Controlo de Sistemas

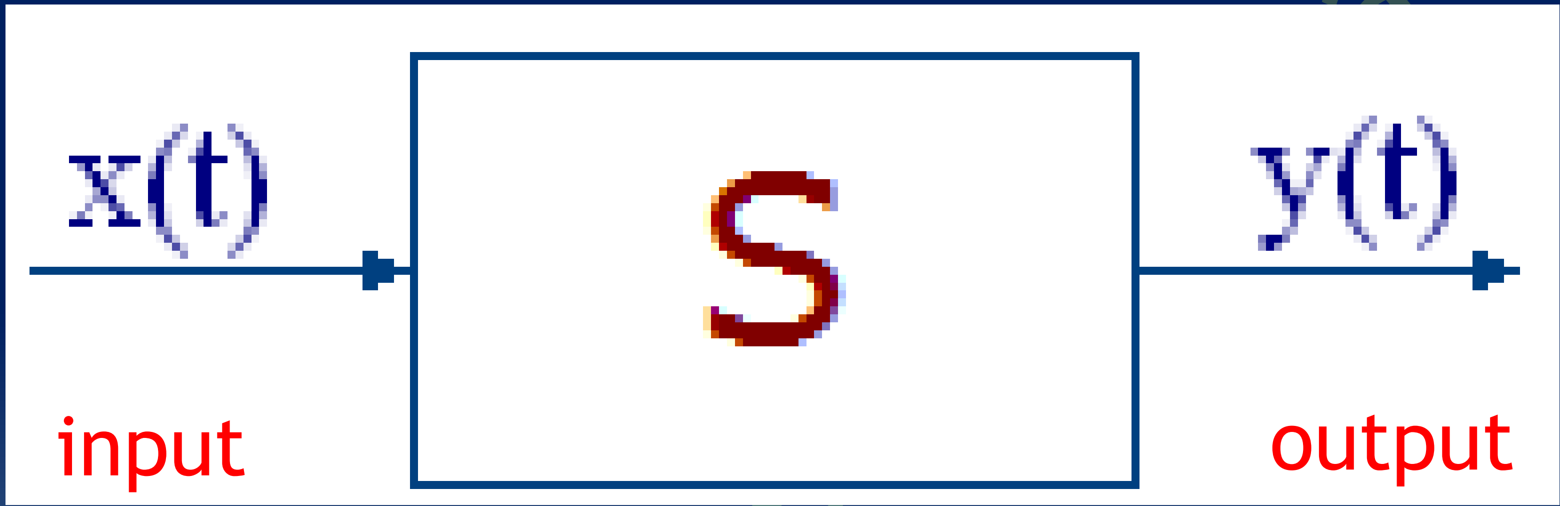
5

"Diagramas de blocos, erro e controladores PID"

(*Block Diagram, error & PID controllers*)

J. A. M. Felippe de Souza

Diagramas blocos & erro

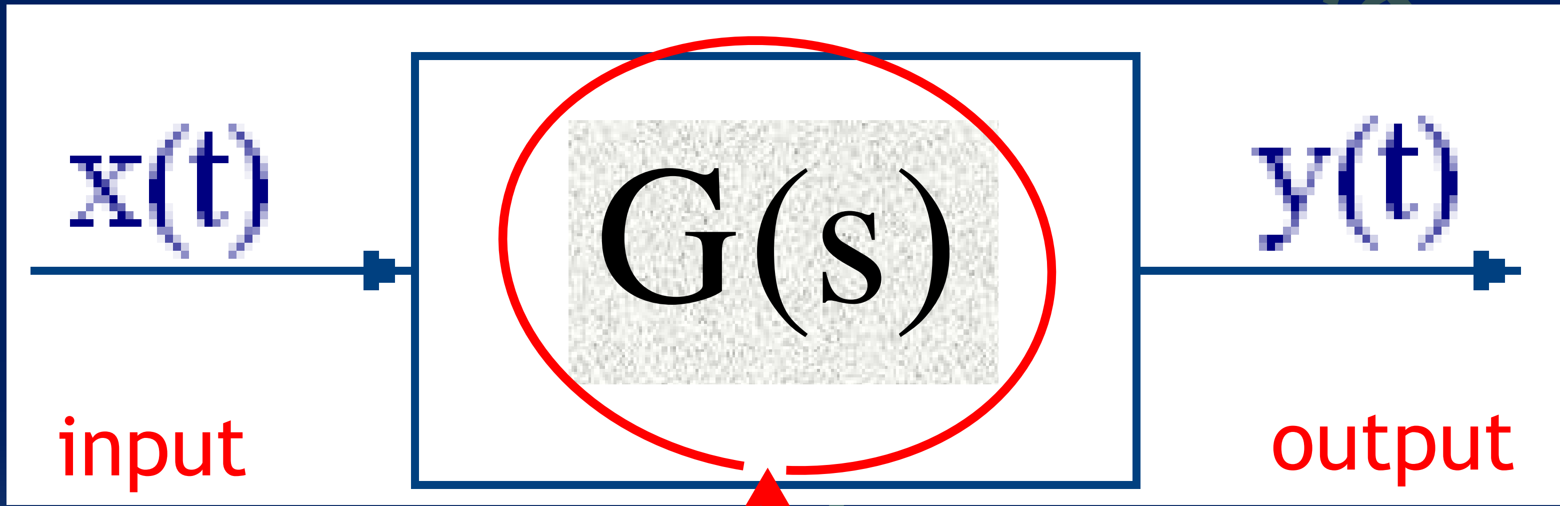


Bloco simples

Caixa preta

Black box

Caixa preta ou Black box:



Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

ou:

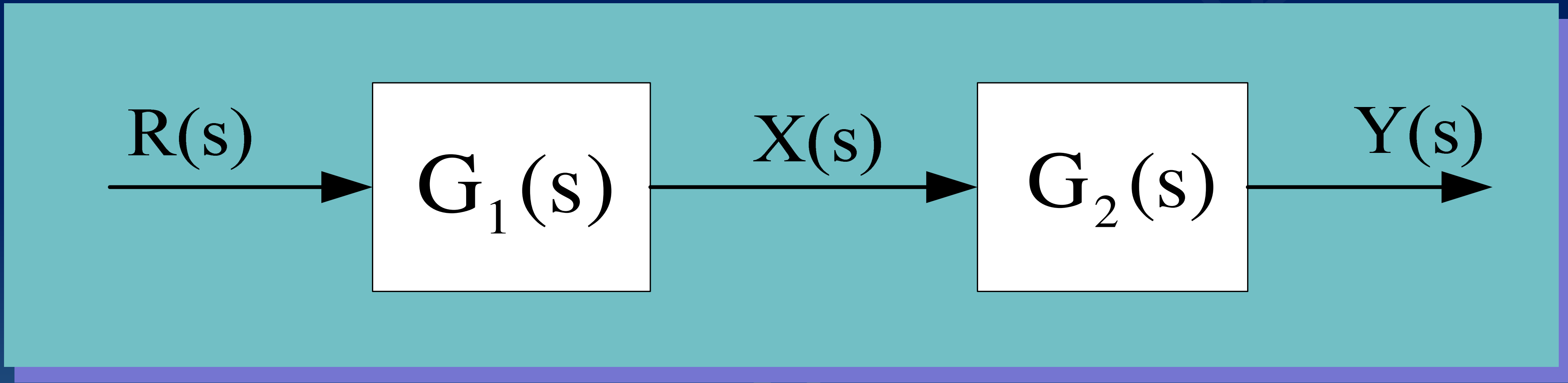
$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

ou seja,

SAÍDA = F.T. X ENTRADA

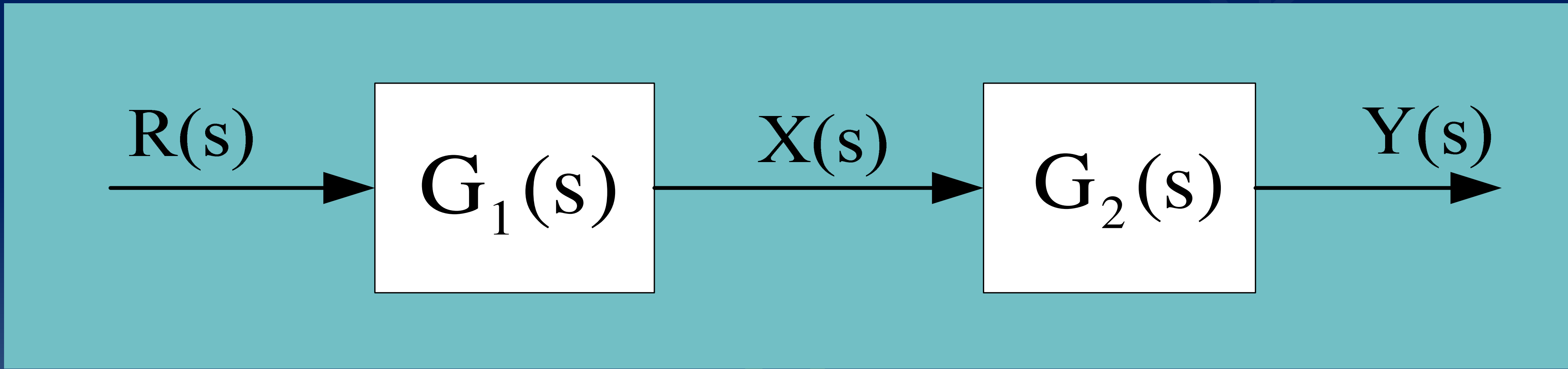
combinação de blocos

blocos em cascata



a saída X(s) do primeiro bloco é a entrada do segundo.

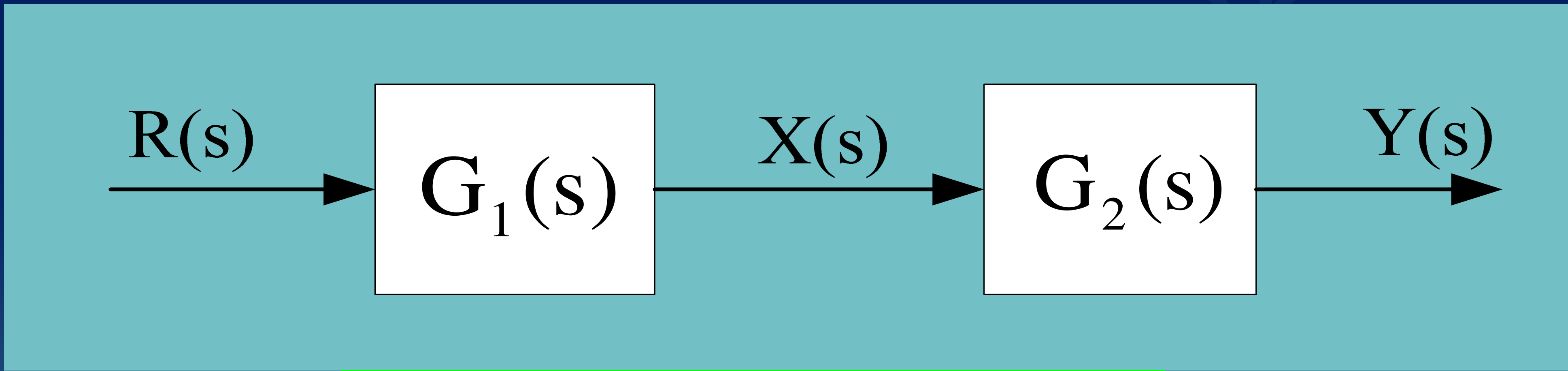
blocos em cascata



logo,

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{R(s)} \qquad G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

blocos em cascata



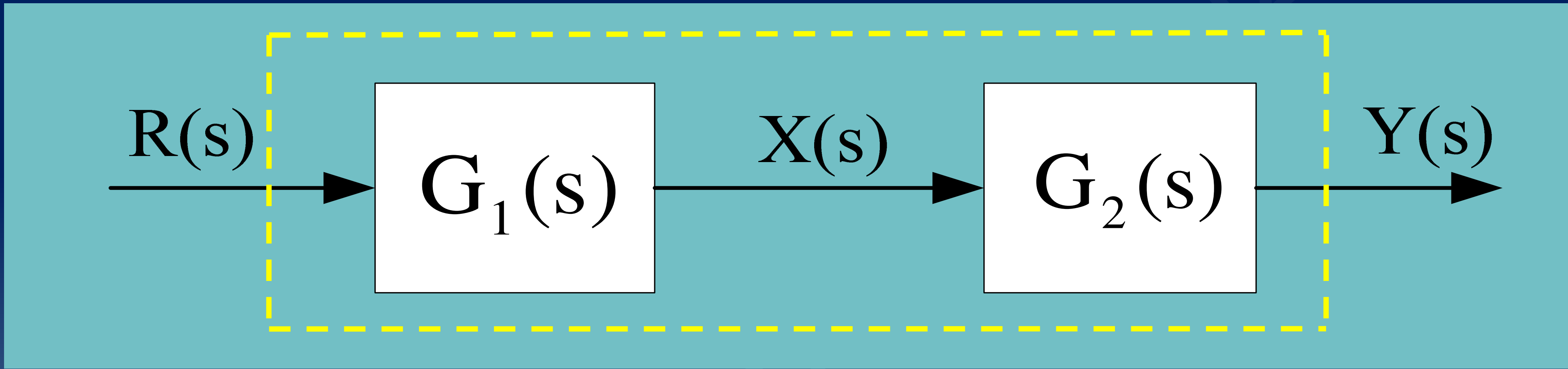
SAÍDA = F.T. x ENTRADA

ou seja,

$$\begin{cases} X(s) = G_1(s)\cdot R(s) & \text{para o } 1^{\text{º}} \text{ bloco} \\ Y(s) = G_2(s)\cdot X(s) & \text{para o } 2^{\text{º}} \text{ bloco} \end{cases}$$

SAÍDA = F.T. x ENTRADA

blocos em cascata



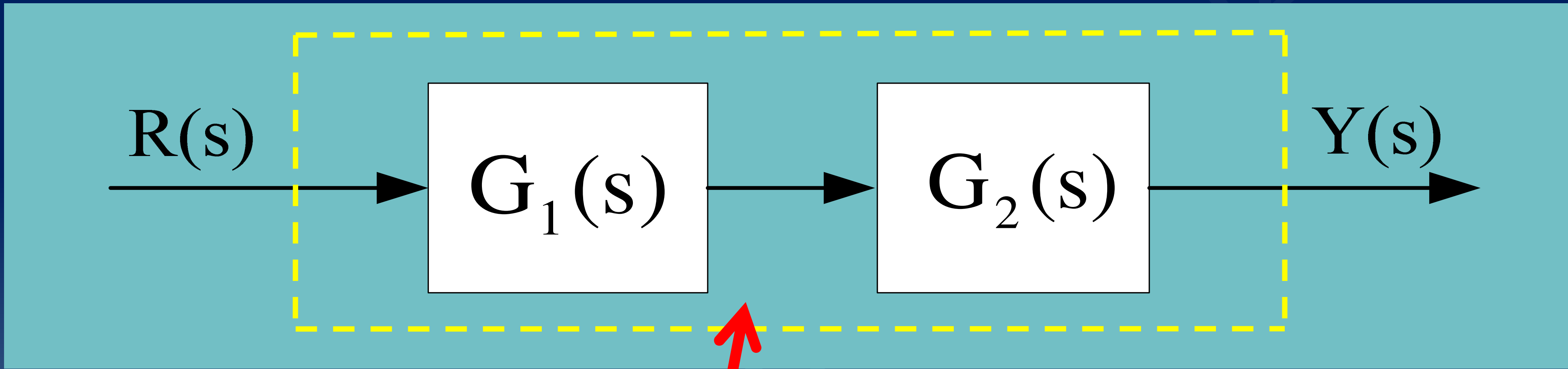
portanto:

$$Y(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot R(s)$$

ou,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

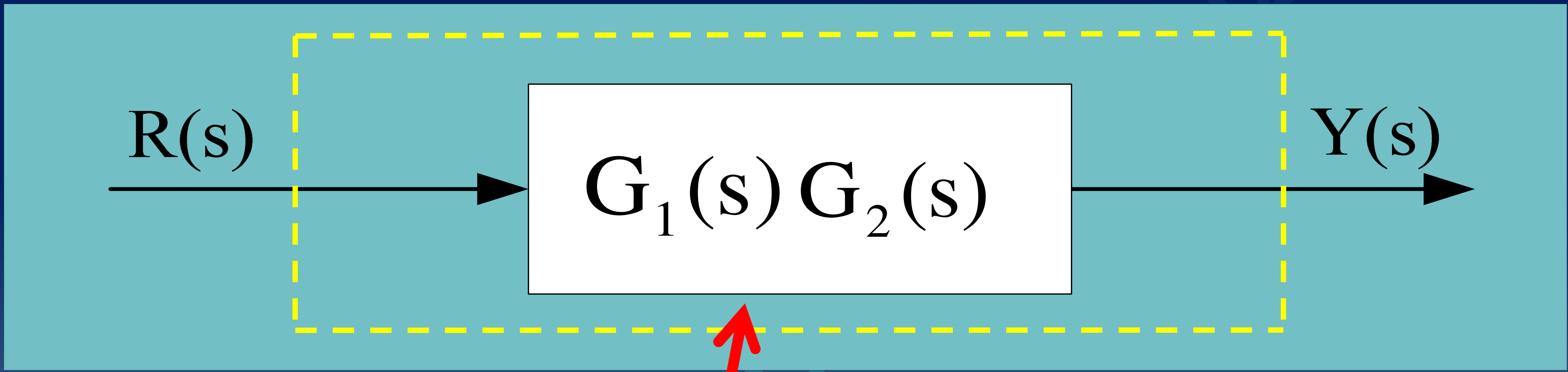
blocos em cascata



logo:

$$G_1(s) \cdot G_2(s)$$

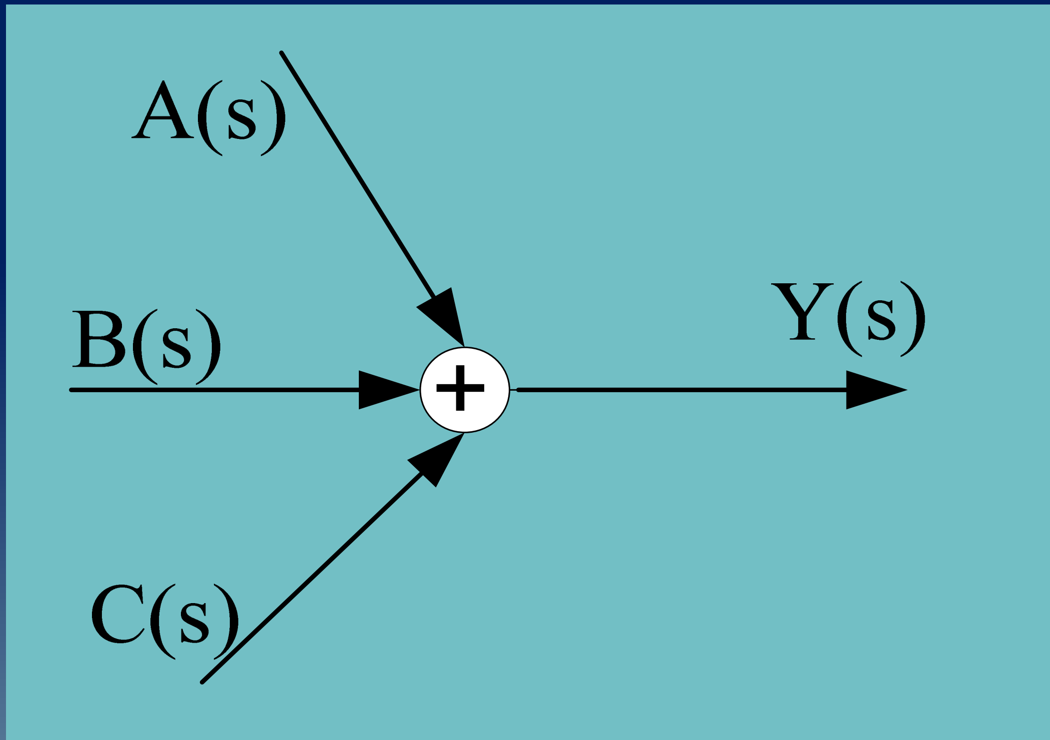
blocos em cascata



e portanto:

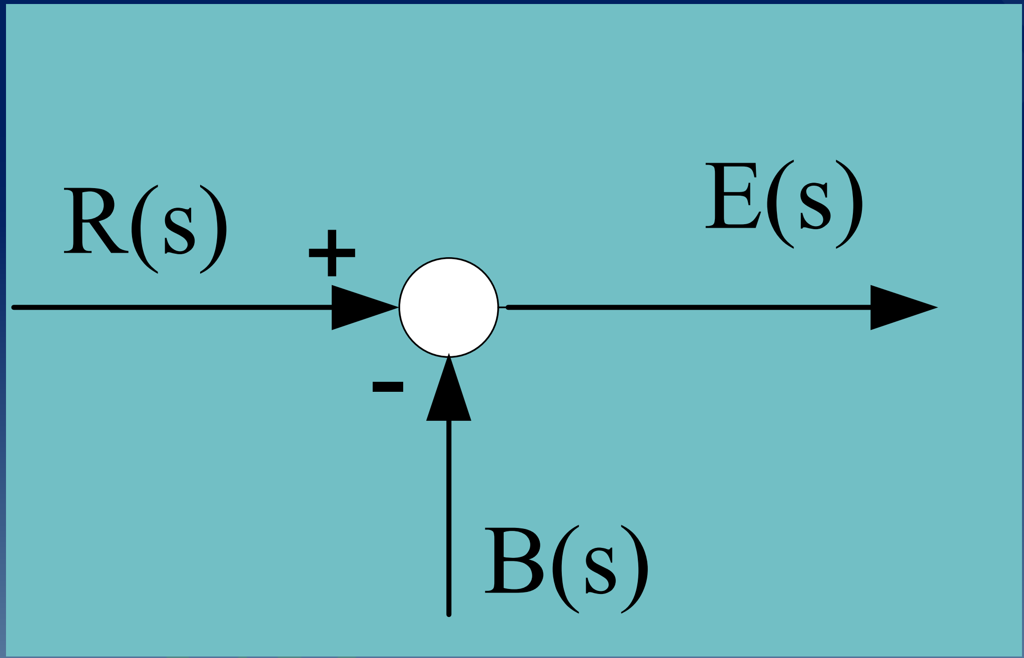
$$G_1(s) \cdot G_2(s)$$

somador



$$Y(s) = A(s) + B(s) + C(s)$$

detetor de erros



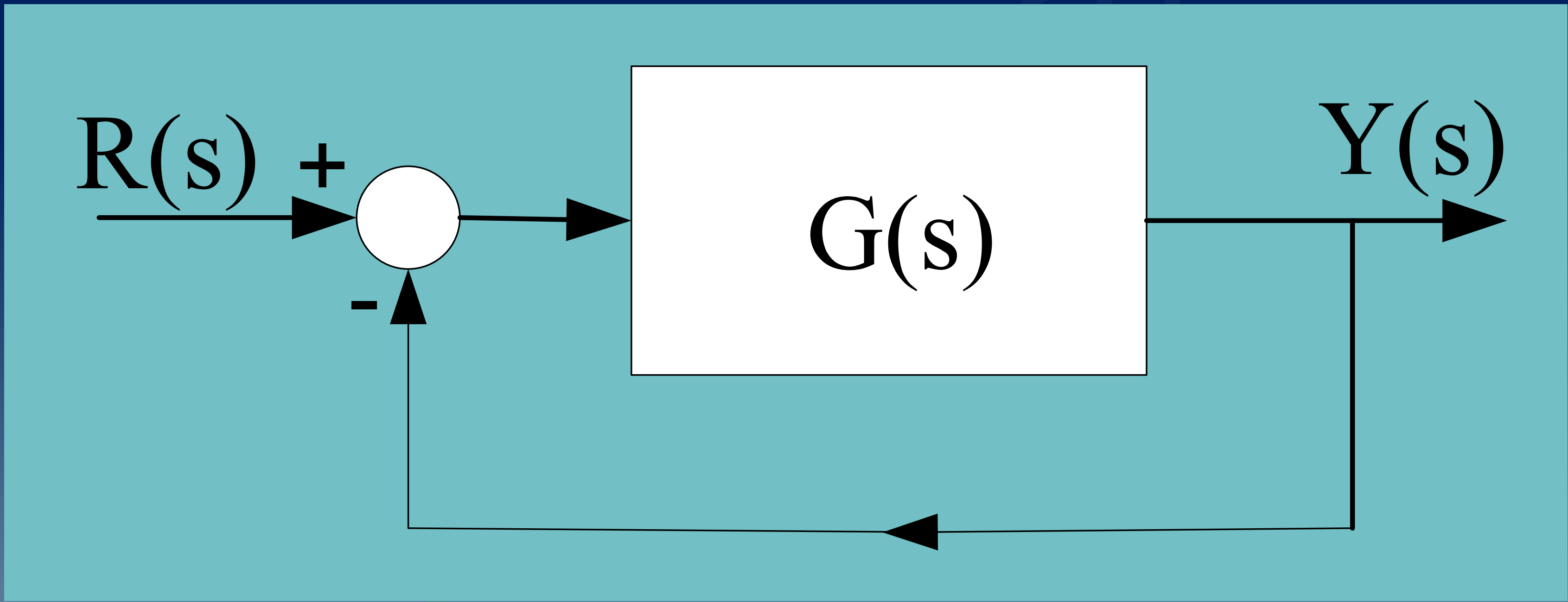
$$E(s) = R(s) - B(s)$$

Erro

realimentação

(feedback)

