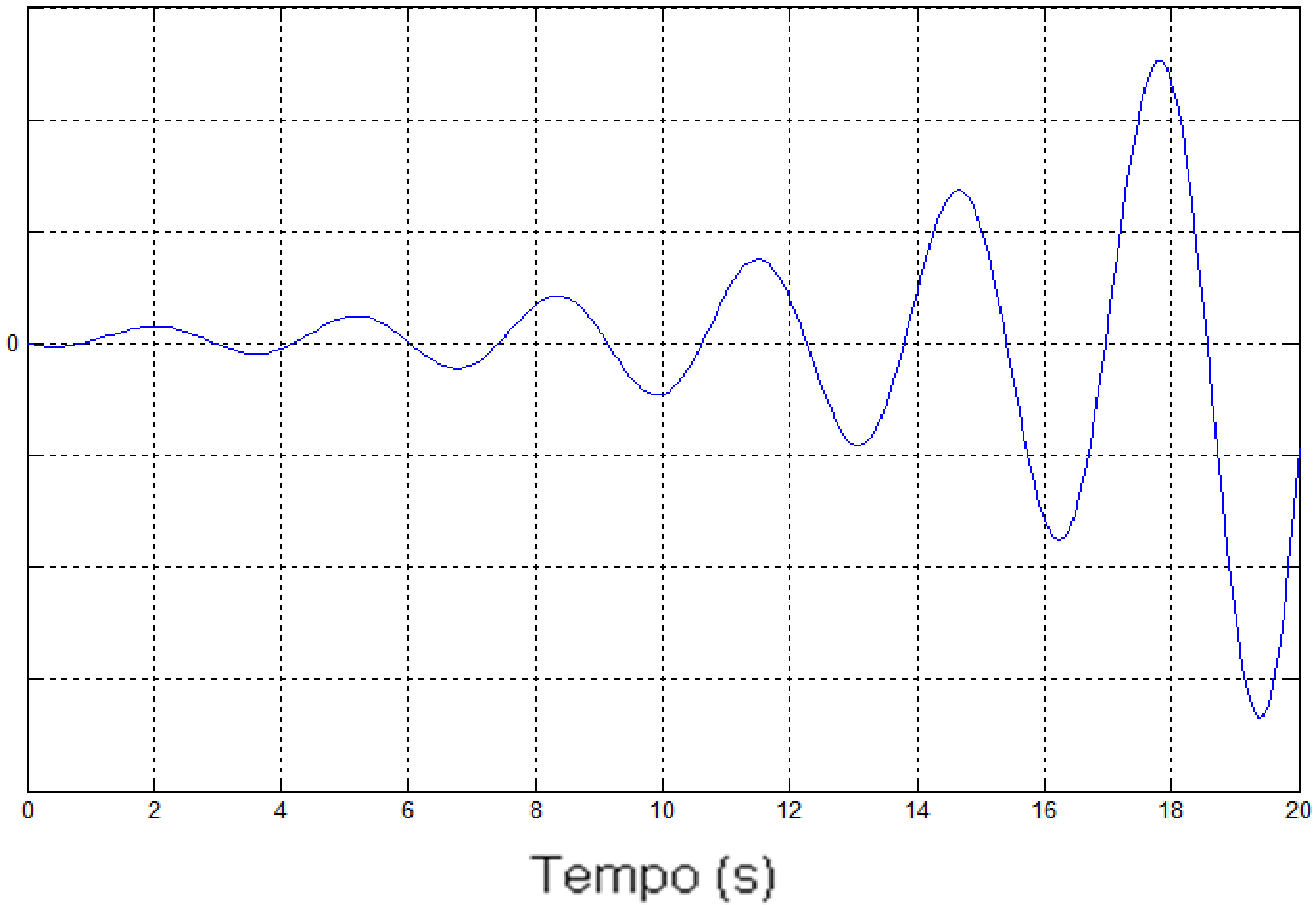
ou seja:

$$\zeta > 0$$

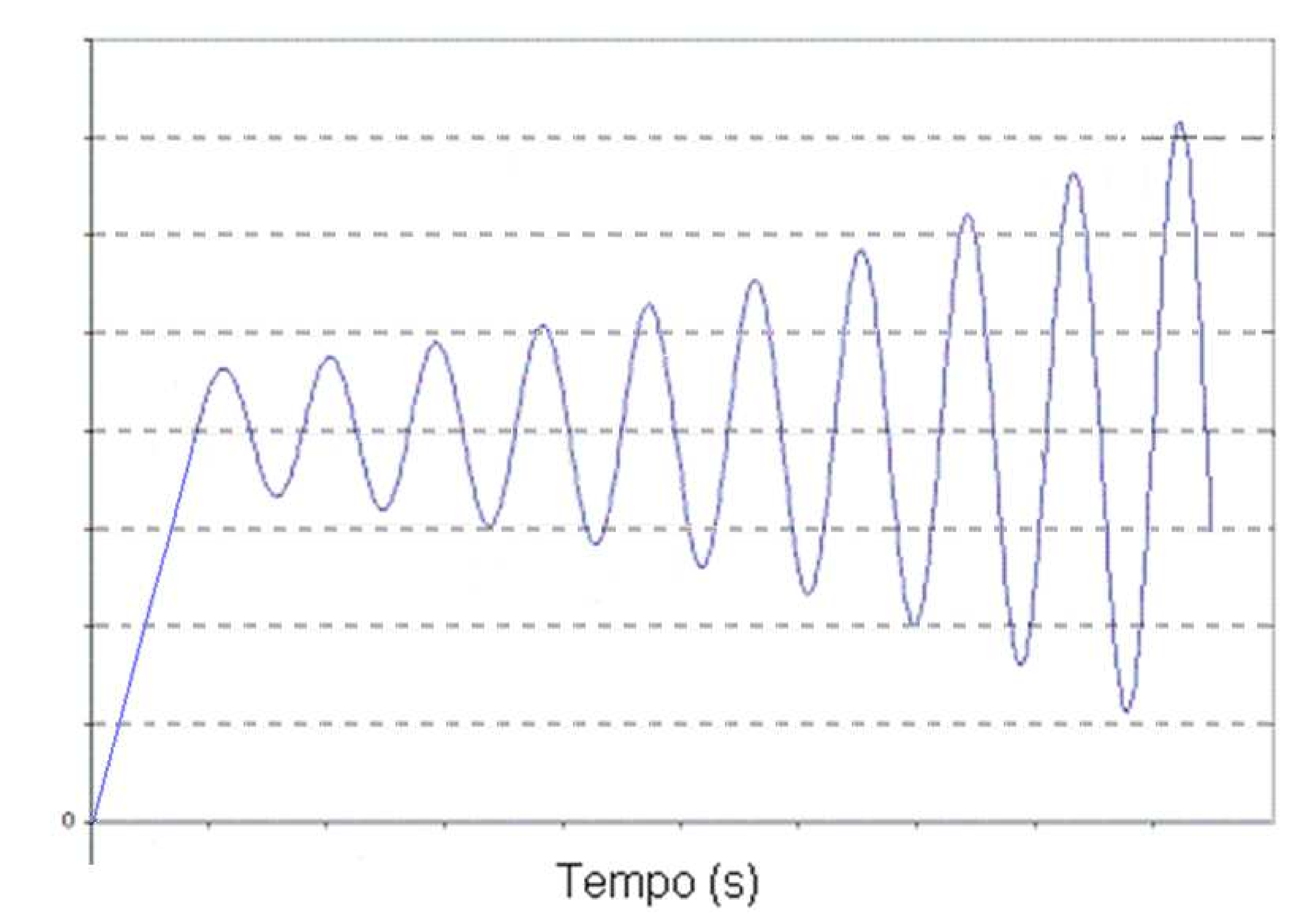
Entretanto, se $\zeta < 0$ então:

o **sistema** é **instável**

$\zeta < 0 \rightarrow$ sistema instável (um exemplo)



$\zeta < 0 \rightarrow$ sistema instável (outro exemplo)



FACULDADE
ENGENHARIA
Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!

Felippe de Souza
felippe@ubi.pt