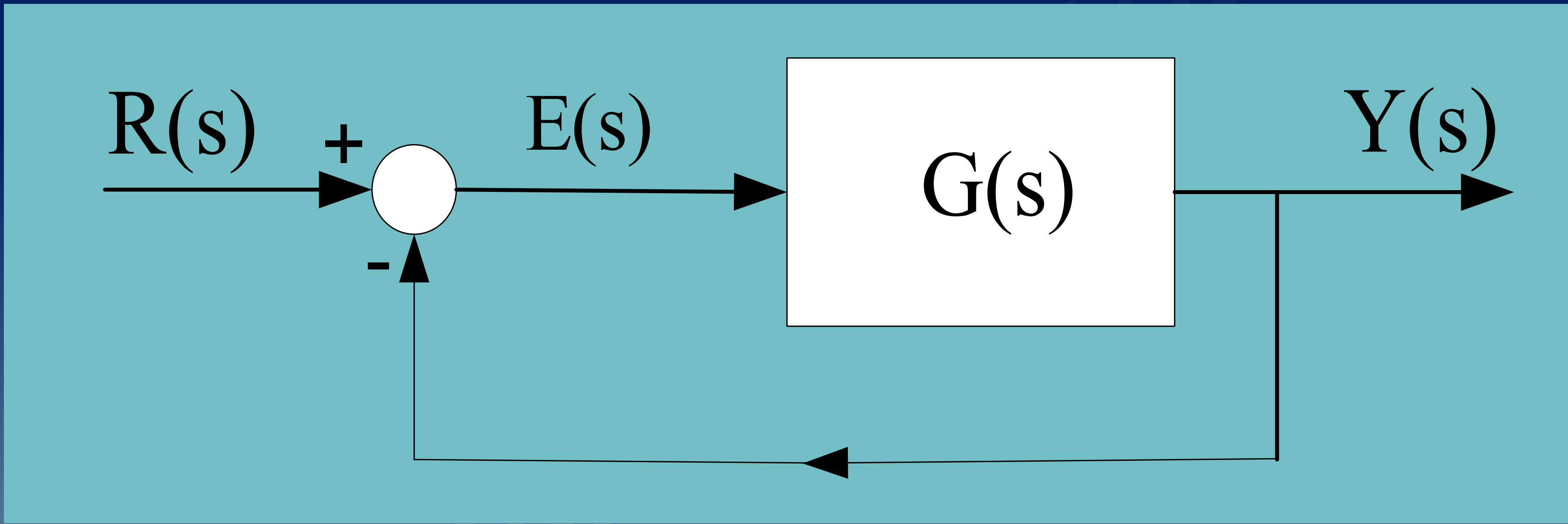
realimentação (feedback)



informação da saída Y(s) é reintroduzida na entrada, depois de comparar com o sinal de referência R(s).

realimentação unitária

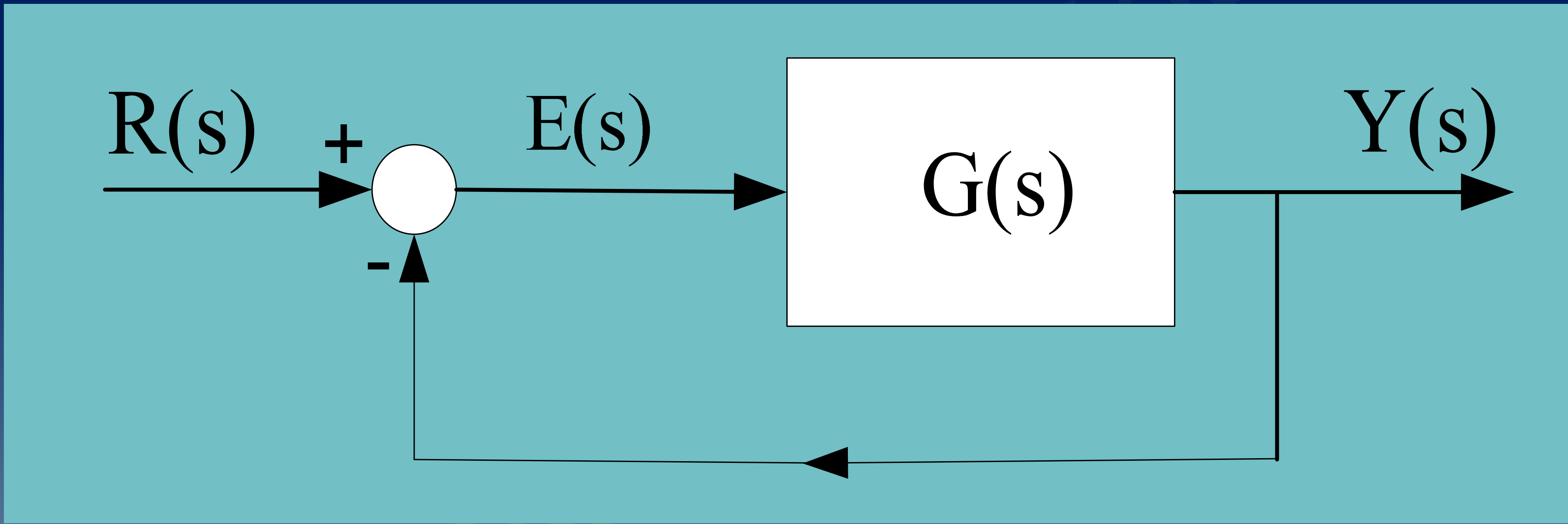
unit feedback



$$\begin{cases} E(s) = R(s) - Y(s) \\ Y(s) = G(s) \cdot E(s) \end{cases}$$

realimentação unitária

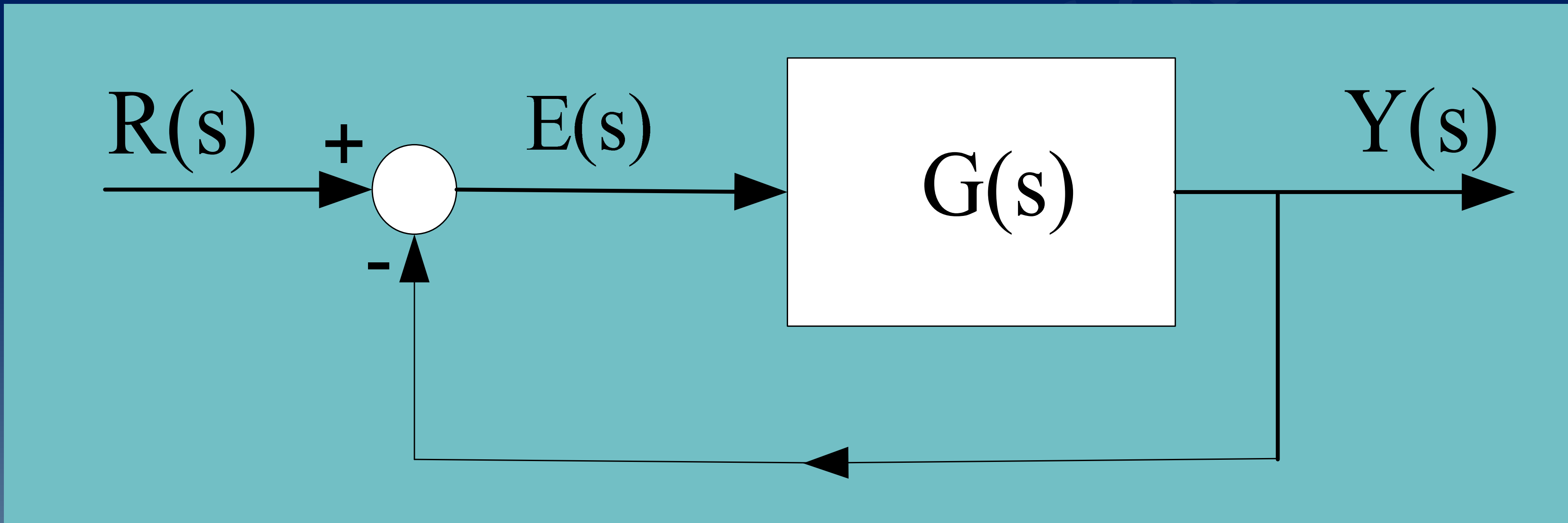
unit feedback



$$Y(s) = G(s)\cdot\overbrace{\left[R(s) - Y(s)\right]}^{E(s)}$$

realimentação unitária

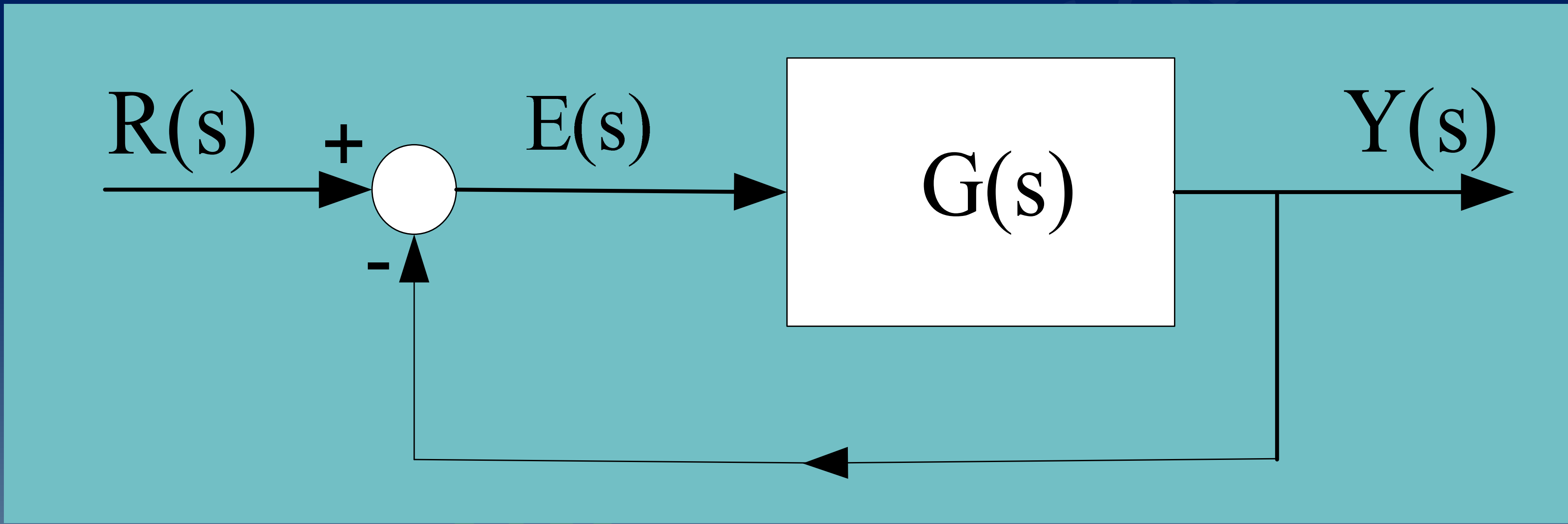
unit feedback



$$Y(s) = G(s)\cdot R(s) - G(s)Y(s)$$

realimentação unitária

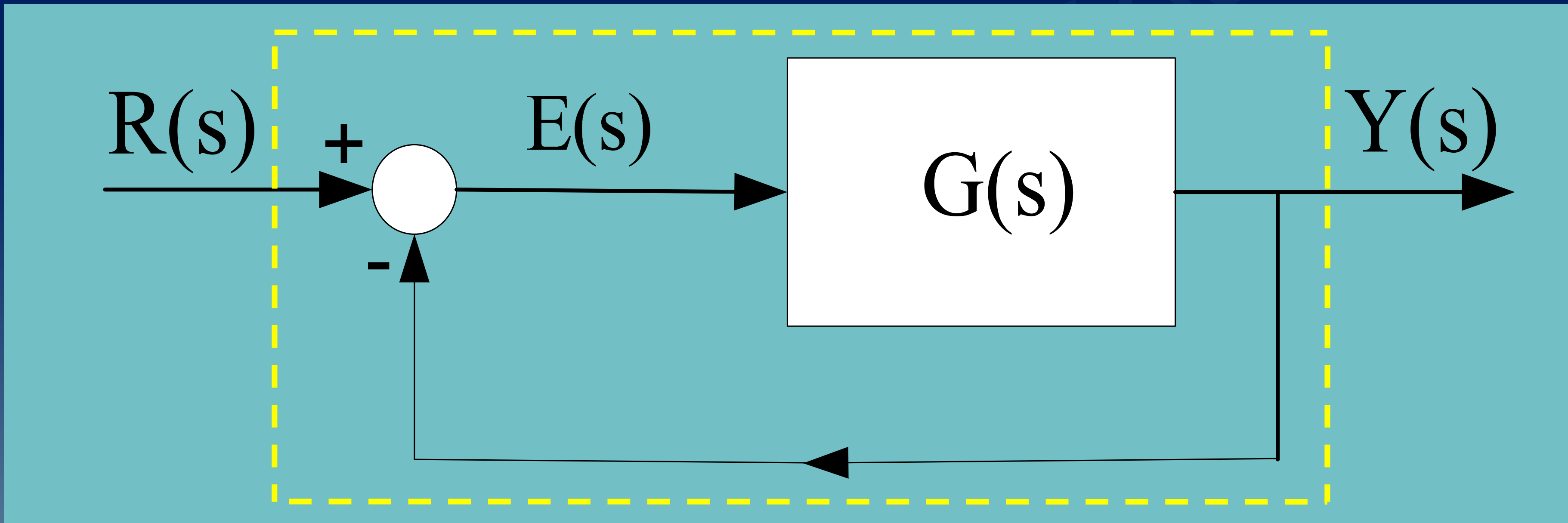
unit feedback



$$Y(s)\cdot[1+G(s)] = R(s)G(s)$$

realimentação unitária

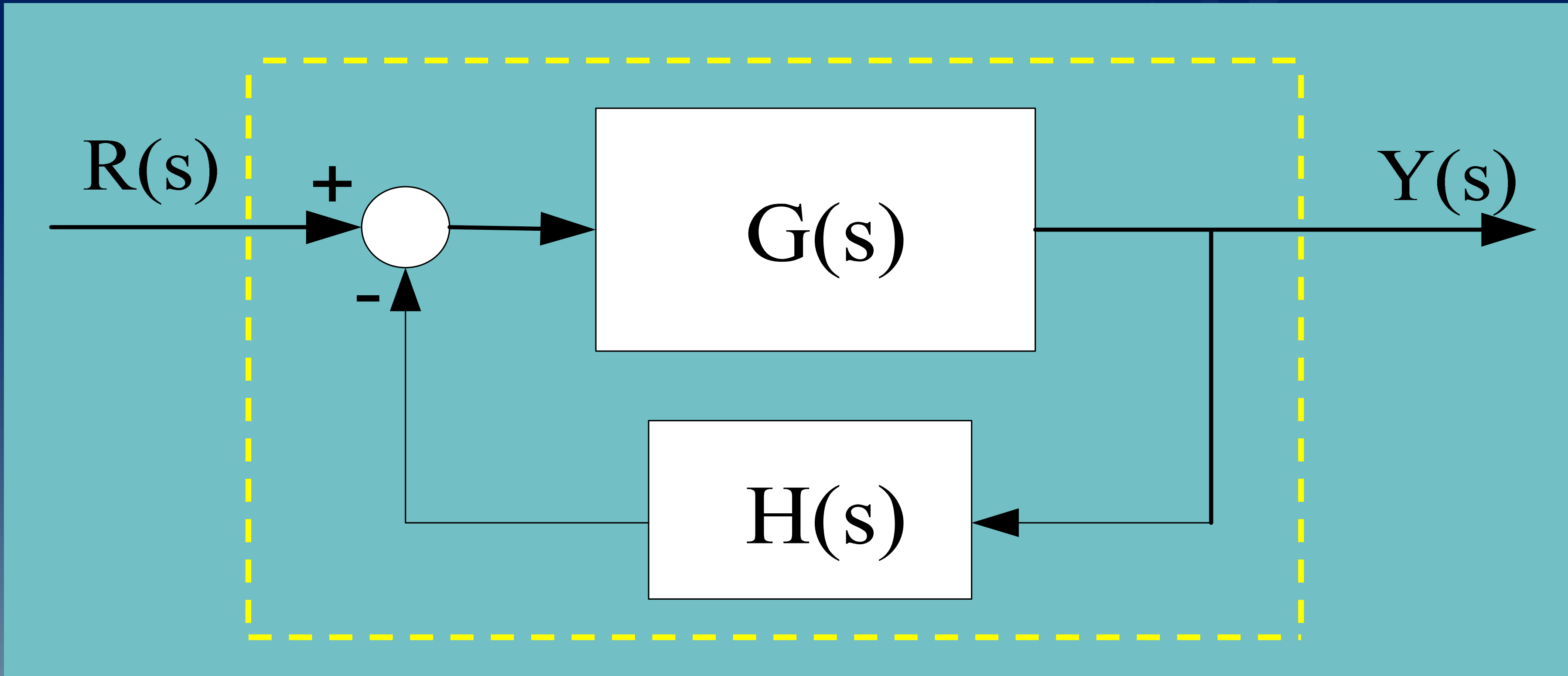
unit feedback



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

realimentação (não unitária)

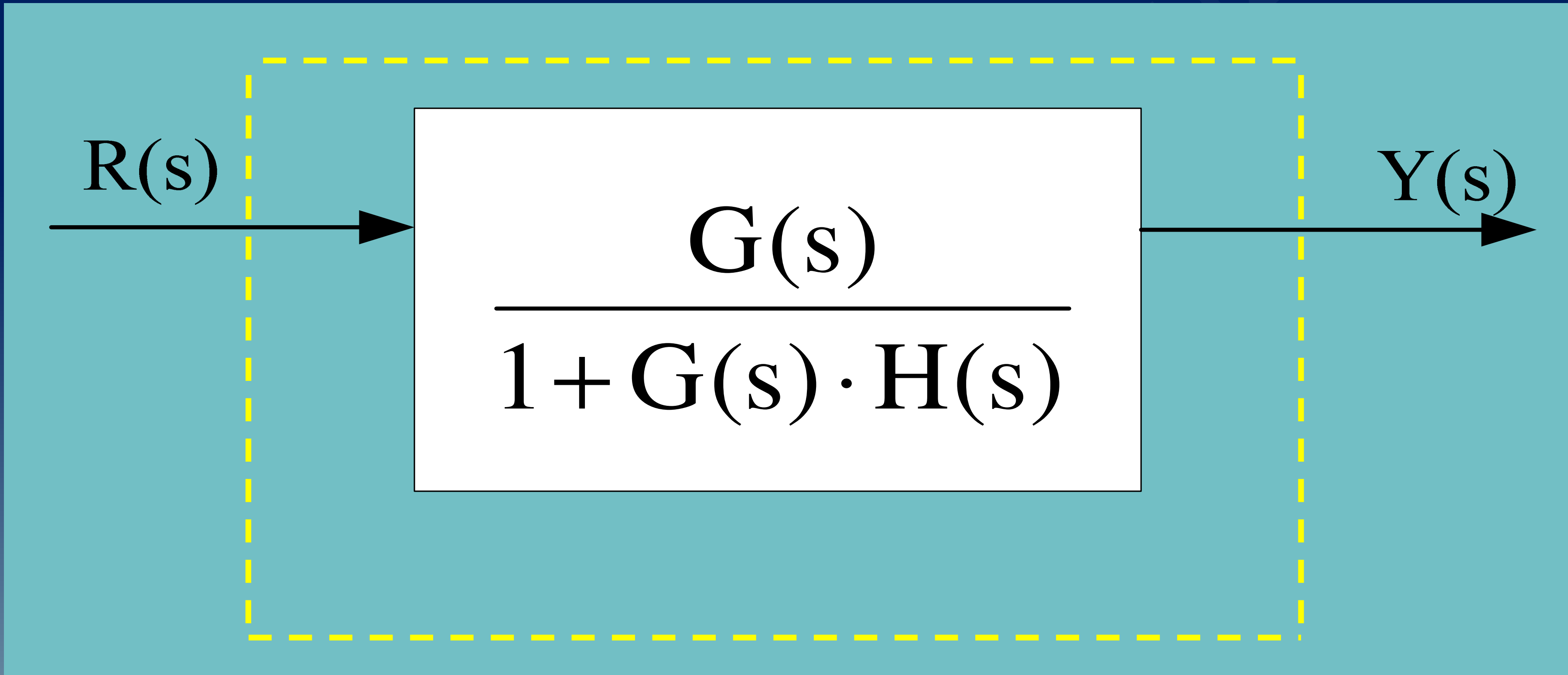
non unit feedback



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

realimentação (não unitária)

non unit feedback



$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)\cdot H(s)}}$$

observe que a

realimentação unitária (ou, '*unit feedback*')

corresponde a

realimentação não unitária

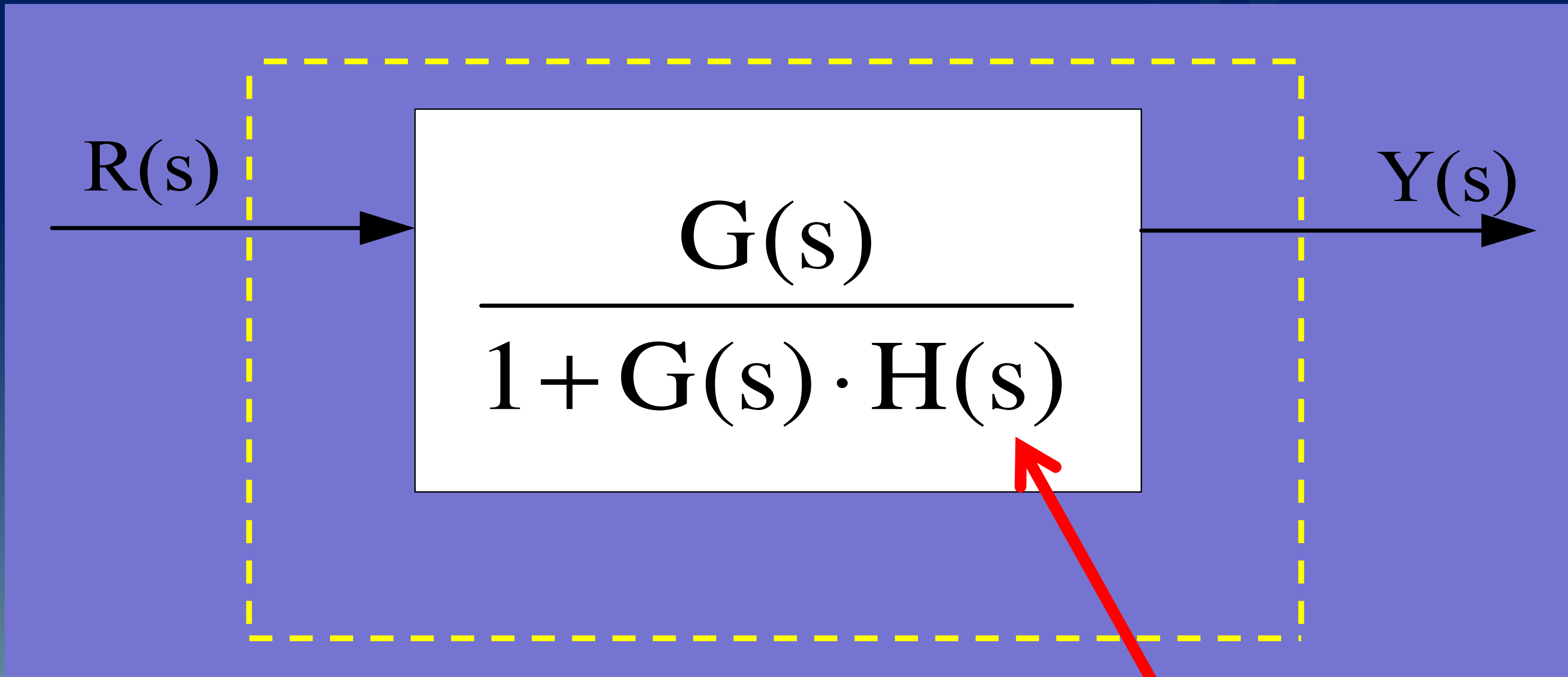
(ou, '*non unit feedback*')

quando

$$H(s) = 1$$

realimentação (unitária)

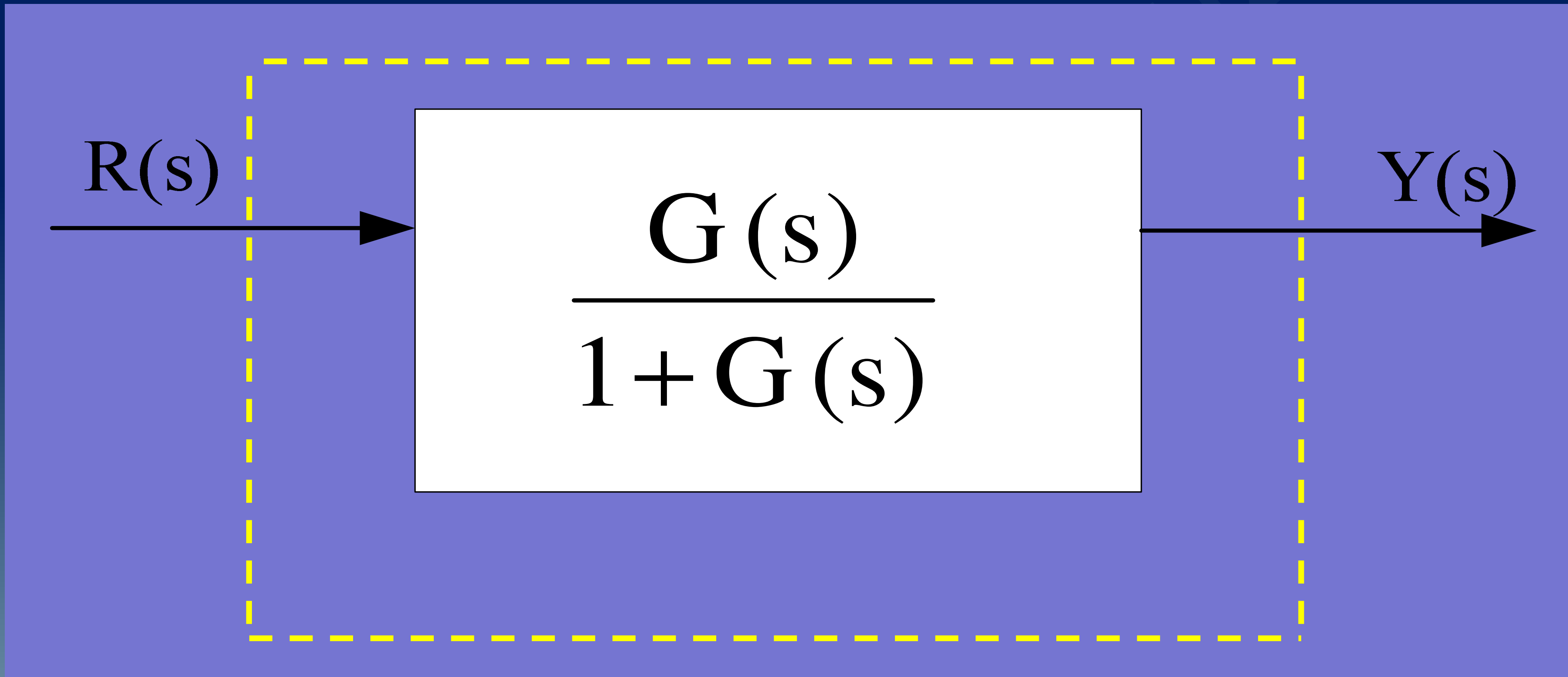
unit feedback



$$H(s) = 1$$

realimentação (unitária)

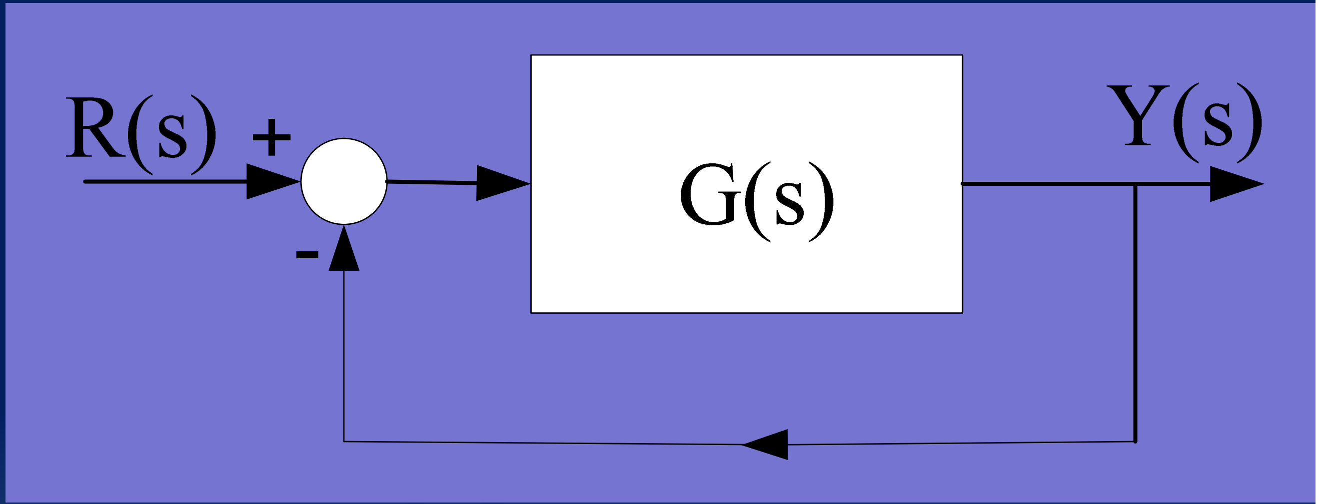
unit feedback



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Exemplo 1:

$$G(s) = \frac{5}{s(s+4)}$$

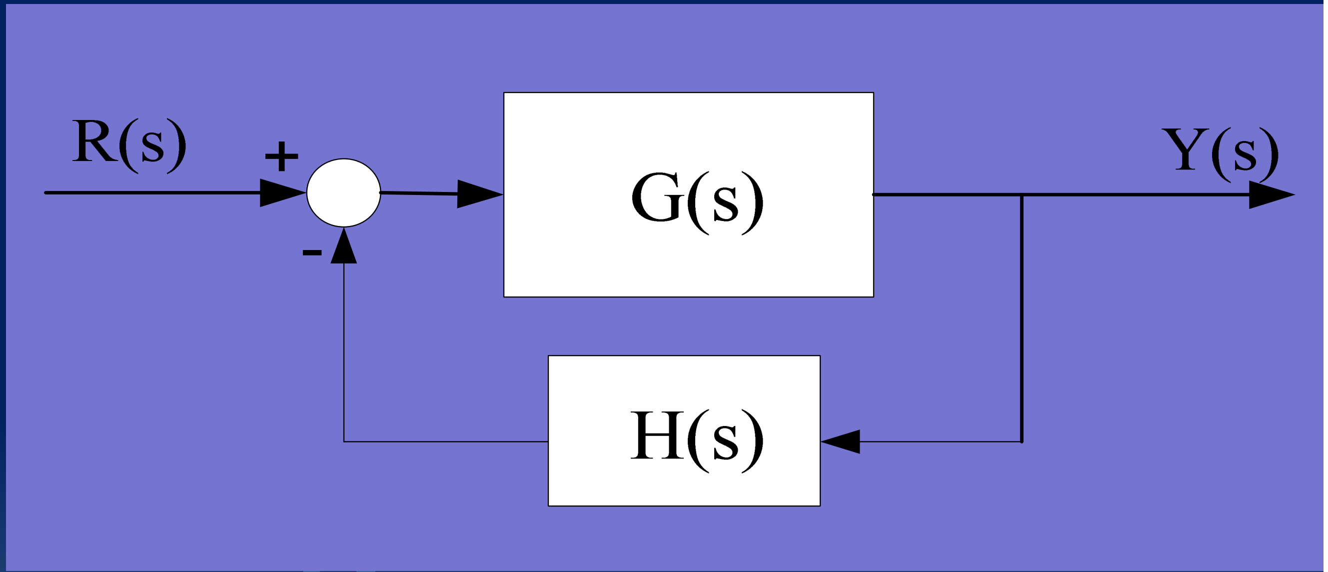


$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\dfrac{5}{s(s+4)}}{1+\dfrac{5}{s(s+4)}} = \frac{5}{s^2+4s+5}$$

Exemplo 2:

$$G(s) = \frac{5}{s(s+4)}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+3)}$$

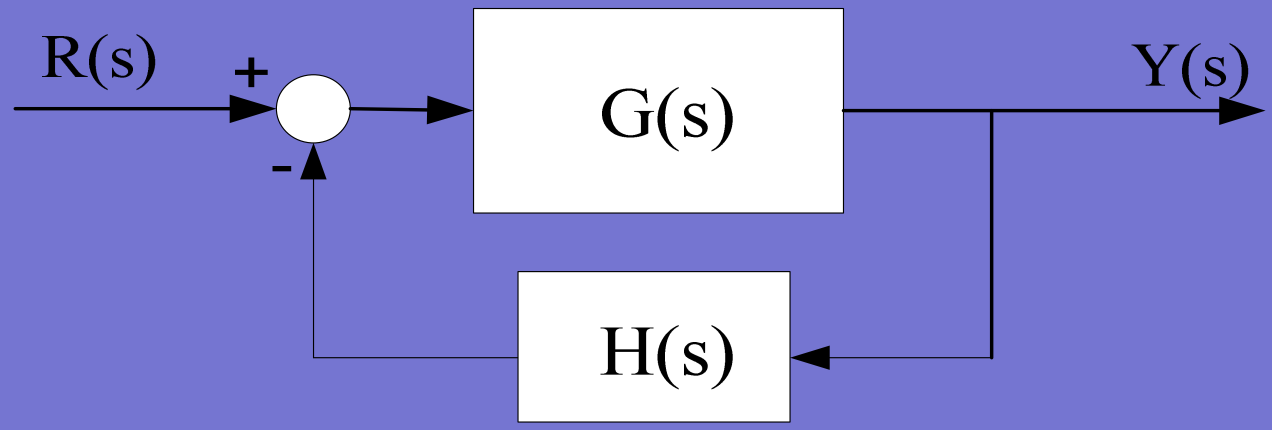


$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\frac{5}{s(s+4)}}{1+\frac{5}{s(s+4)}\cdot\frac{1}{(s+3)}}$$

Exemplo 2:

$$G(s) = \frac{5}{s(s+4)}$$

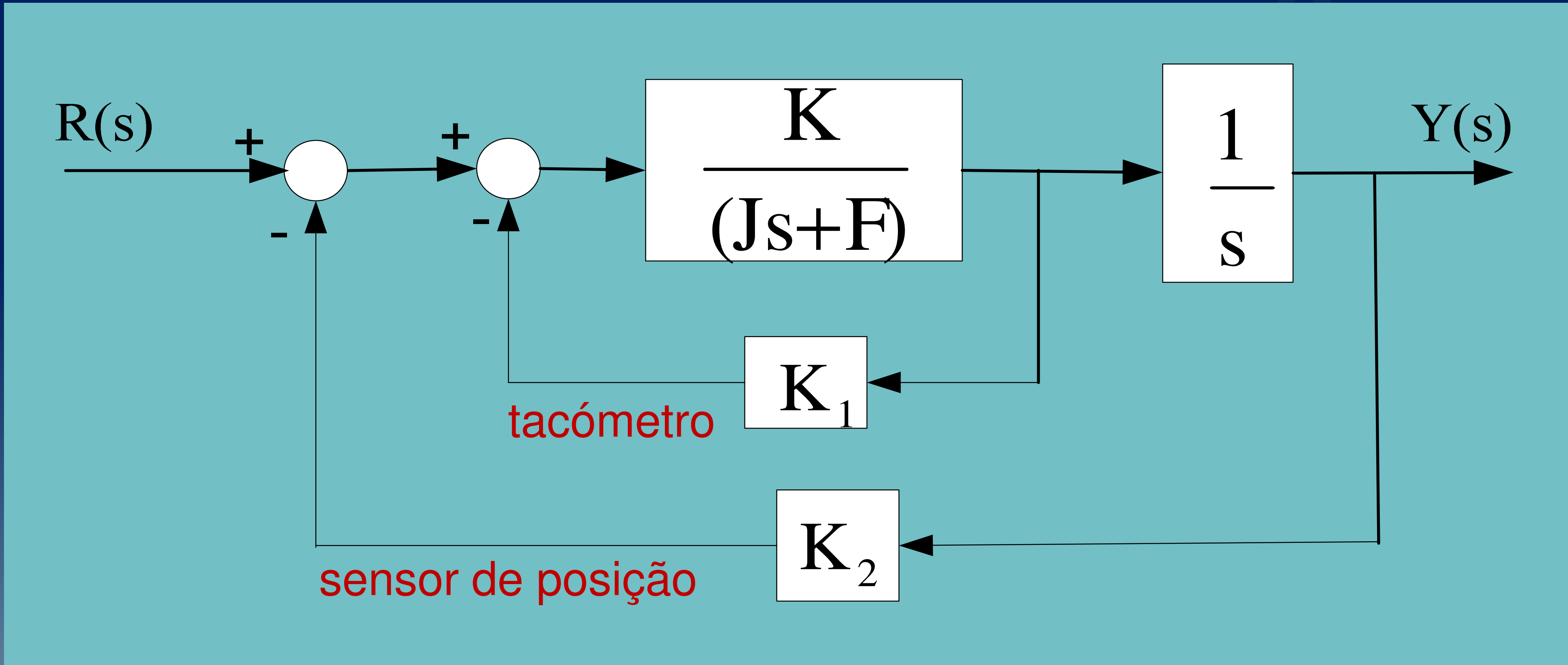
$$H(s) = \frac{1}{(s+3)}$$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5(s+3)}{(s^3+7s^2+12s+5)}$$

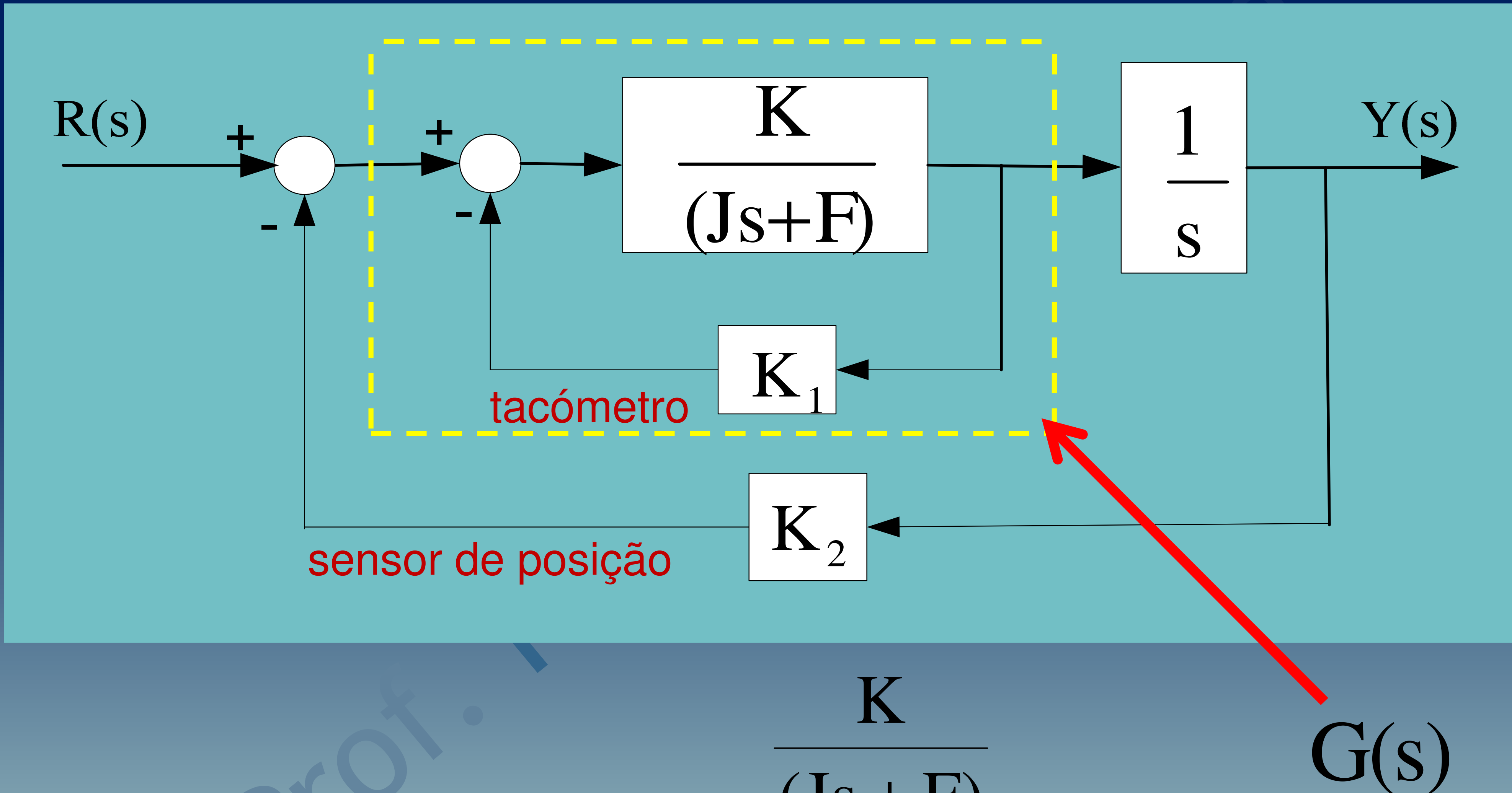
realimentação tacométrica

realimentação tacométrica



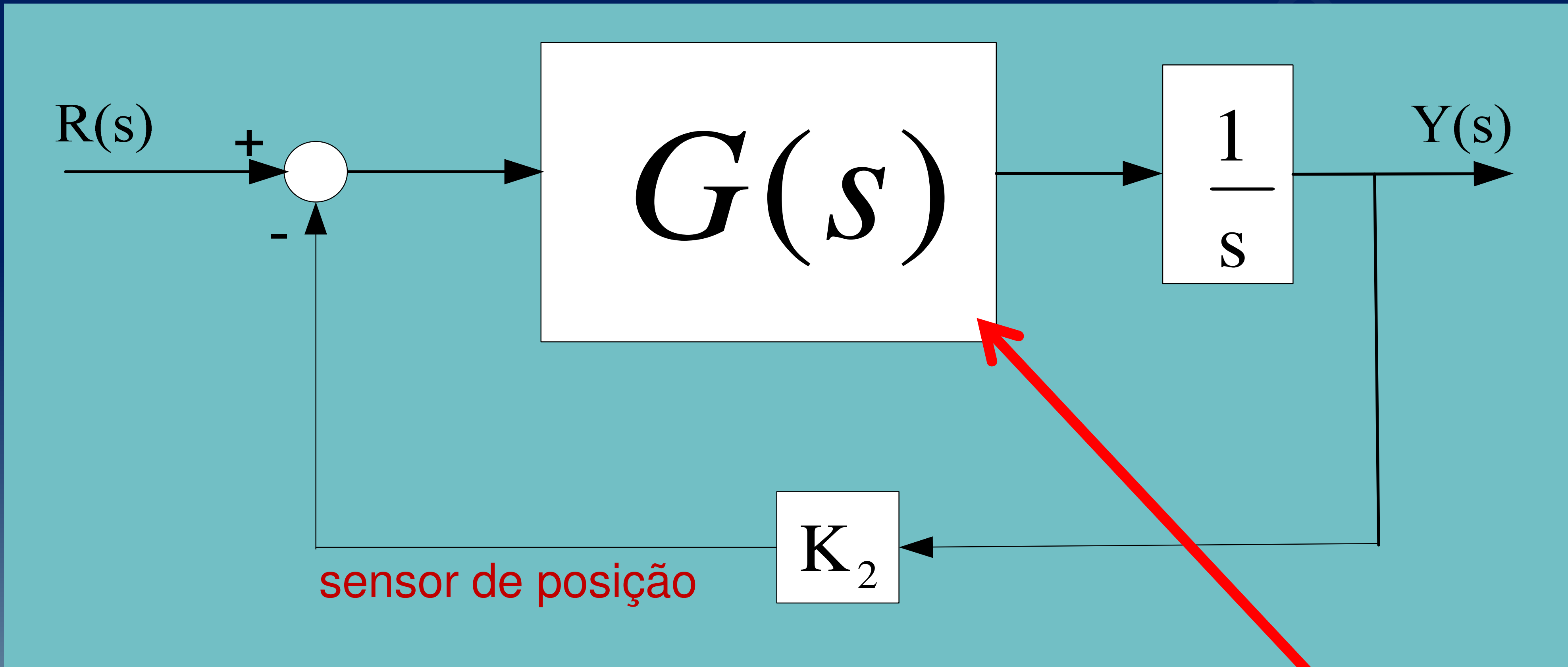
para servomotores com realimentação de velocidade

realimentação tacométrica



$$G(s) = \frac{\dfrac{K}{(Js+F)}}{1+\dfrac{KK_1}{(Js+F)}}$$

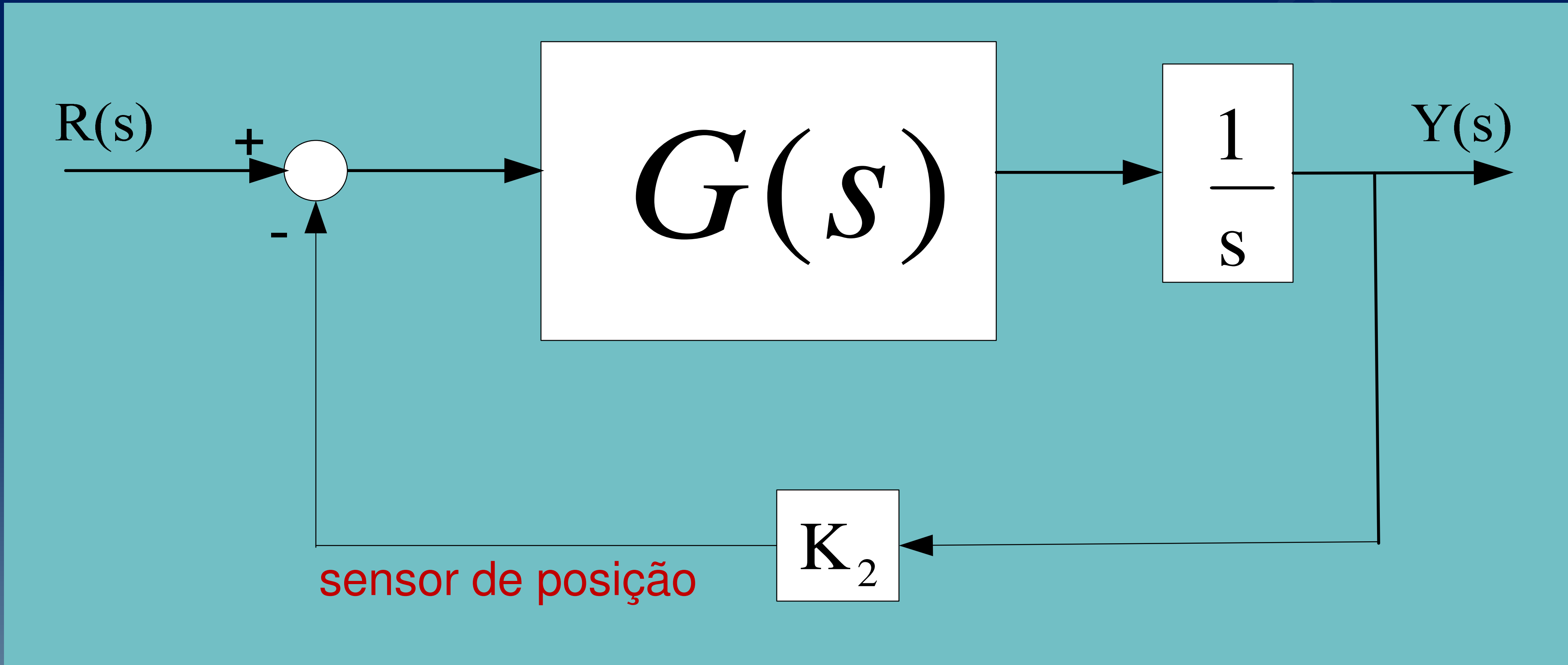
realimentação tacométrica



G(s)

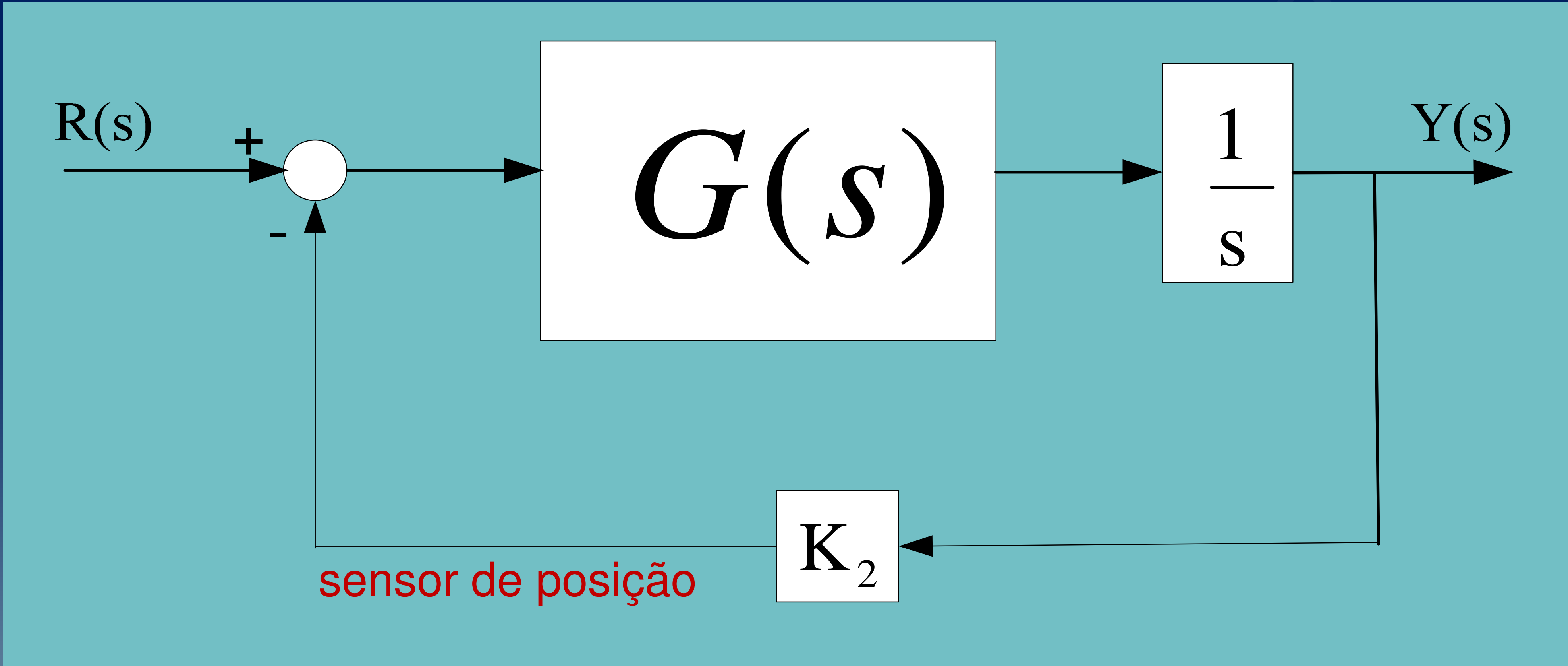
$$G(s) = \frac{\dfrac{K}{(Js+F)}}{1+\dfrac{KK_1}{(Js+F)}}$$

realimentação tacométrica



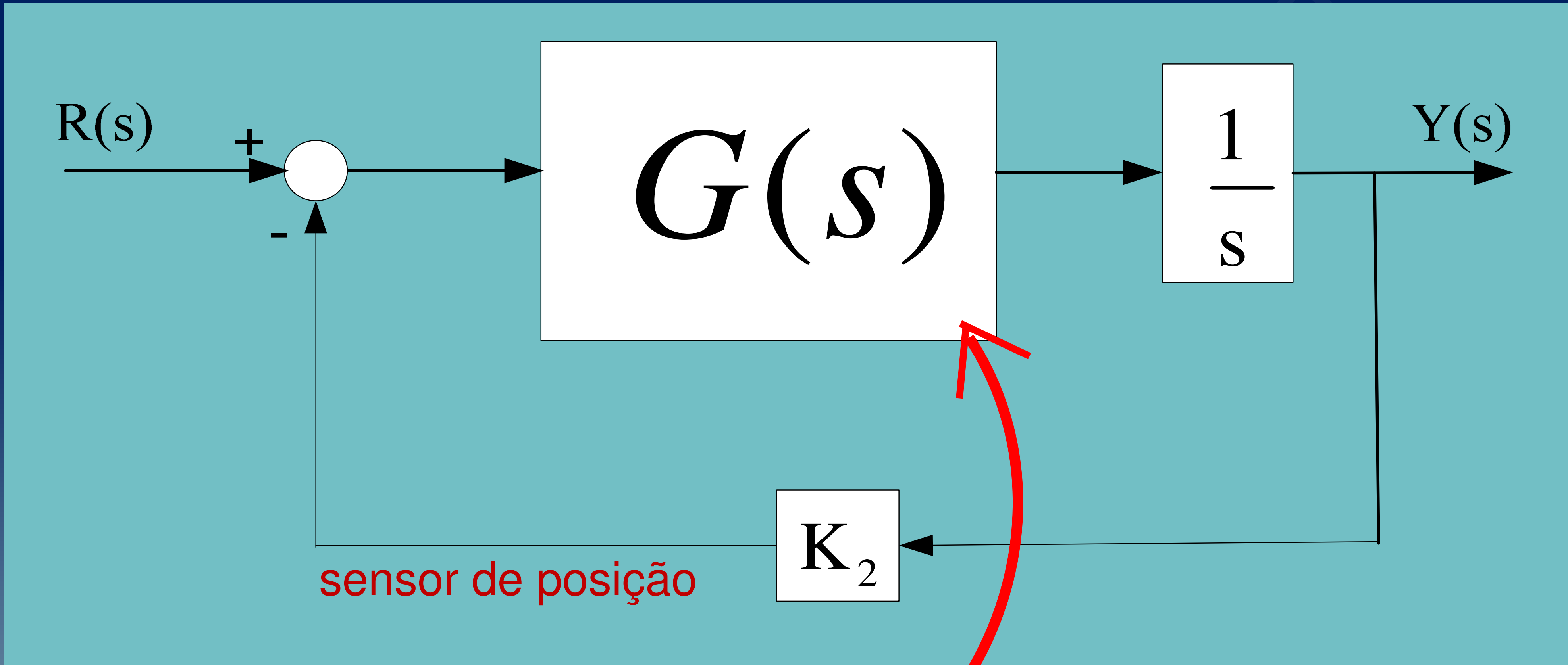
$$G(s) = \frac{\dfrac{K}{(Js+F)}}{1+\dfrac{KK_1}{(Js+F)}}$$

realimentação tacométrica



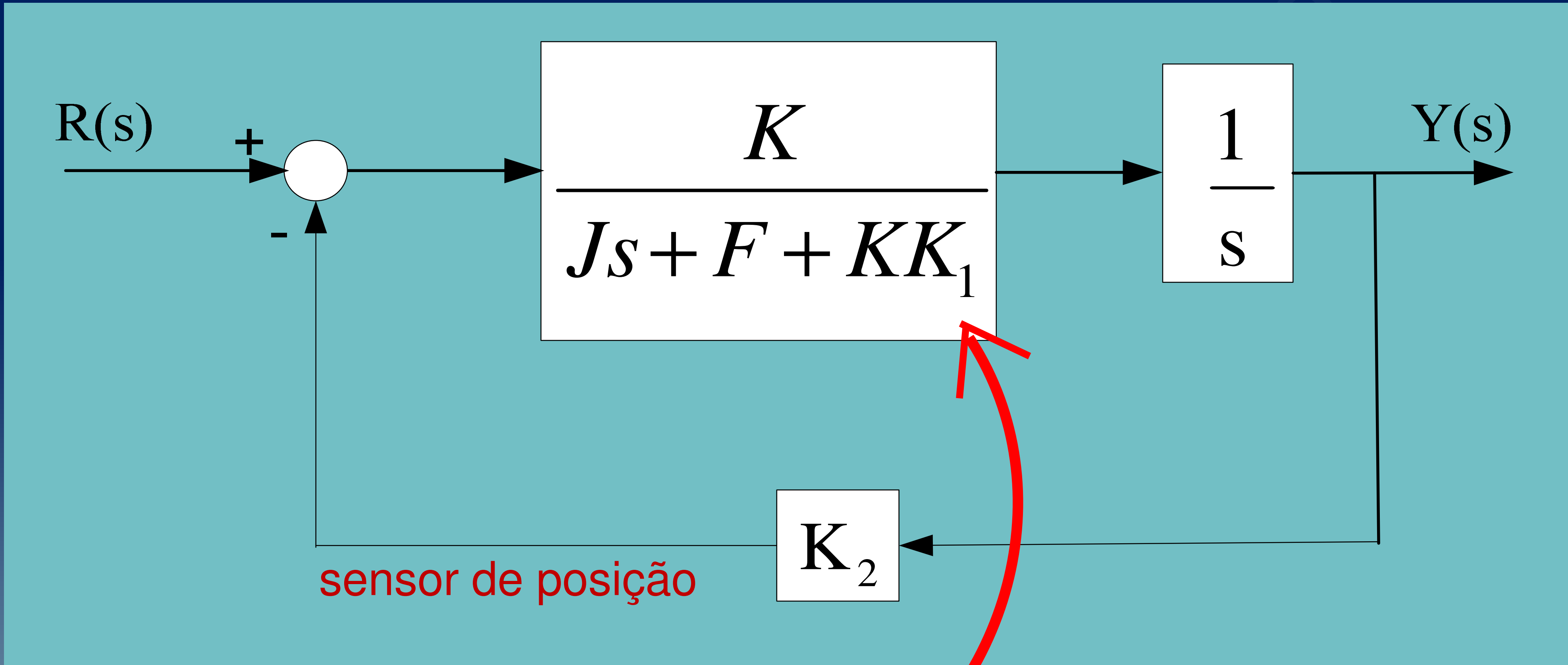
$$G(s) = \frac{\dfrac{K}{(Js+F)}}{1+\dfrac{KK_1}{(Js+F)}} = \frac{K}{Js+F+KK_1}$$

realimentação tacométrica



$$G(s) = \frac{K}{Js + F + KK_1}$$

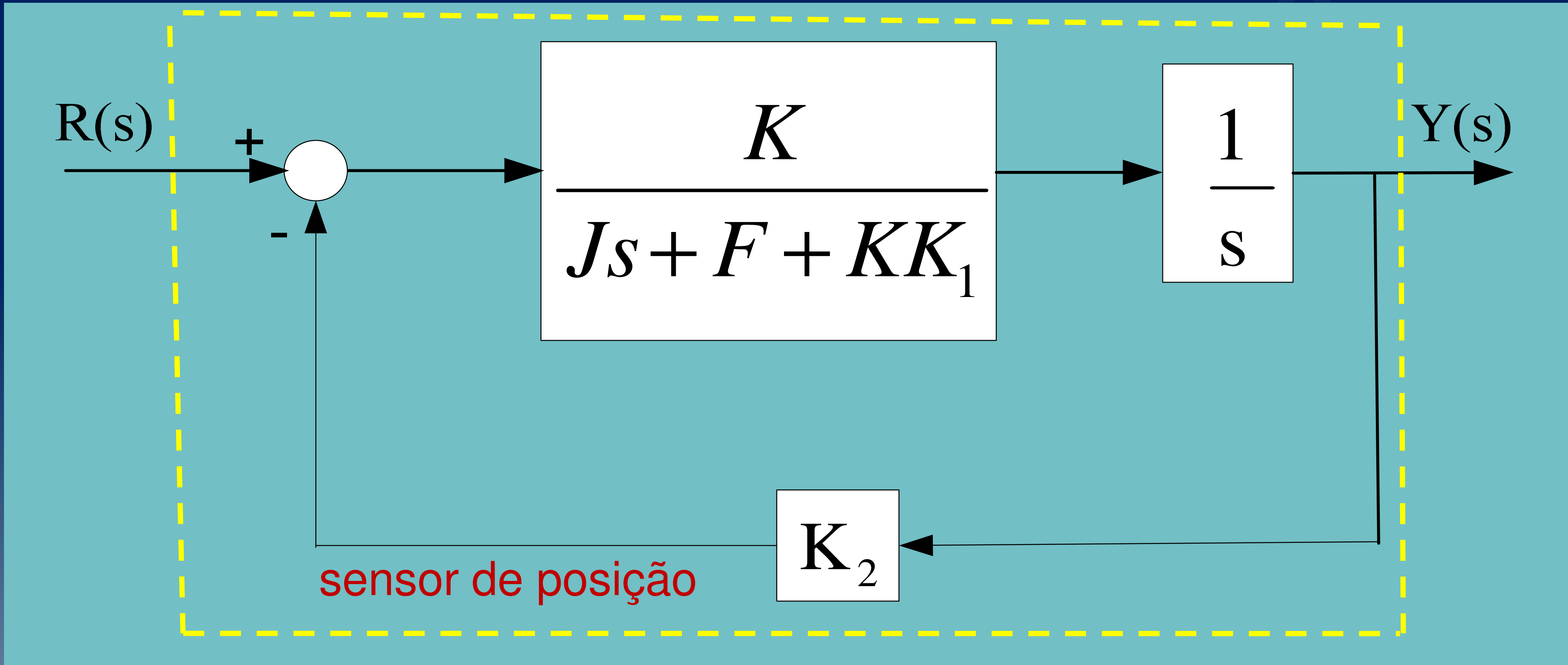
realimentação tacométrica



$$G(s) = \frac{K}{Js + F + KK_1}$$

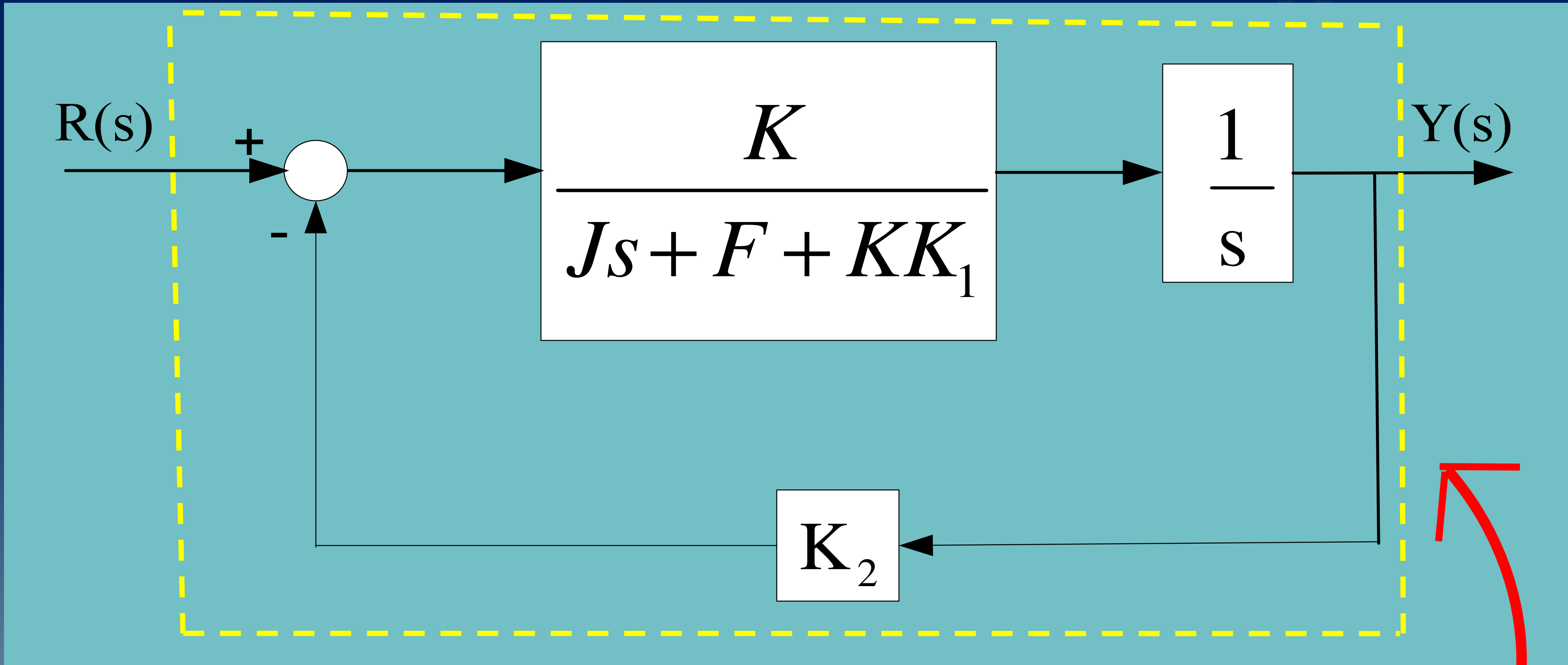
Diagramas blocos & erro

realimentação tacométrica



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{Js+(F+KK_1)}\cdot\frac{1}{s}}{1+\frac{K}{Js+(F+KK_1)}\cdot\frac{1}{s}\cdot K_2}$$

realimentação tacométrica



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (F + KK_1)s + KK_2}$$

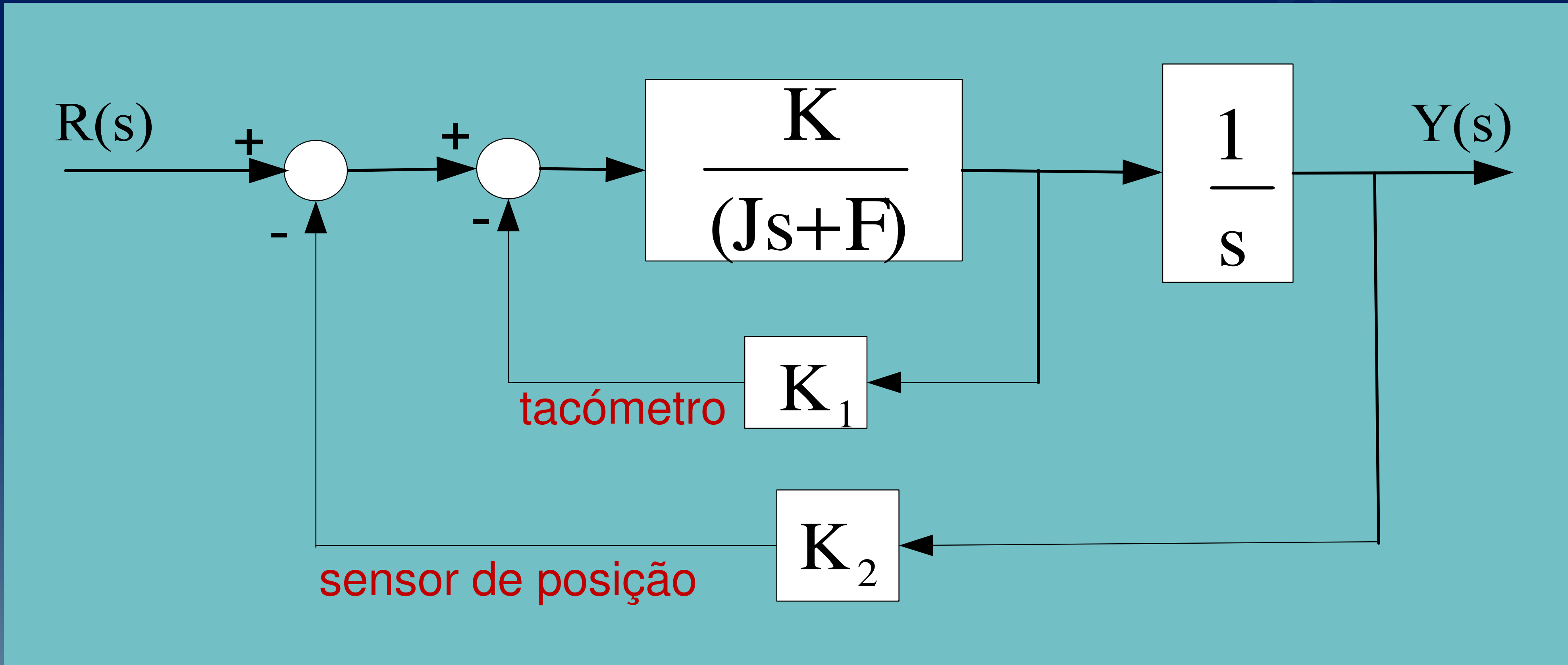
realimentação tacométrica

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{Js^2 + (F + KK_1)s + KK_2}} \longrightarrow Y(s)$$

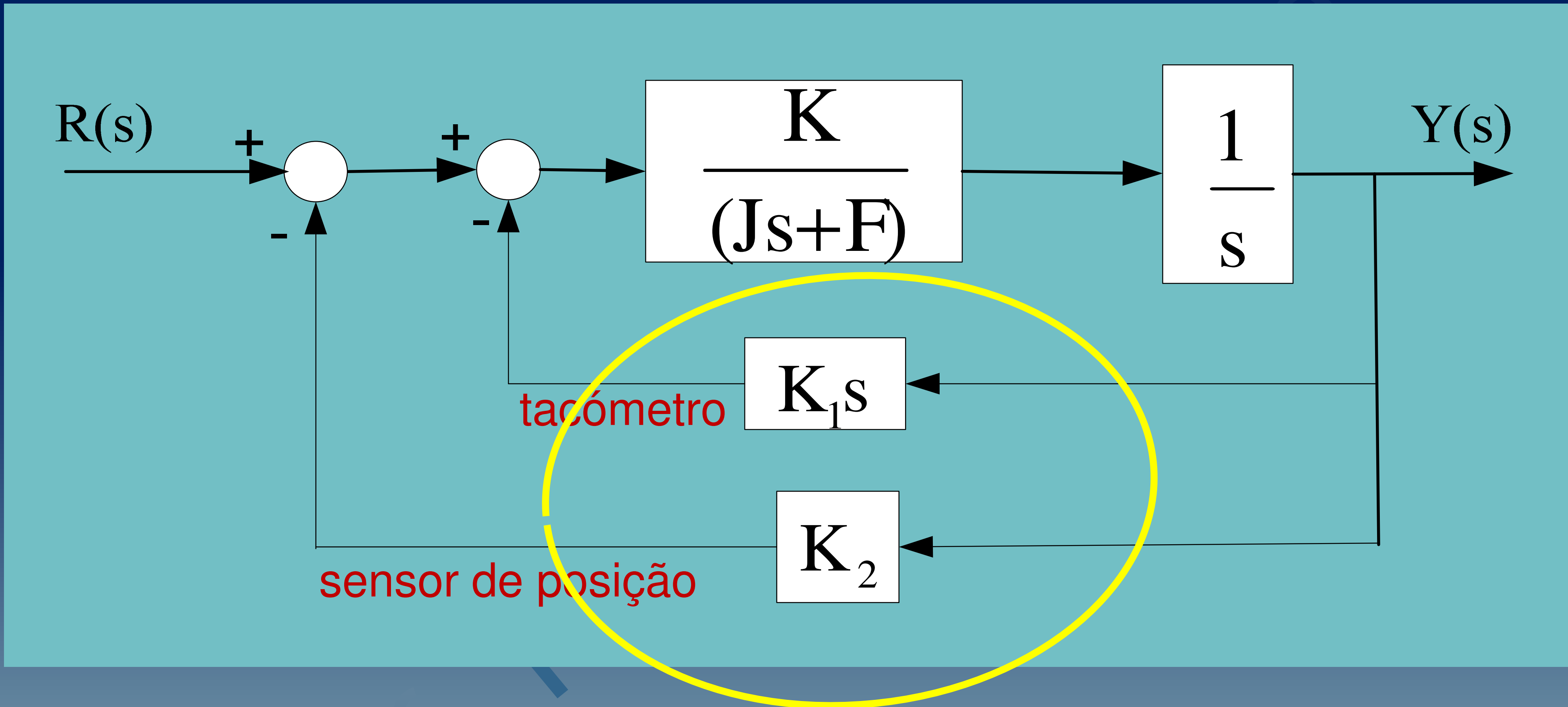
realimentação tacométrica

(outra forma de ver)

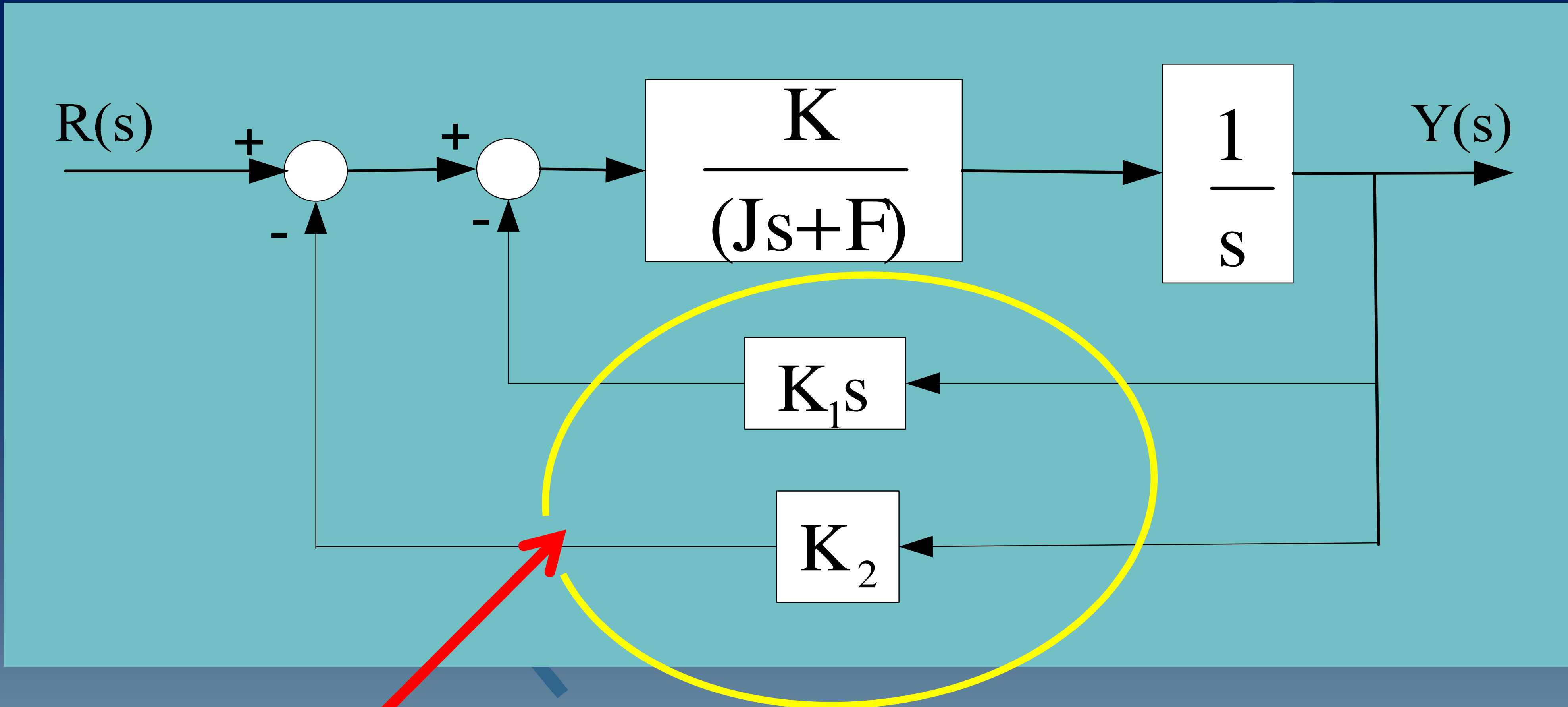
realimentação tacométrica



realimentação tacométrica

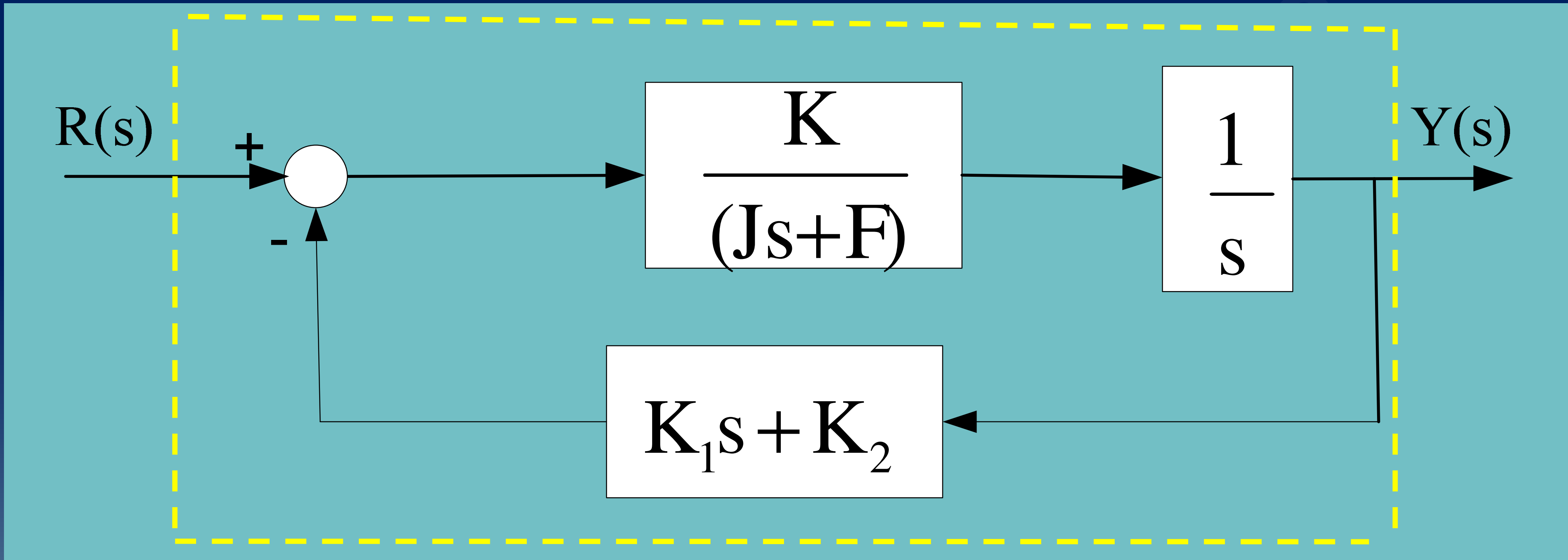


realimentação tacométrica



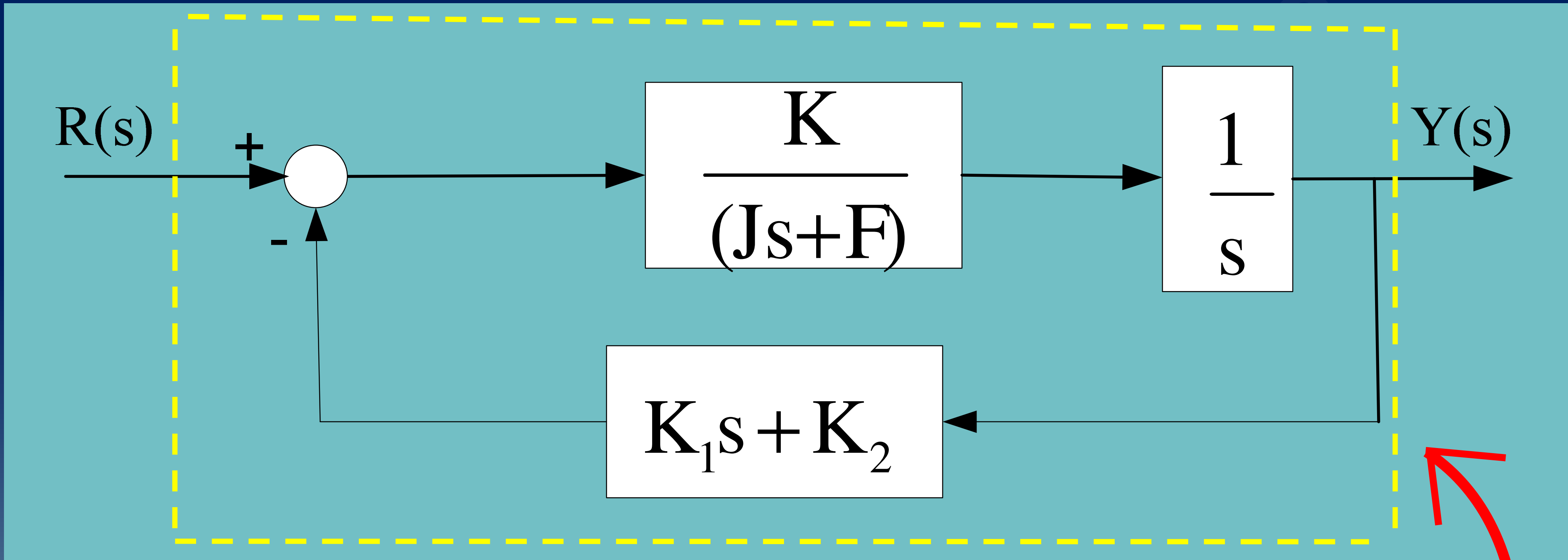
$$K_1 s + K_2$$

realimentação tacométrica



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{(Js+F)} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{K(K_1 s + K_2)}{(Js+F)s}}$$

realimentação tacométrica



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (F + KK_1)s + KK_2}$$

que é o mesmo resultado obtido anteriormente, mais acima.

realimentação tacométrica

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{Js^2+(F+KK_1)s+KK_2}} \longrightarrow Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2+(F+KK_1)s+KK_2}$$

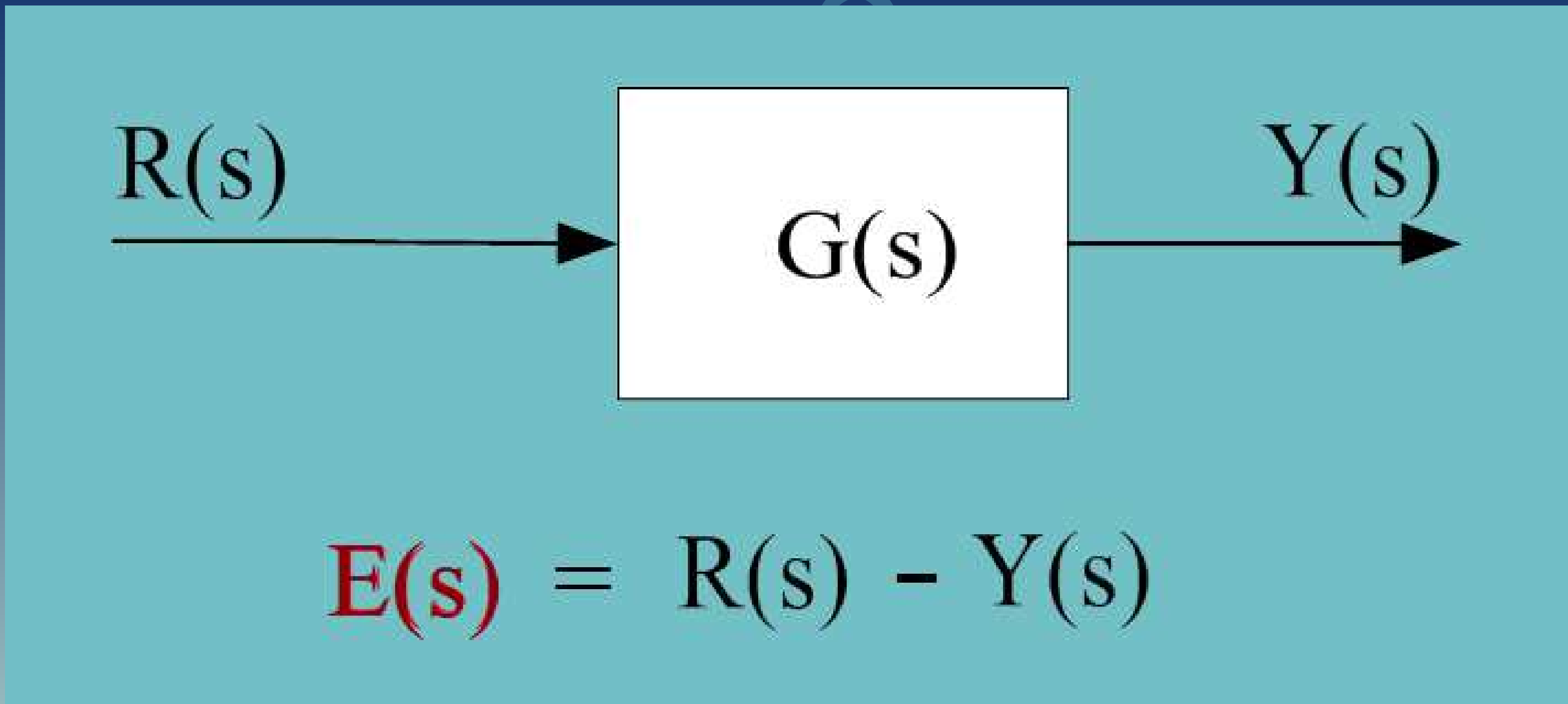
que é o mesmo resultado obtido anteriormente, mais acima.

Erro

Erro

Para um sistema de malha aberta (isto é, sem realimentação) a definição de erro é:

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

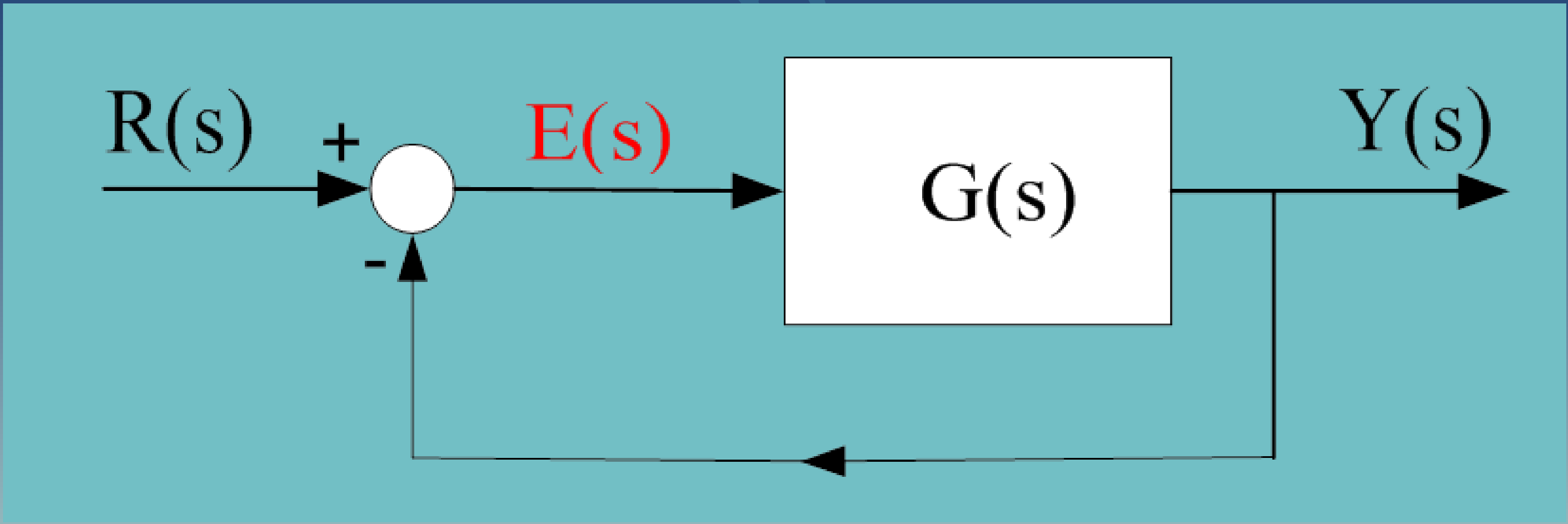


Erro

realimentação unitária

aqui, o erro também é:

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

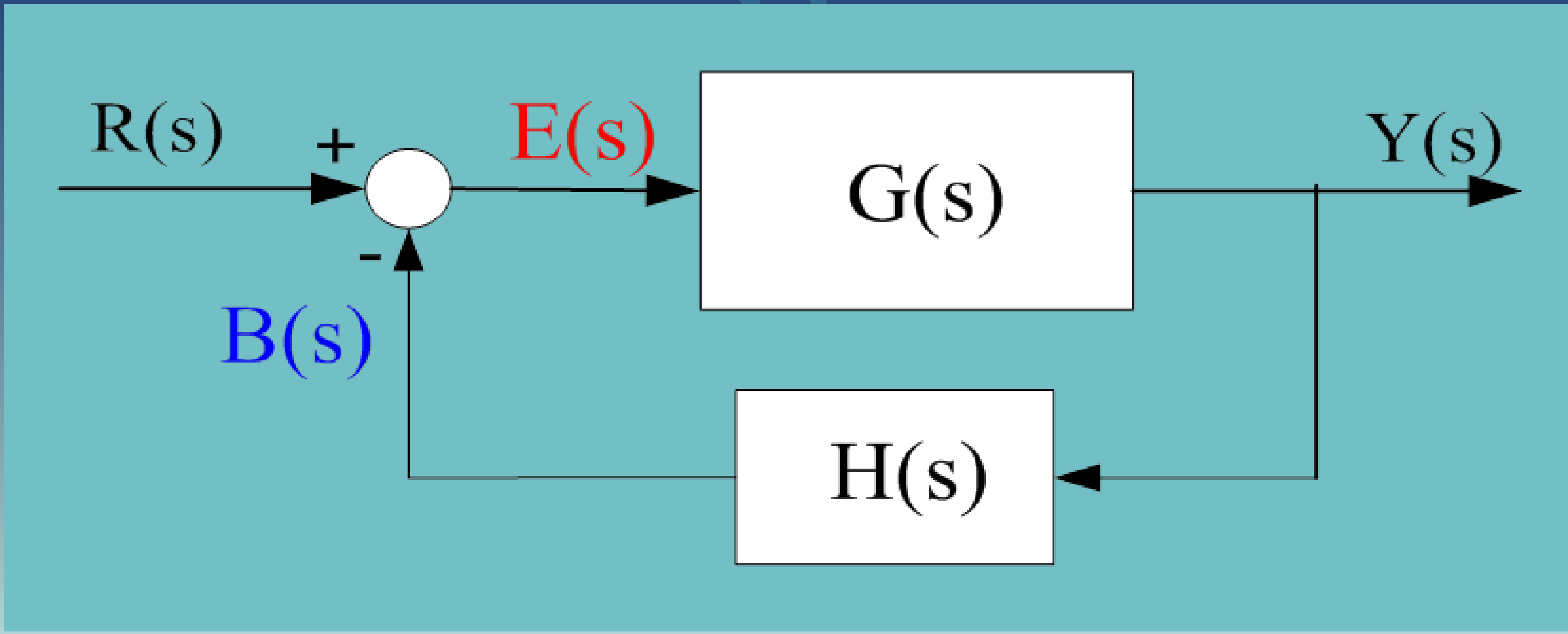


Erro

realimentação não unitária

o erro torna-se:

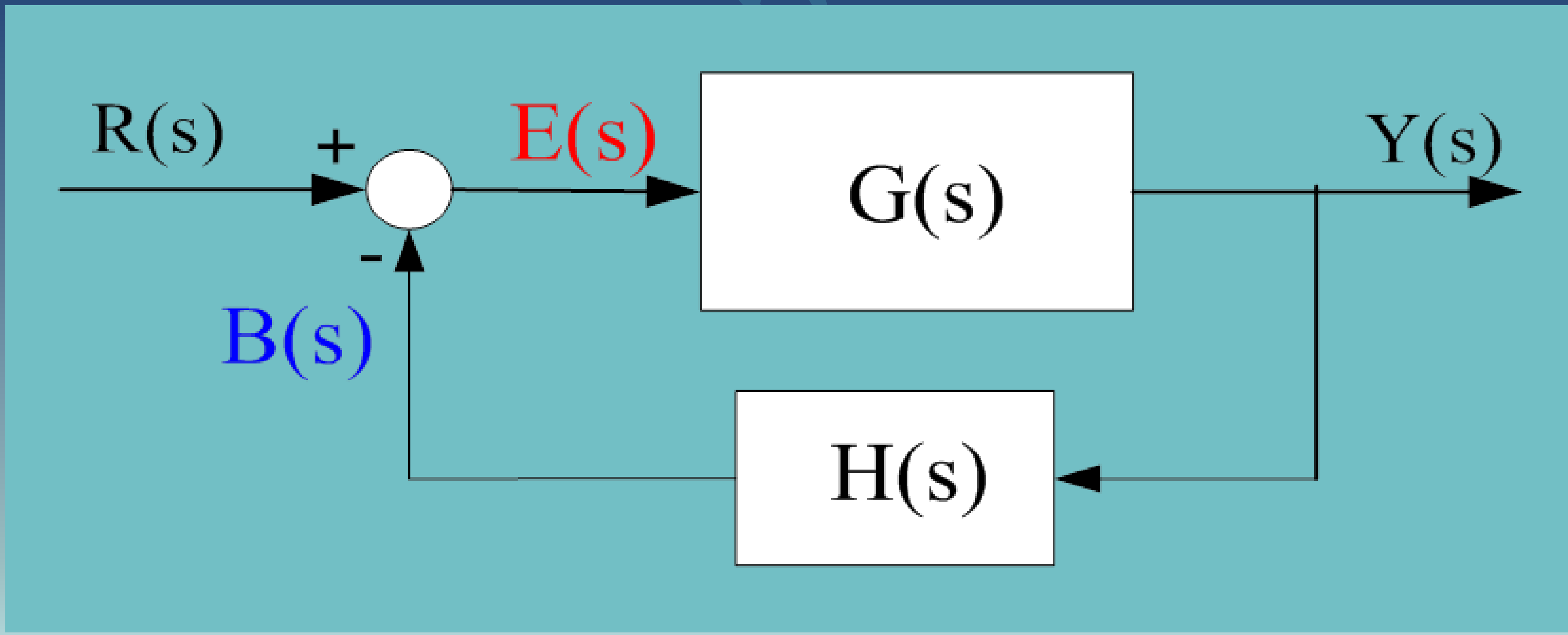
$$E(s) = R(s) - B(s)$$



ou seja:

erro:

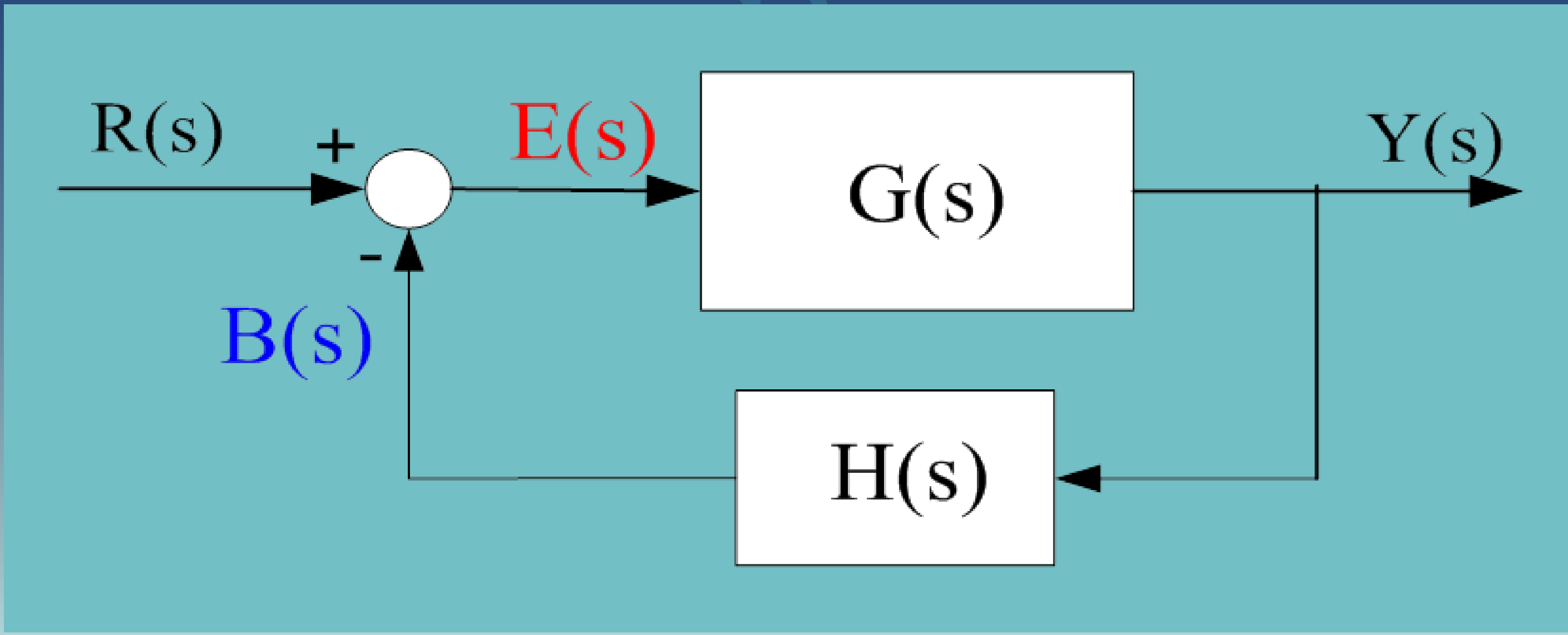
$$E(s) = R(s) - \underbrace{Y(s)H(s)}_{B(s)}$$



mas: $$Y(s) = G(s) \cdot E(s)$$

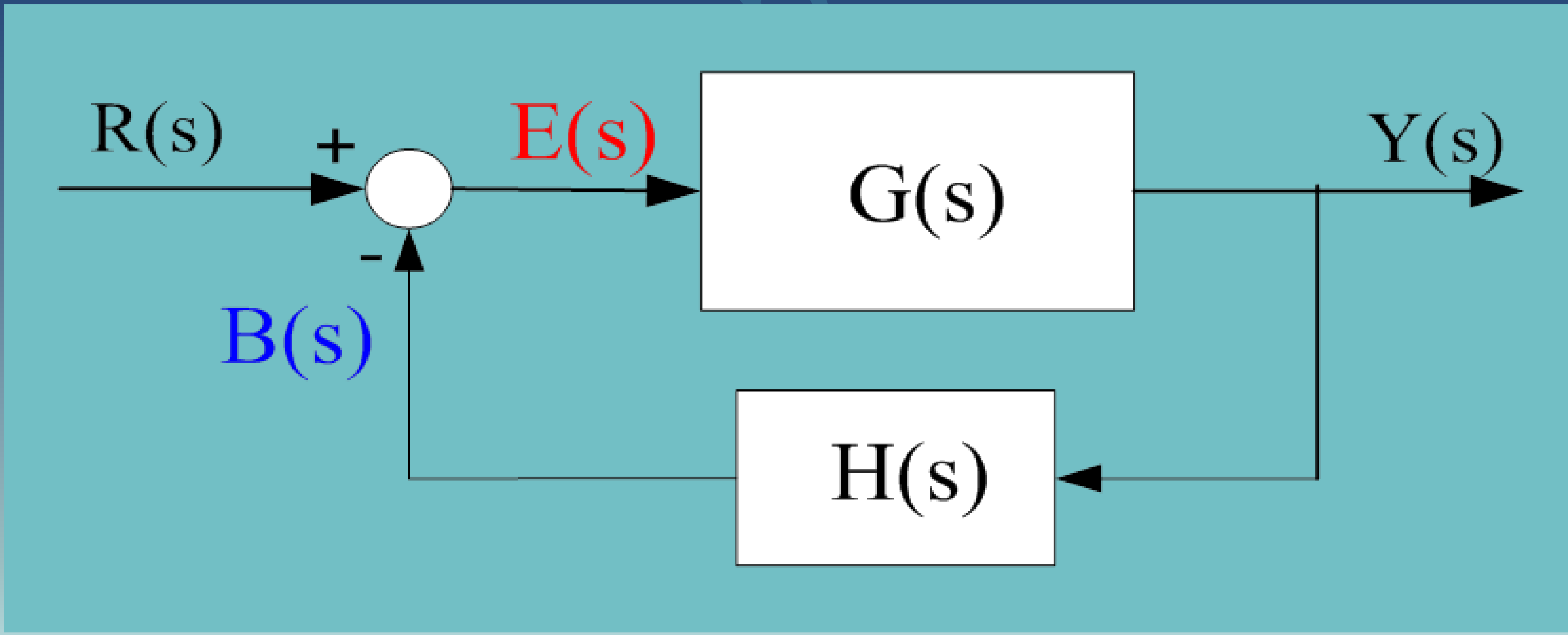
logo:

$$E(s) = R(s) - \overbrace{G(s)E(s)}^{Y(s)}H(s)$$



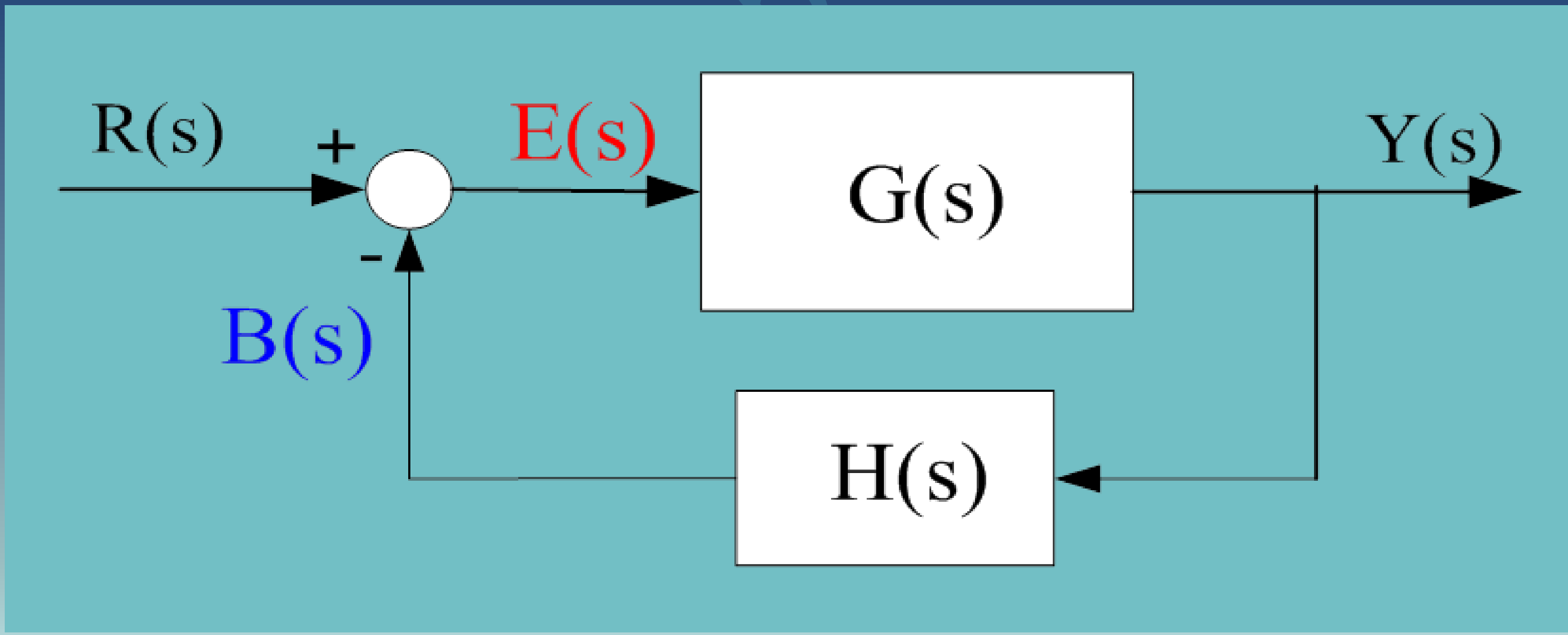
portanto:

$$E(s)\left[1+G(s)H(s)\right]=R(s)$$



e a fórmula do 'erro' é:

$$E(s) = \frac{R(s)}{[1 + G(s)H(s)]}$$



Erro em estado estacionário

Saída em estado estacionário

Teorema do Valor Inicial:

$$x(0) = \lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s) \quad \text{(TVI)}$$

Teorema do Valor Final:

$$x(\infty) = \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot X(s) \quad \text{(TVF)}$$

Teorema do Valor Inicial:

$$\boxed{x(0) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s)} \quad \text{(TVI)}$$

Teorema do Valor Final:

$$\boxed{x(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot X(s)} \quad \text{(TVF)}$$

Exemplo 3:

$$Y(s) = \frac{3s-2}{s(s+5)}$$

TVI

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\cdot Y(s) = \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\cdot\frac{3s-2}{\cancel{s}(s+5)} = \lim_{s\to\infty}\frac{3s-2}{(s+5)} = 3$$

TVF

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{3s-2}{\cancel{s}(s+5)} = \lim_{s\to 0}\frac{3s-2}{(s+5)} = -2/5$$

Exemplo 4:

$$E(s) = \frac{2s}{s^2 - 4s + 3}$$

TVI

$$\begin{aligned} e(0) &= \lim_{s\to\infty} s \cdot E(s) \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{2s^2}{s^2 - 4s + 3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

TVF

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{2s^2}{s^2 - 4s + 3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Erro em estado estacionário:

(*Steady state error*):

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t)$$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) \quad \text{(TVF)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s \cdot R(s)}{[1 + G(s)H(s)]}$$

Erro em estado estacionário:

(*Steady state error*):

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot R(s)}{\left[1 + G(s)H(s)\right]}$$

Saída em estado estacionário:

(*Steady state output*):

$$y_{ss} = \lim_{t \to \infty} y(t)$$

$$y_{ss} = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) \qquad \text{(TVF)}$$

Mas, nós sabemos que

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Saída em estado estacionário:

(*Steady state output*):

logo,

$$Y(s) = \frac{G(s)}{[1+G(s)H(s)]} \cdot R(s)$$

$$y_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = $$

$$= \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{G(s)}{[1+G(s)H(s)]} \cdot R(s)$$

Saída em estado estacionário:

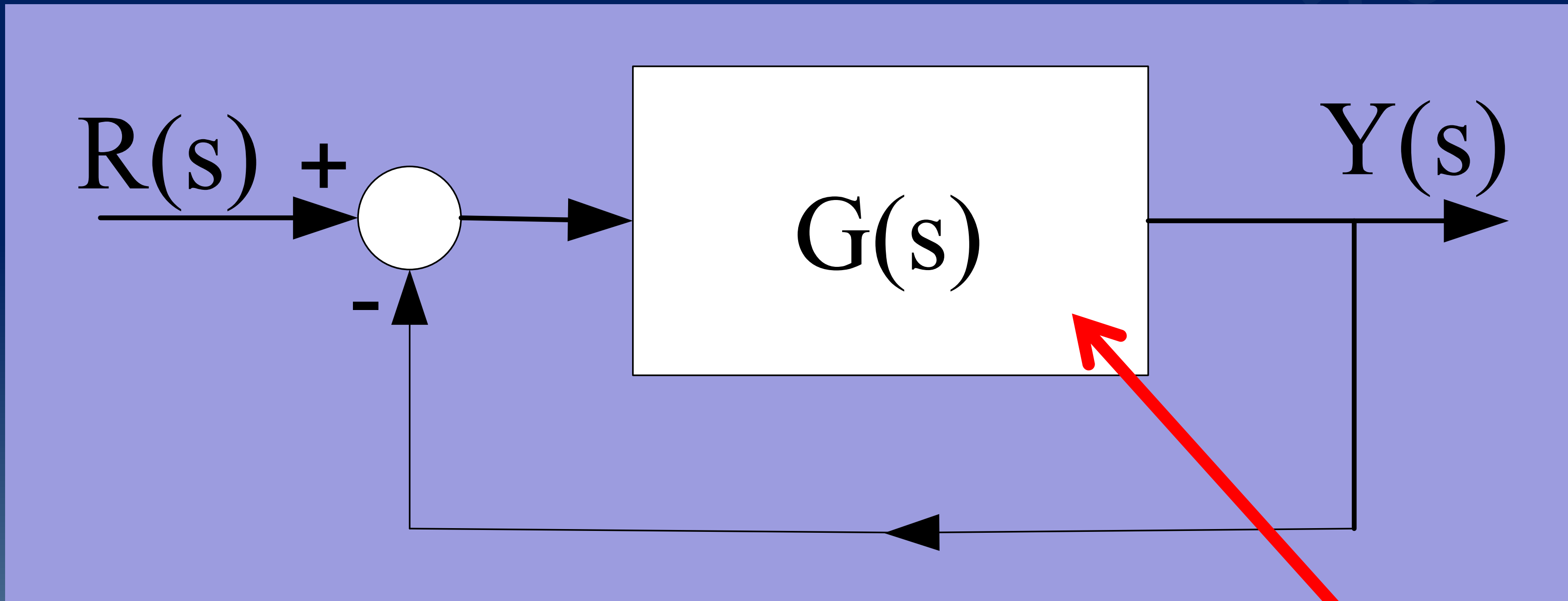
(*Steady state output*):

e portanto,

$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\,G(s)R(s)}{[1+G(s)H(s)]}$$

$$\Rightarrow \quad y_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\,G(s)R(s)}{[1+G(s)H(s)]}$$

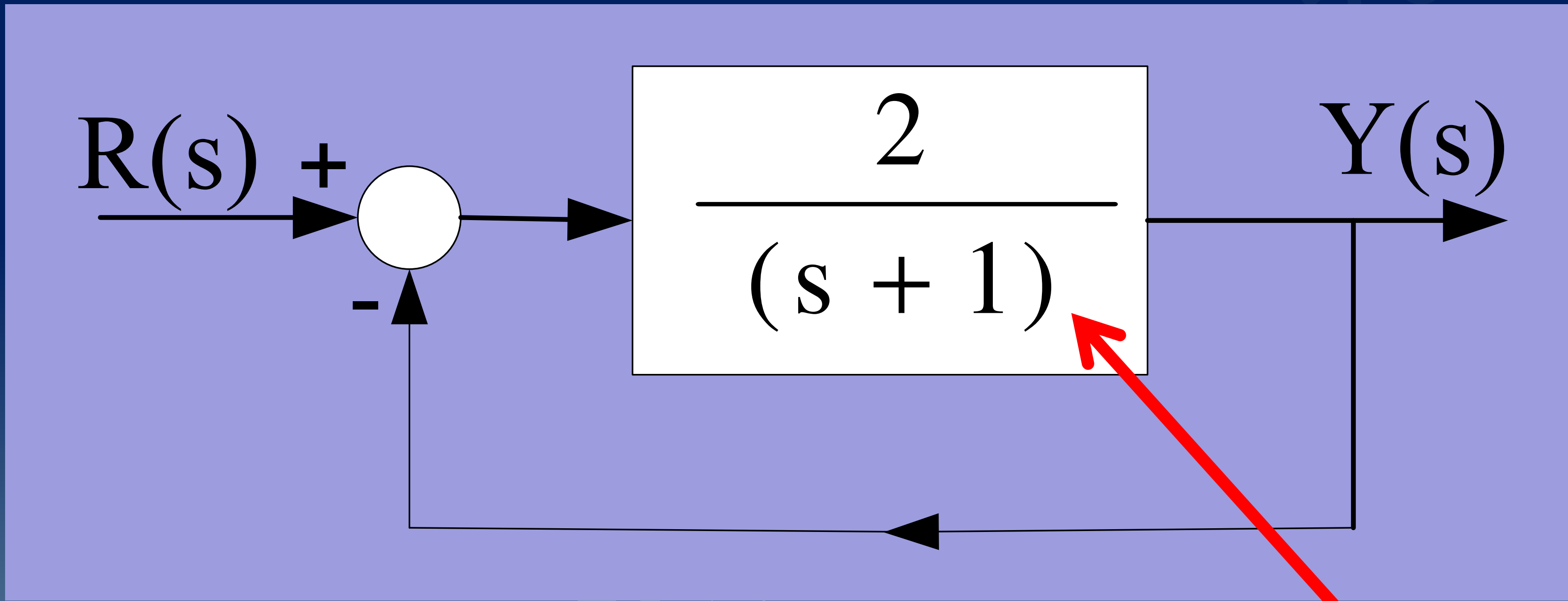
Exemplo 5:



$$G(s) = \frac{2}{(s+1)}$$

Exemplo 5:

(continuação)



entrada r(t):

$$r(t) = u_1(t)$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)}$$

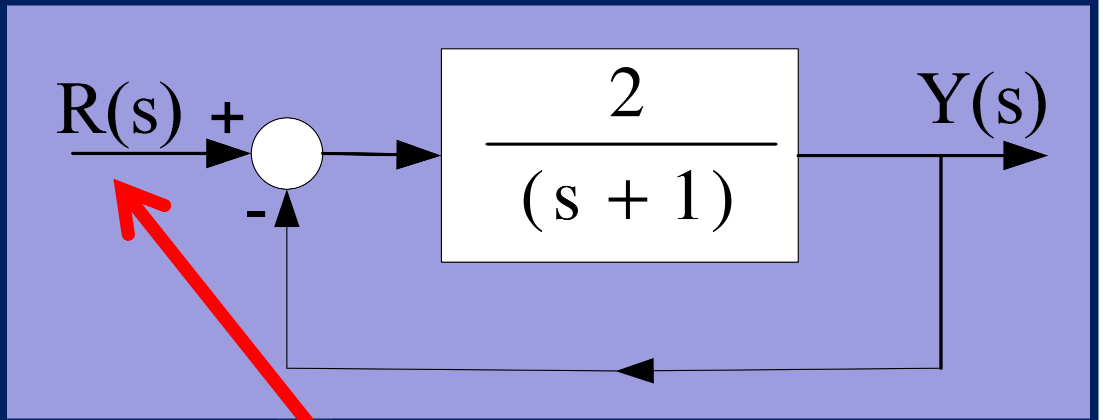
r(t) = degrau unitário

Exemplo 5:

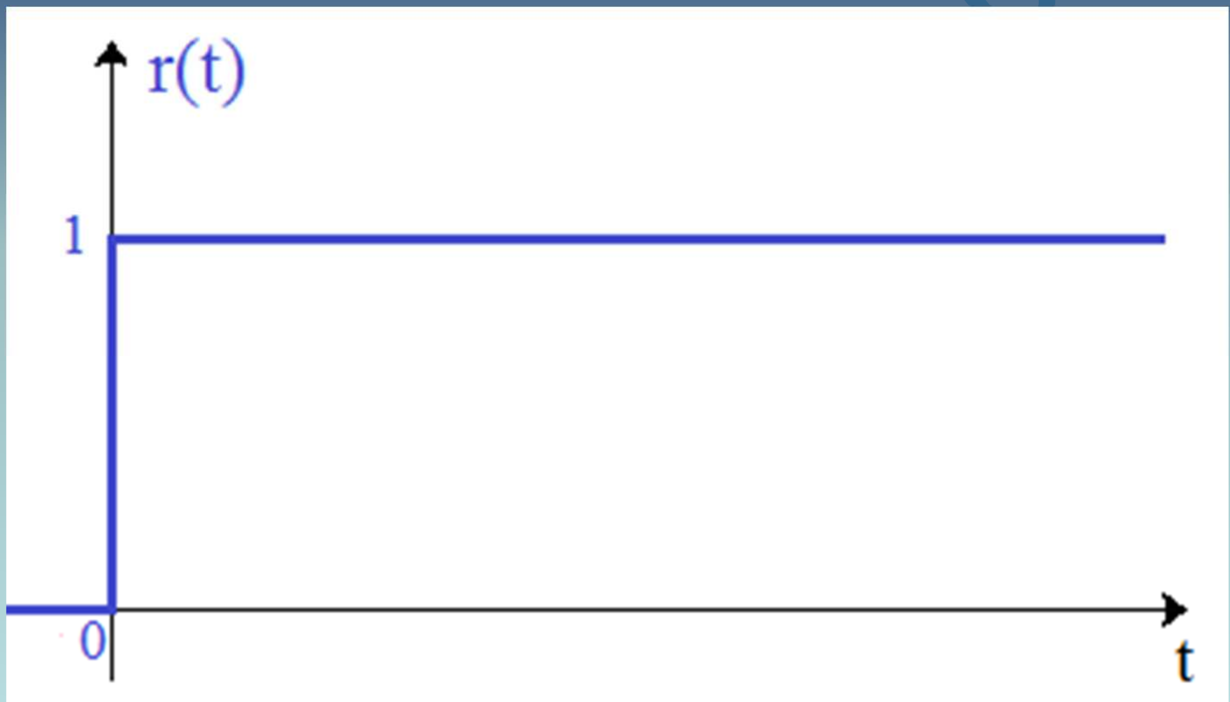
(continuação)

entrada r(t):

$$r(t) = u_1(t)$$



r(t) = degrau unitário

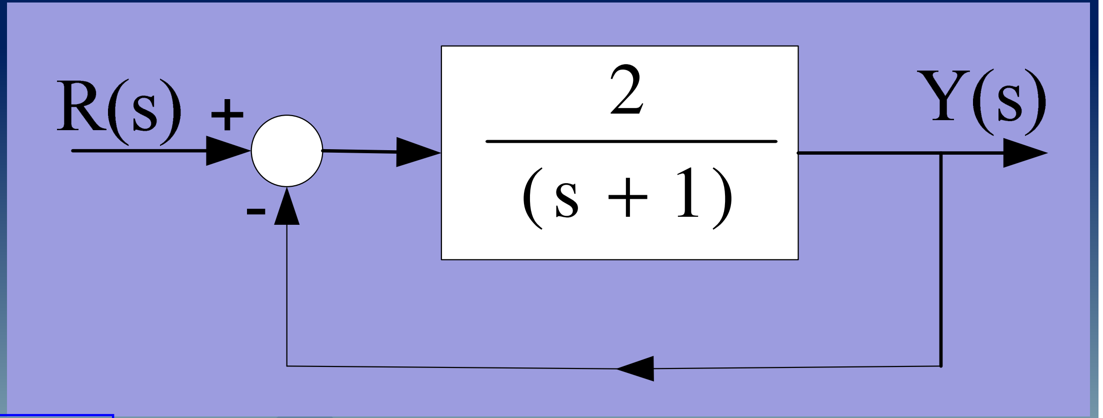


$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Exemplo 5:

(continuação)

$$R(s) = \frac{1}{s}$$



saída $y(t)$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{[1+G(s)H(s)]} \cdot R(s)$$

$$= \frac{\dfrac{2}{(s+1)}}{\left[1+\dfrac{2}{(s+1)}\right]} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{2}{s(s+3)}$$

saída em estado estacionário y_{ss}

(*steady state output*)

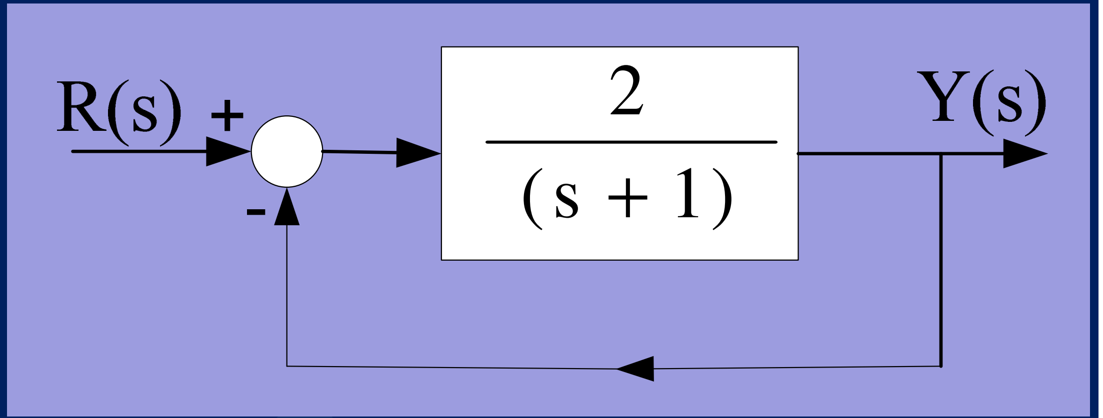
$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) =$$

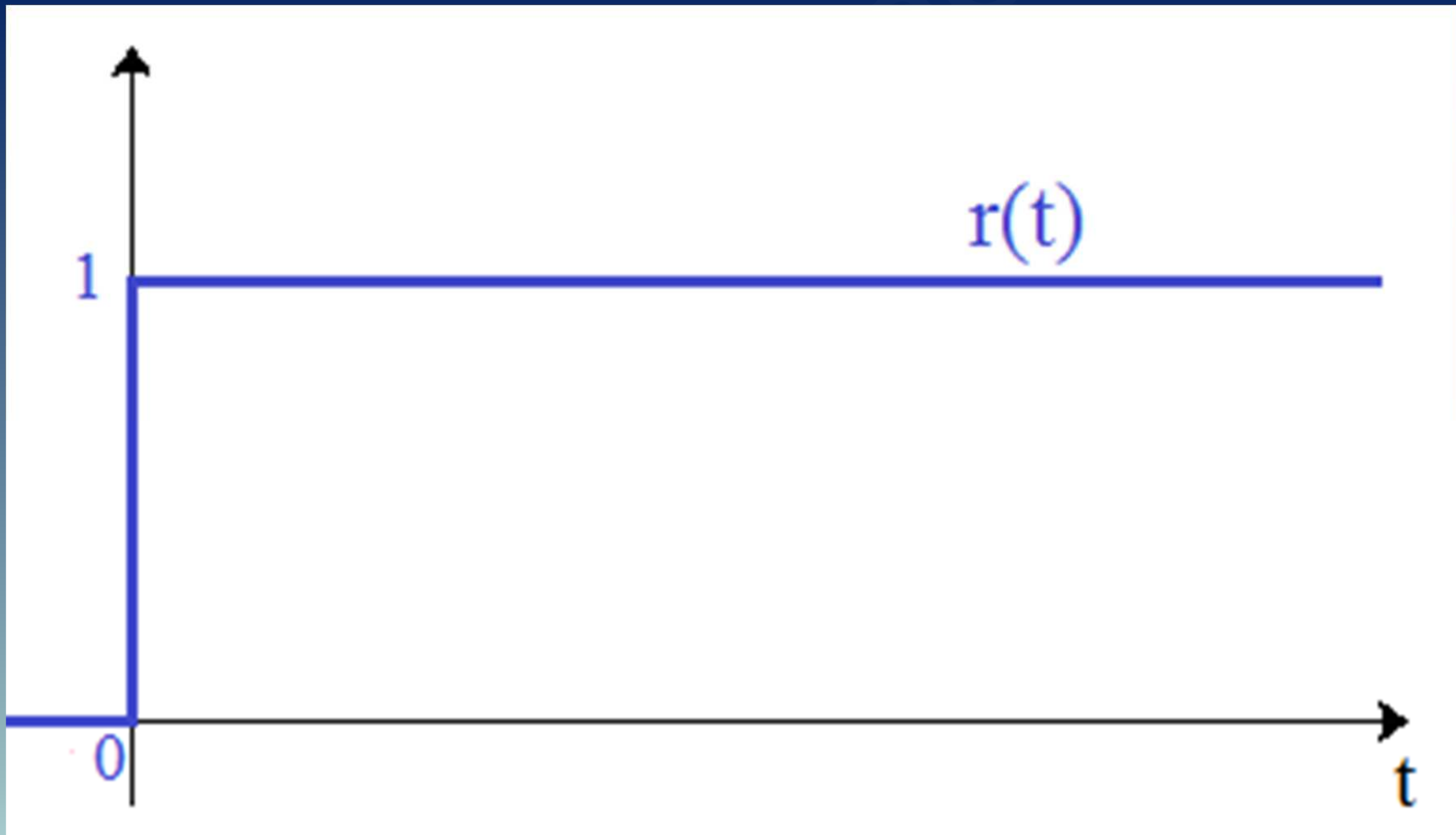
$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{2}{\cancel{s}(s+3)}$$

$$= 2/3$$

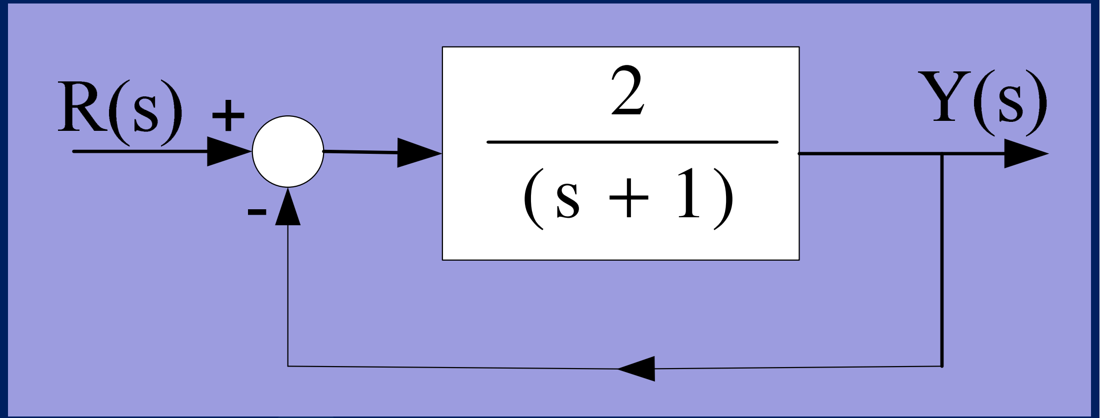
Exemplo 5:

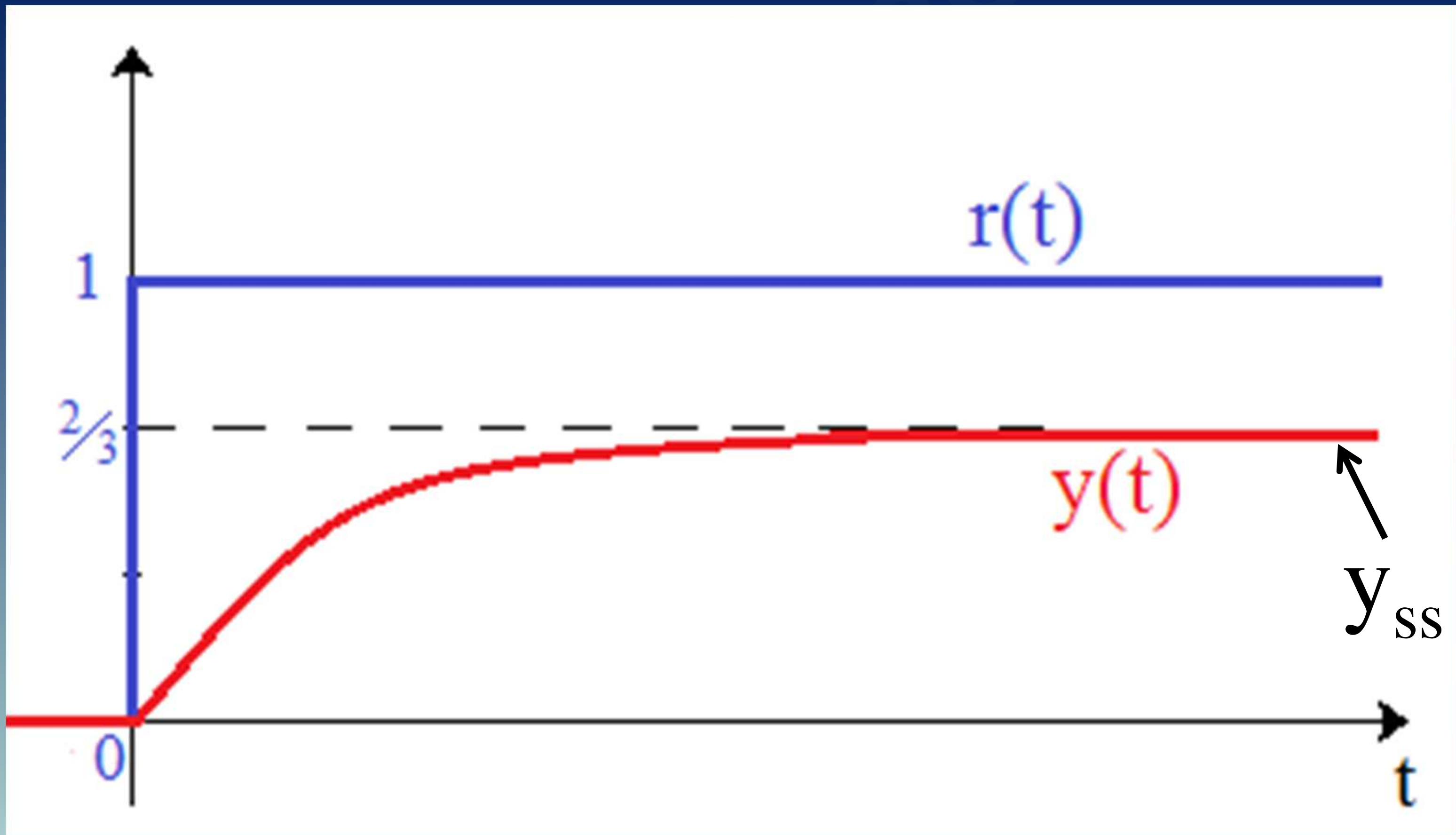
(continuação)





Exemplo 5:
(continuação)

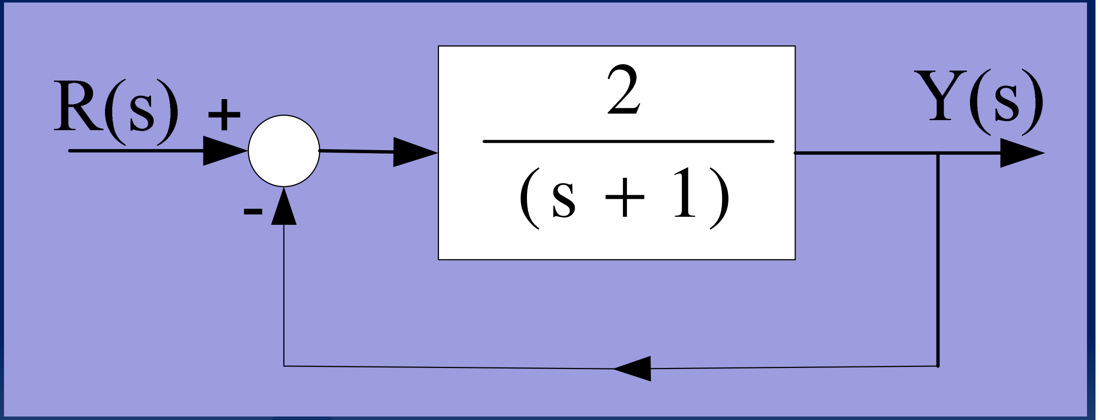




$= 2/3$

Exemplo 5:

(continuação) $R(s) = \dfrac{1}{s}$



erro $e(t)$

$$E(s) = \frac{R(s)}{[1+G(s)H(s)]}$$

$$= \frac{1/s}{\left[1+\dfrac{2}{(s+1)}\right]}$$

$$= \frac{(s+1)}{s(s+3)}$$

erro em estado estacionário e_{ss}

(steady state error)

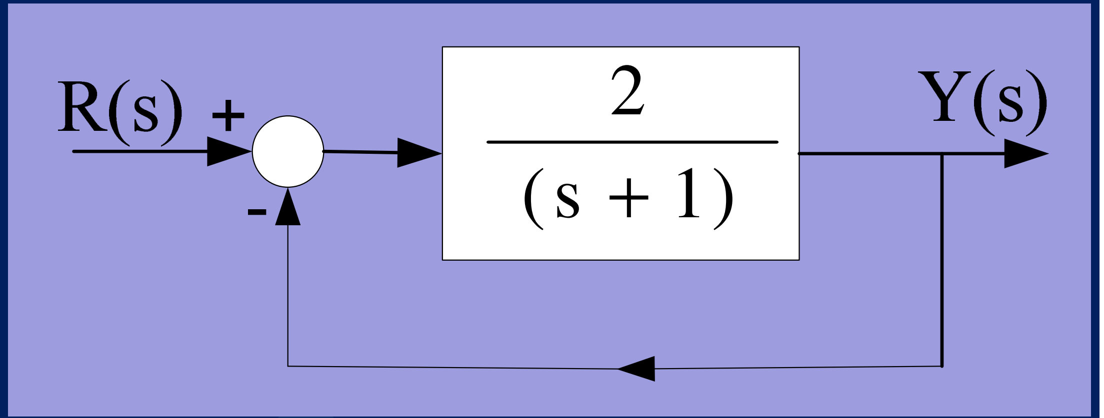
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) =$$

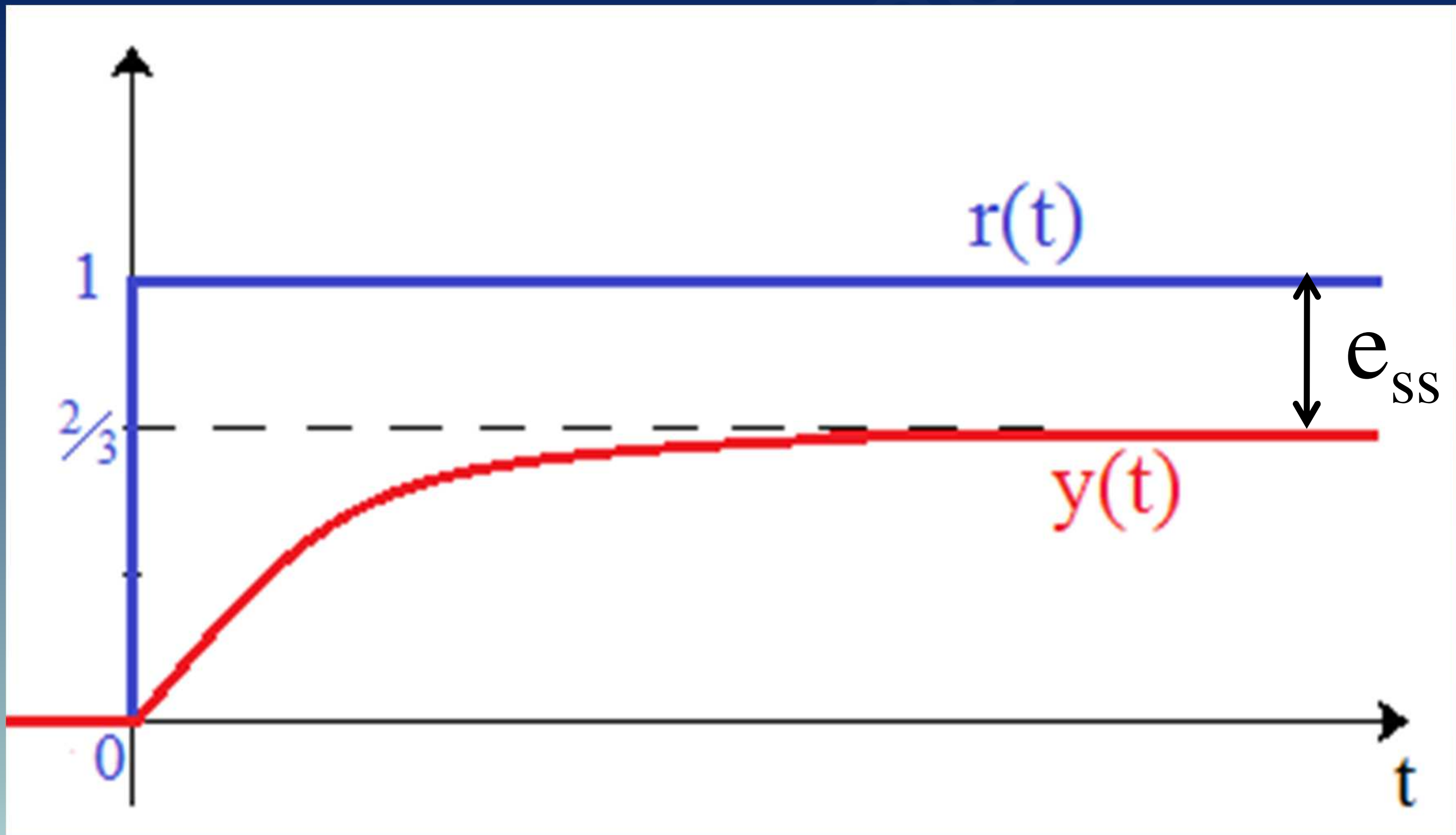
$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{(s+1)}{\cancel{s}(s+3)}$$

$$= 1/3$$

Exemplo 5:

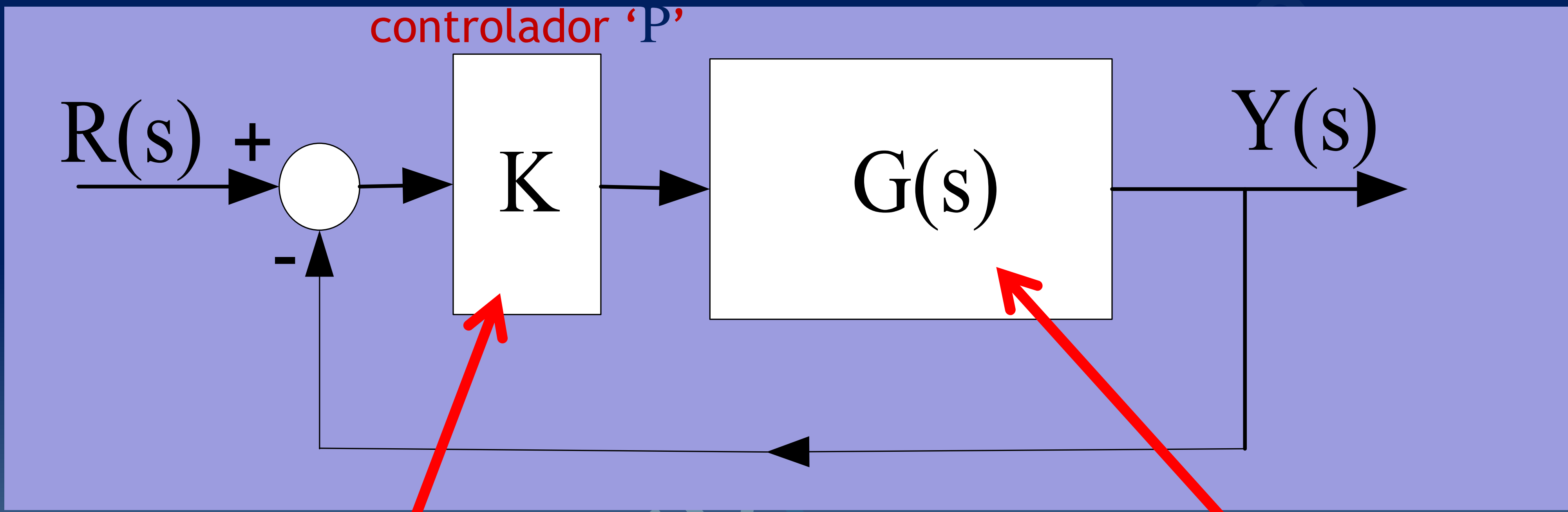
(continuação)





= 1/3

Exemplo 6:

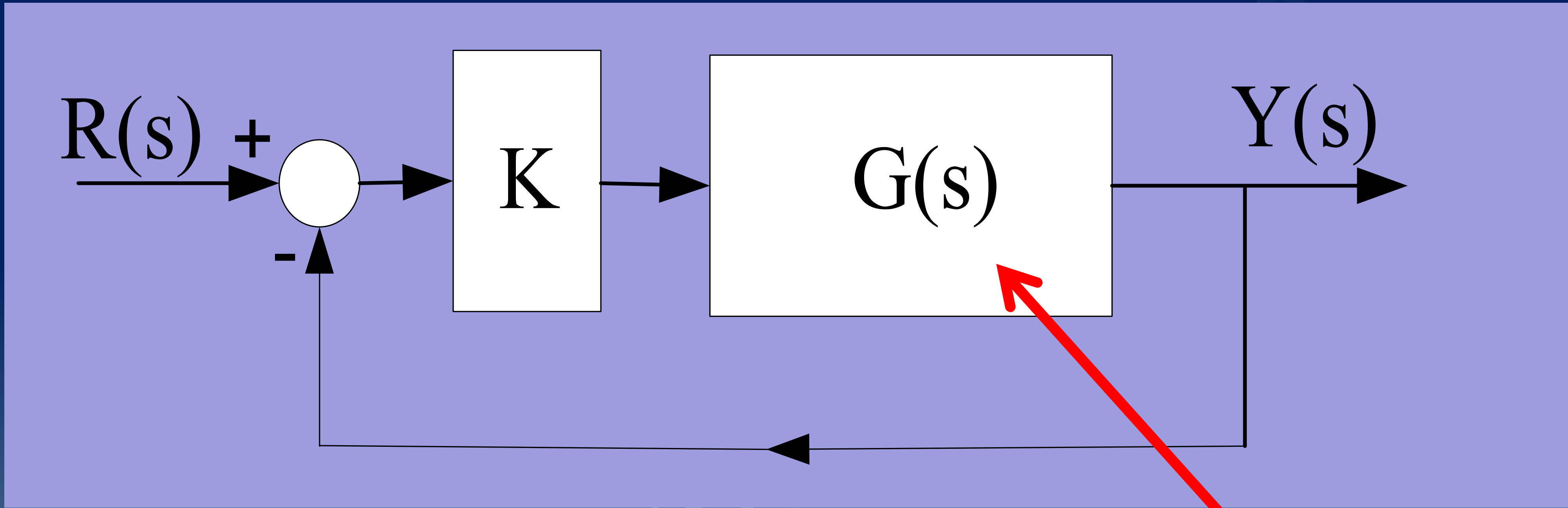


Mas agora temos K, chamado "*controlador proporcional*" ou "*controlador* P"

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)}$$

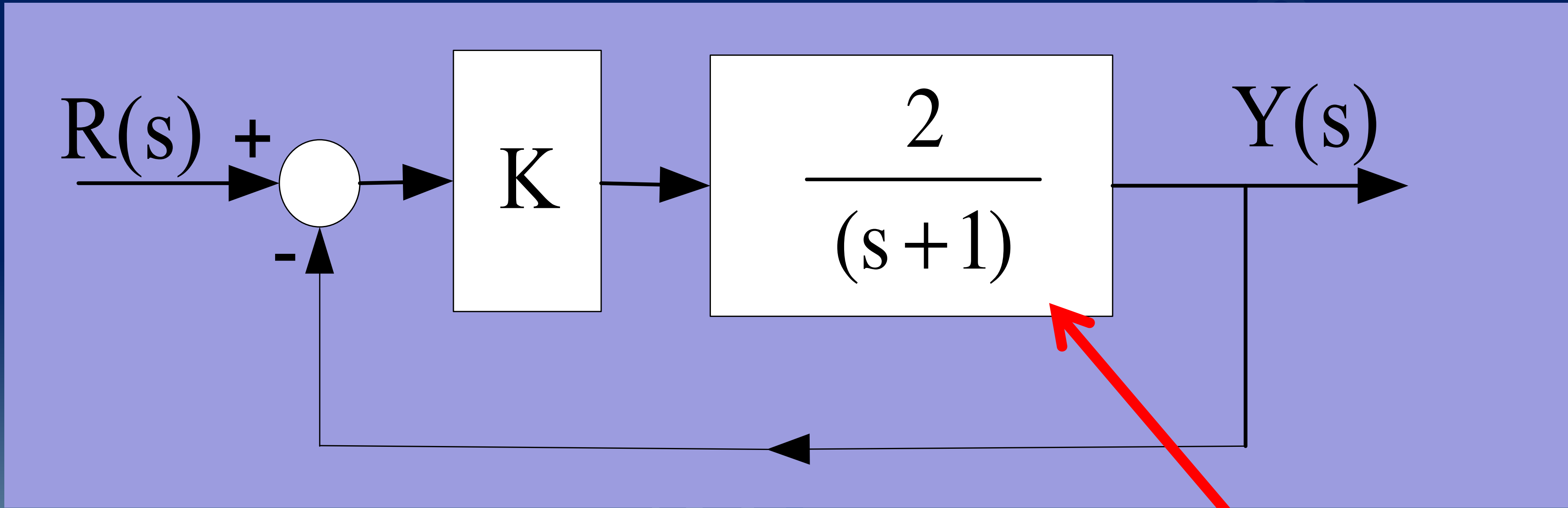
o mesmo do exemplo anterior

Exemplo 6: (continuação)



$$G(s) = \frac{2}{(s+1)}$$

Exemplo 6: (continuação)



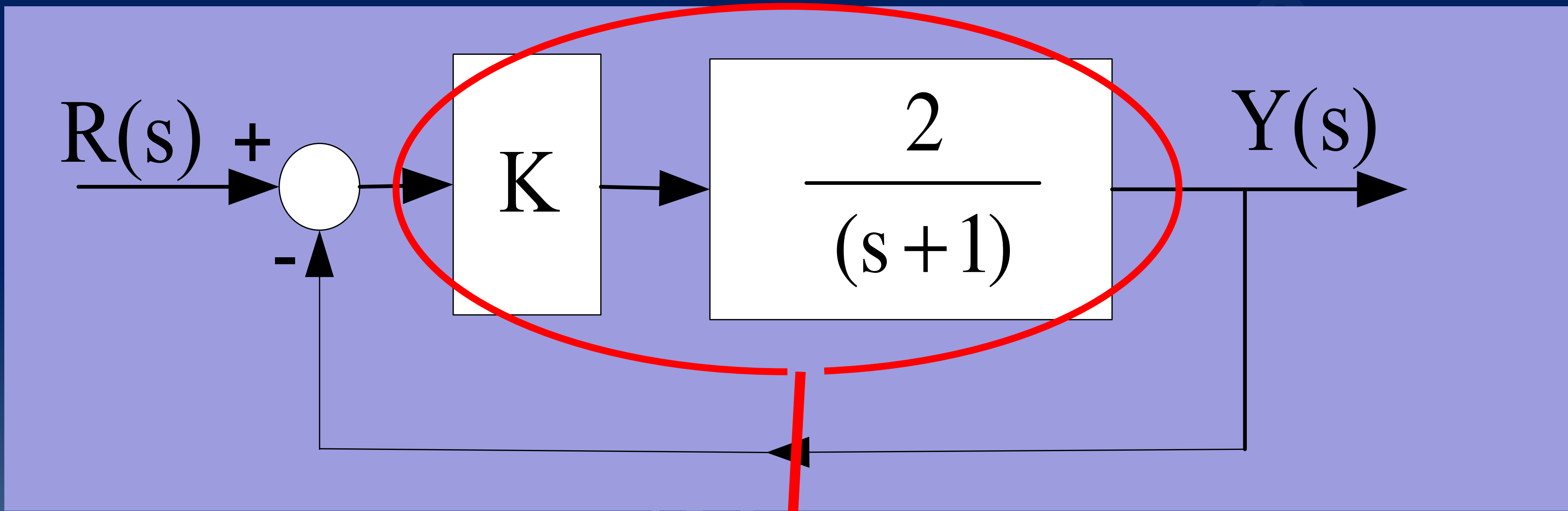
entrada r(t):

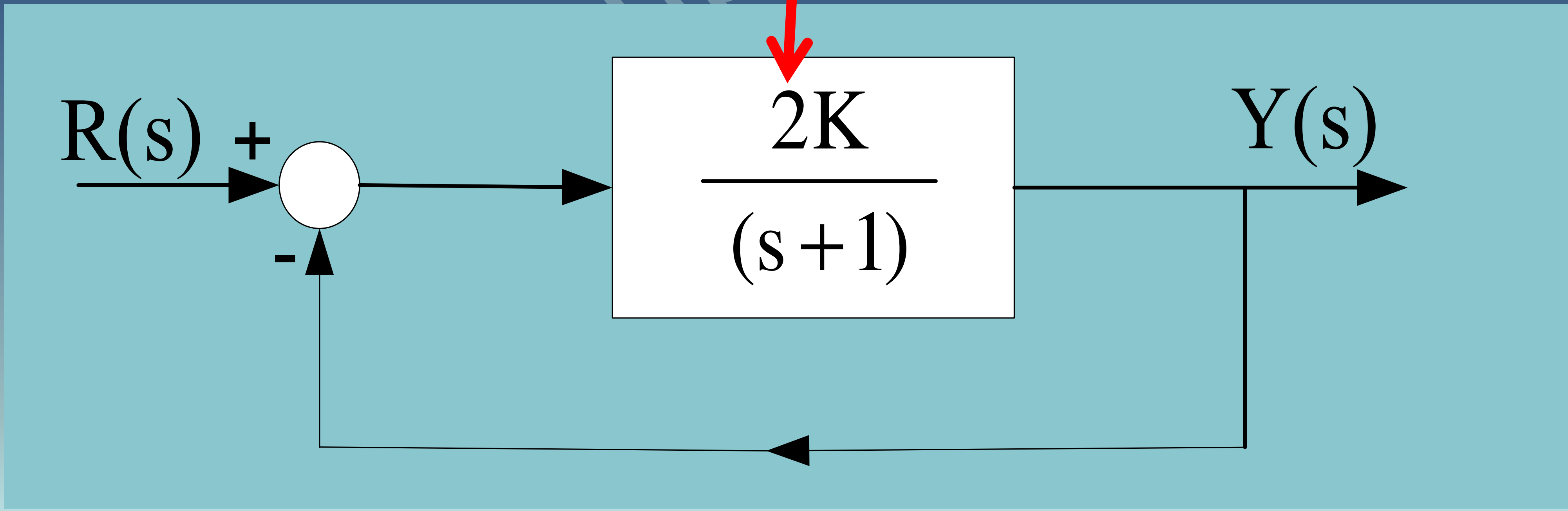
$$r(t) = u_1(t)$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)}$$

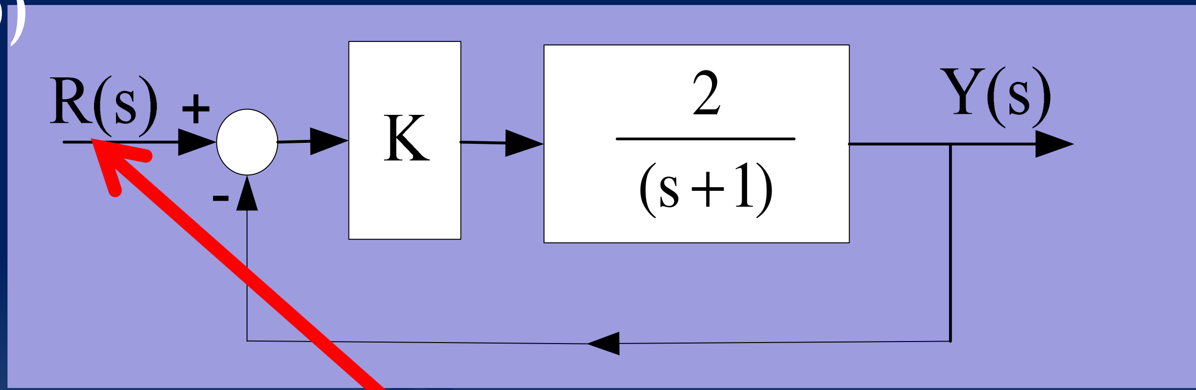
r(t) = degrau unitário
(*novamente*)

Exemplo 6: (continuação)





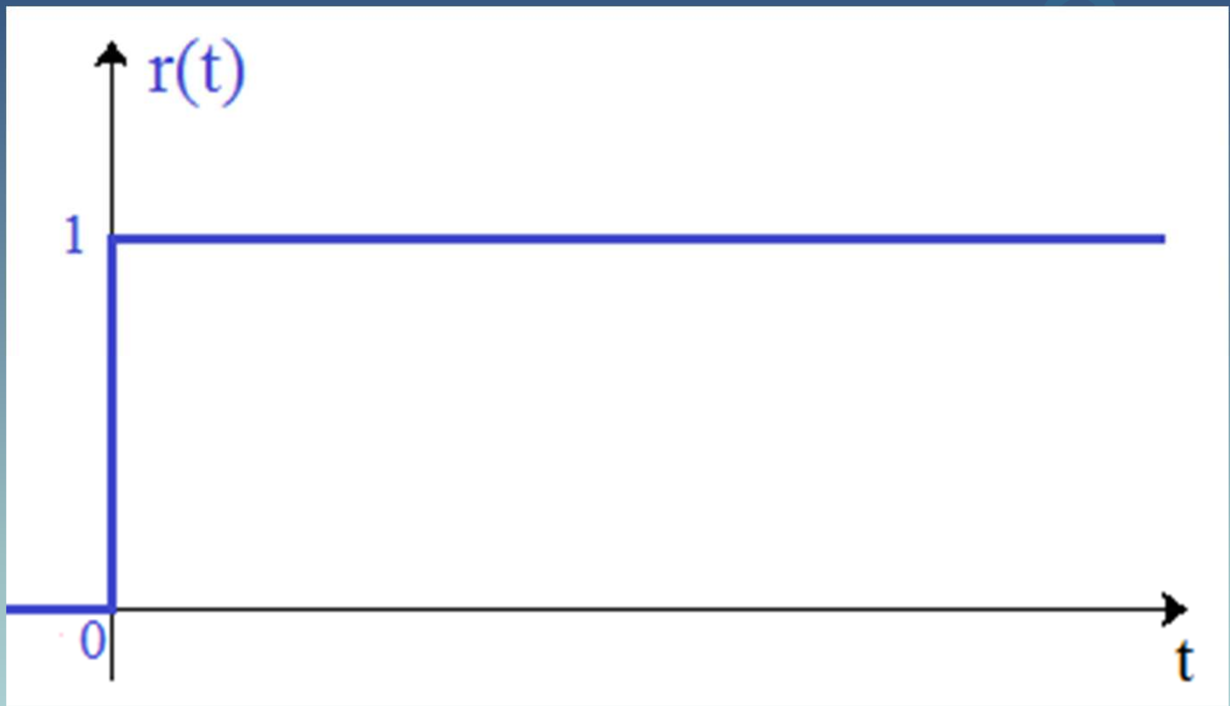
Exemplo 6: (continuação)



entrada r(t):

$$r(t) = u_1(t)$$

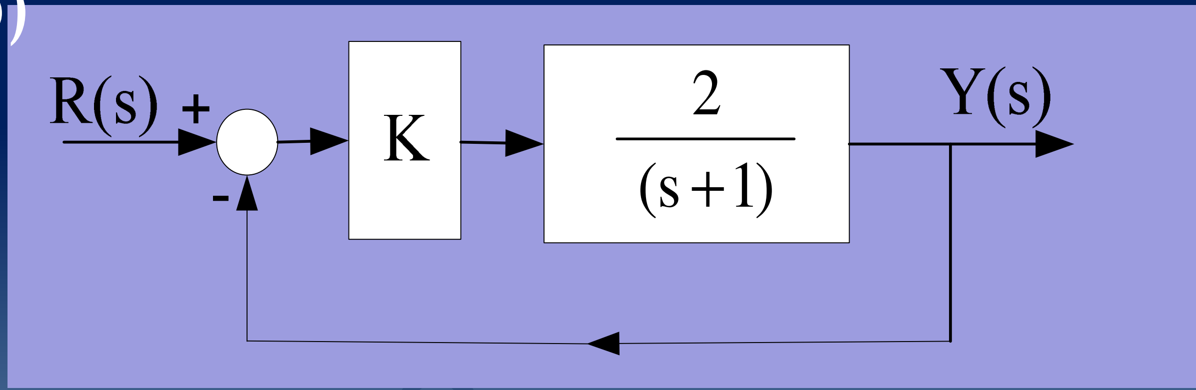
r(t) = degrau unitário



$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Exemplo 6: (continuação)

$$R(s) = \frac{1}{s}$$



saída $y(t)$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{\left[1 + G(s)H(s)\right]} \cdot R(s)$$

$$= \frac{\dfrac{2K}{(s+1)}}{\left[1 + \dfrac{2K}{(s+1)}\right]} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{2K}{s\,(s + 2K + 1)}$$

Saída em estado estacionário y_{ss}

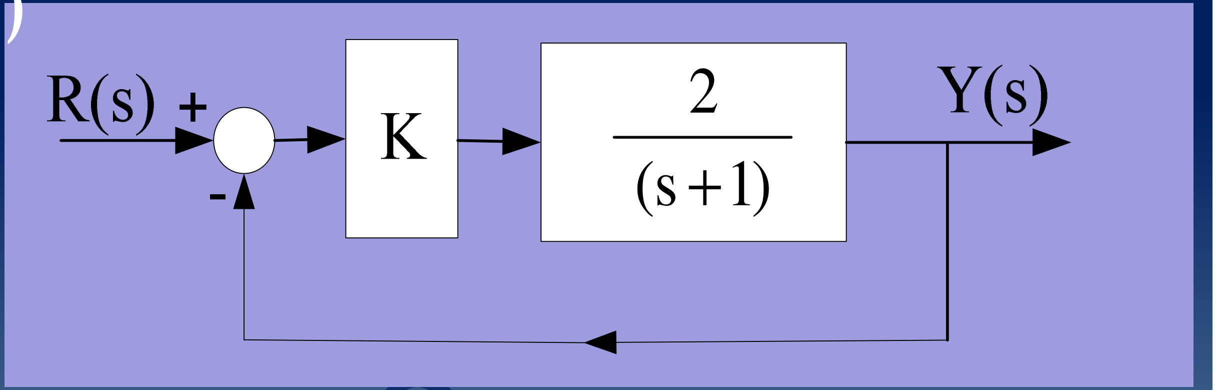
(Steady state output)

$$y_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) =$$

$$= \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{2K}{\cancel{s}\,(s + 2K + 1)}$$

$$= \frac{2K}{(2K + 1)}$$

Exemplo 6: (continuação)



saída em estado estacionário y_{ss} (*steady state output*)

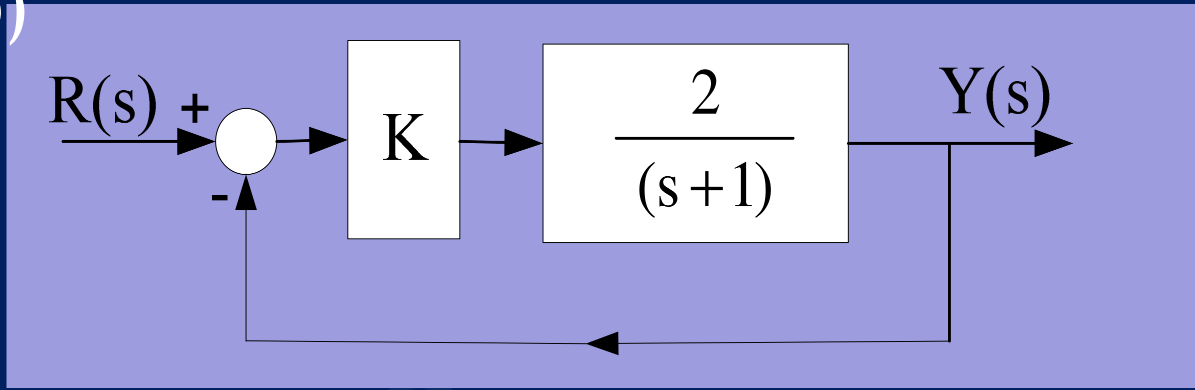
se K é suficiente-mente grande

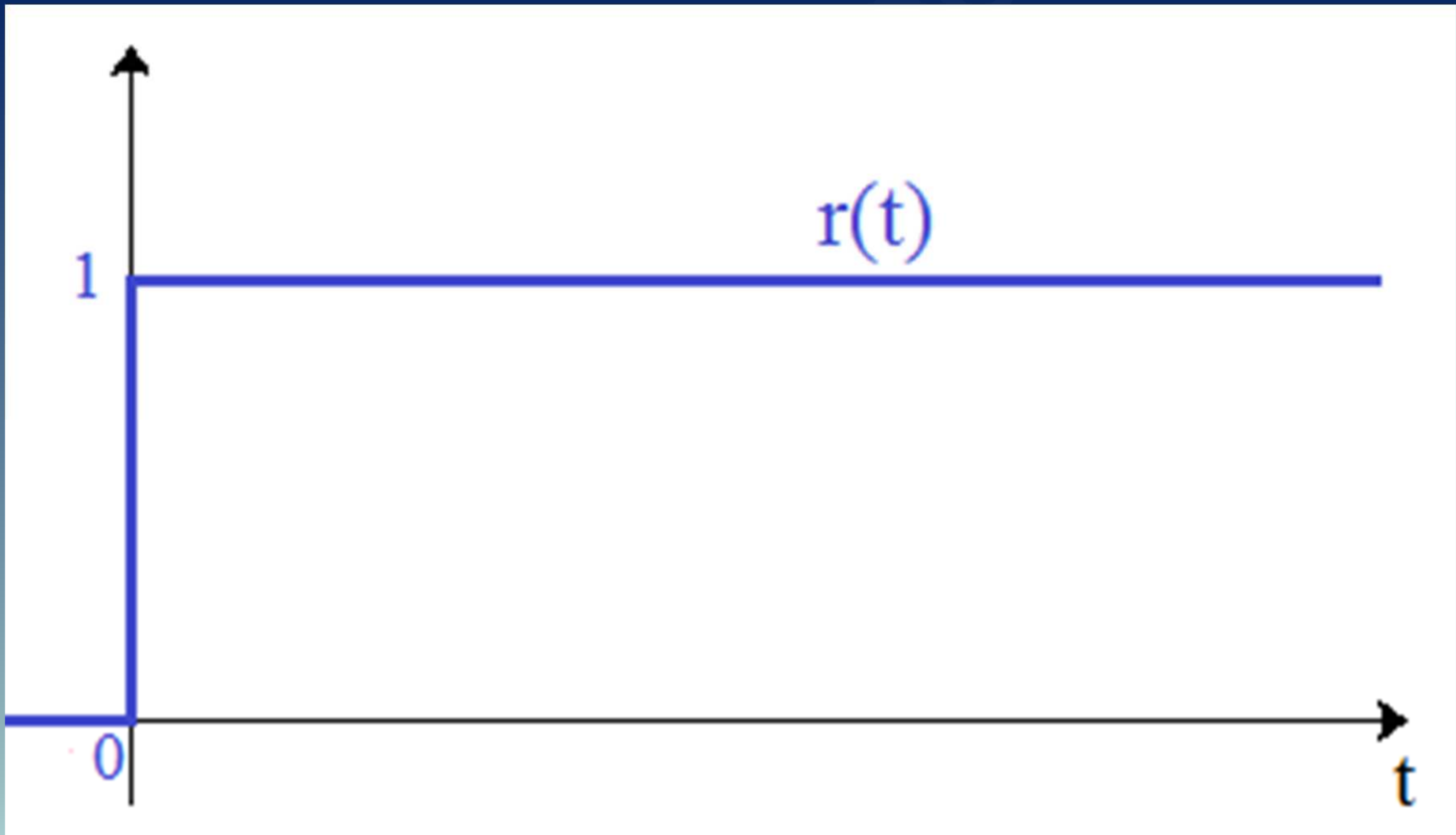
$$y_{ss} = \frac{2K}{(2K+1)} \cong 1$$

ou

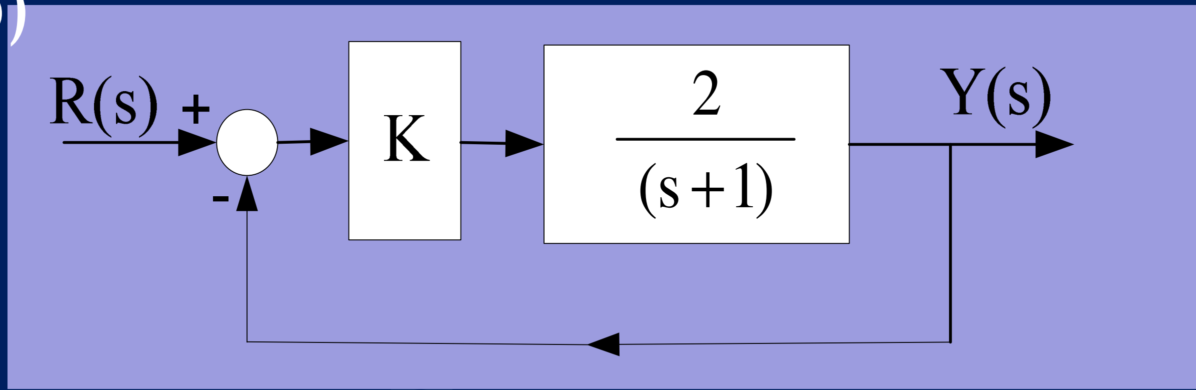
$$y_{ss} \to 1 \quad \text{quando} \quad K \to \infty$$

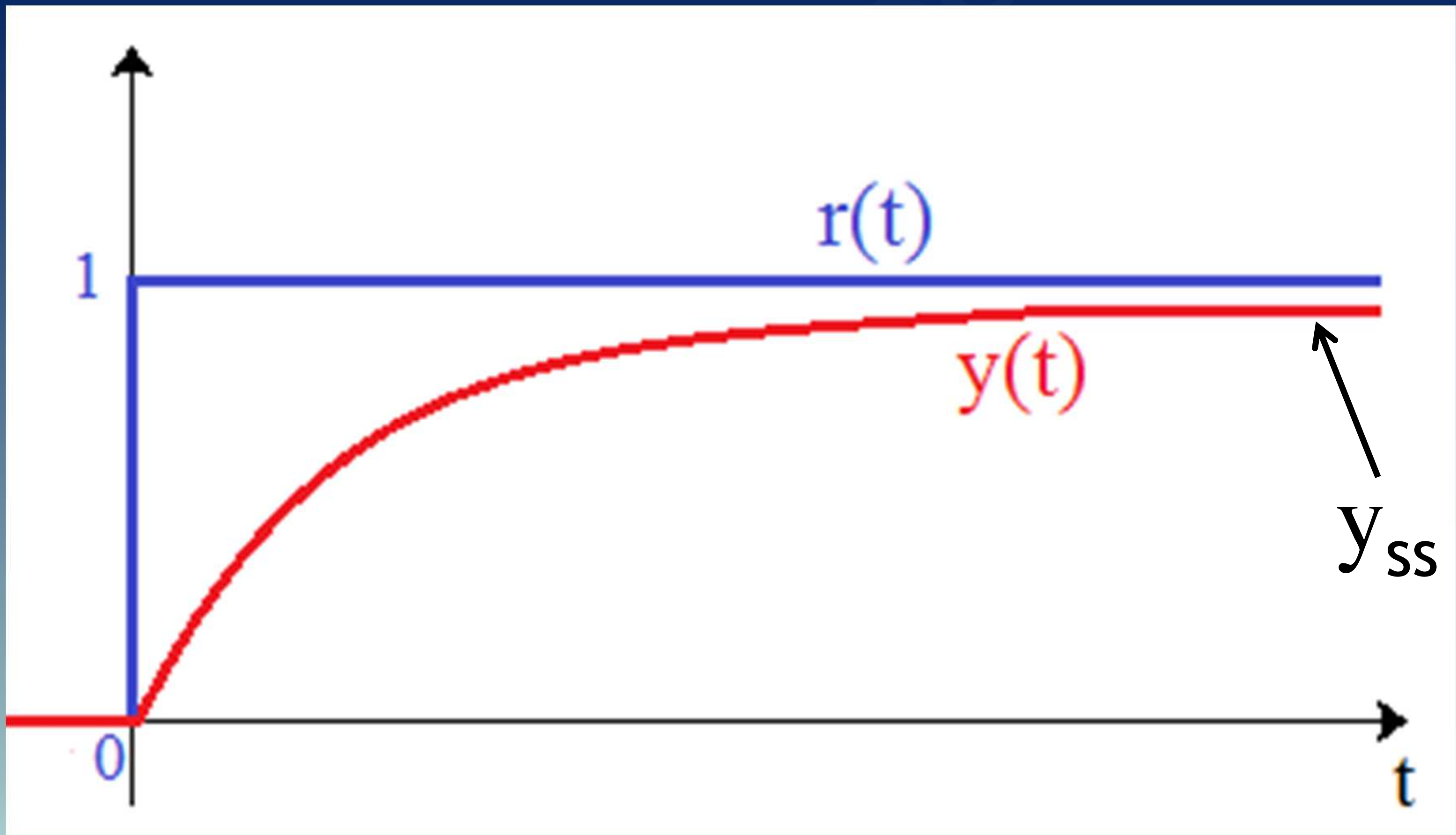
Exemplo 6: (continuação)





Exemplo 6: (continuação)



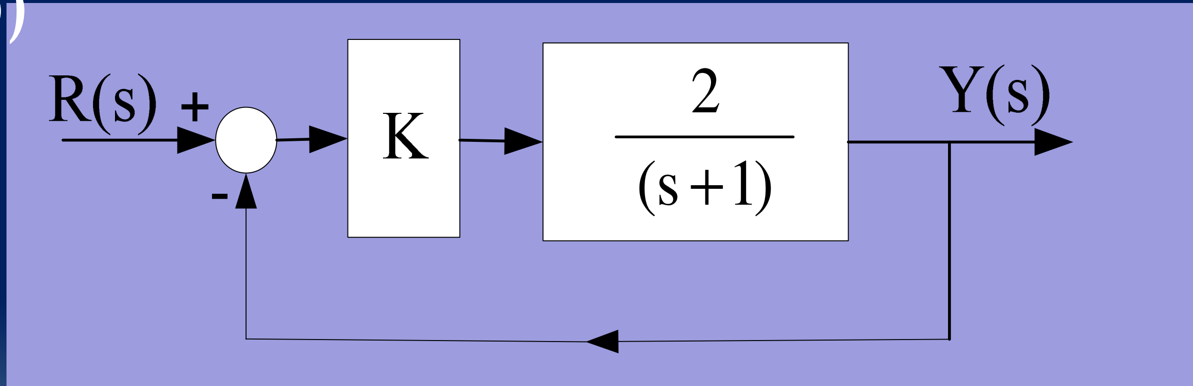


≈ 1

Diagramas blocos & erro

Exemplo 6: (continuação)

$$R(s) = \frac{1}{s}$$



erro $e(t)$

$$E(s) = \frac{R(s)}{[1+G(s)H(s)]}$$

$$= \frac{1/s}{\left[1+\frac{2K}{(s+1)}\right]}$$

$$= \frac{(s+1)}{s\,(s+2K+1)}$$

erro em estado estacionário

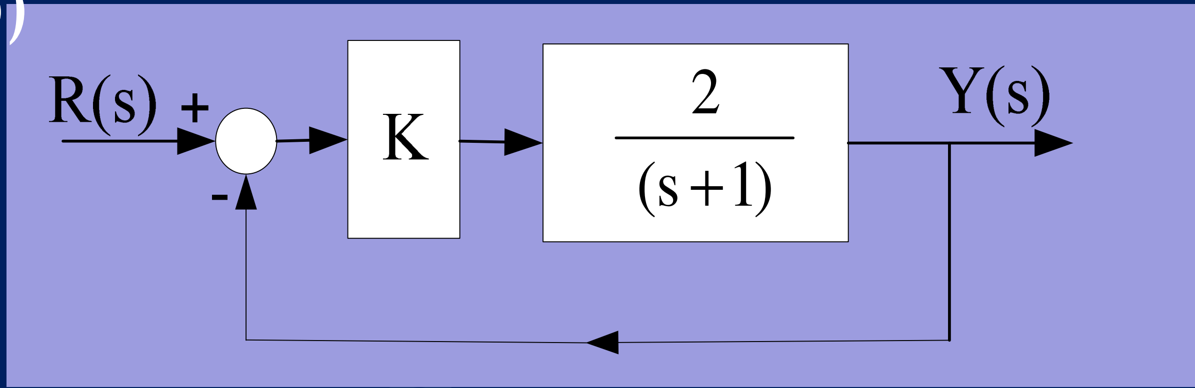
e_{ss} *(steady state error)*

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{(s+1)}{\cancel{s}(s+2K+1)}$$

$$= \frac{1}{(2K+1)}$$

Exemplo 6: (continuação)



erro em estado estacionário e_{ss} (*steady state error*)

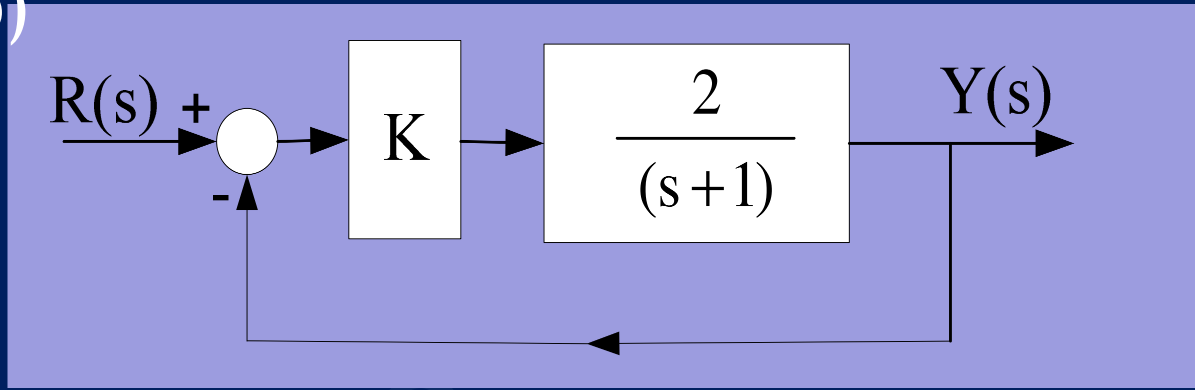
se K é suficiente-mente grande

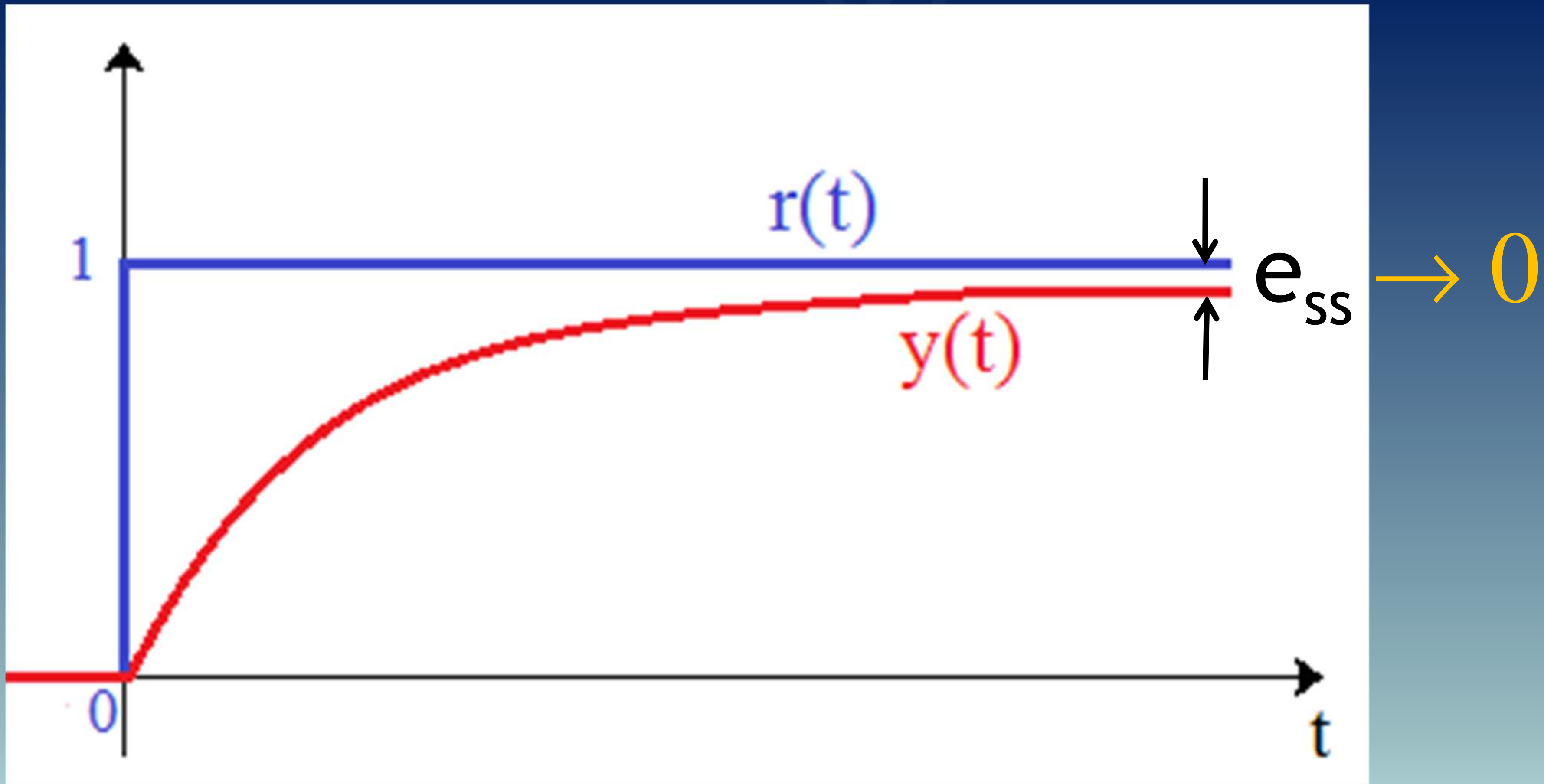
$$e_{ss} = \frac{1}{(2K+1)} \cong 0$$

ou

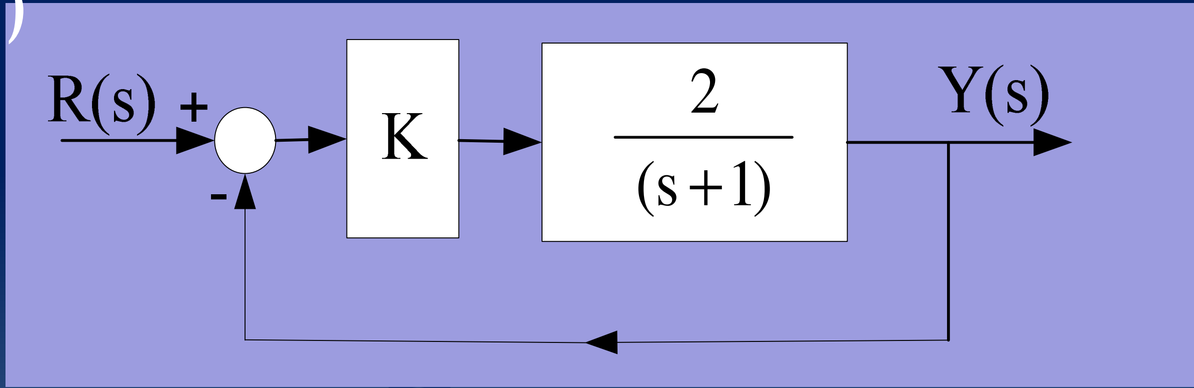
$$e_{ss} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad K \rightarrow \infty$$

Exemplo 6: (continuação)





Exemplo 6: (continuação)



qual o valor que deveríamos ajustar o K para que o erro em estado estacionário (*steady state error*) seja

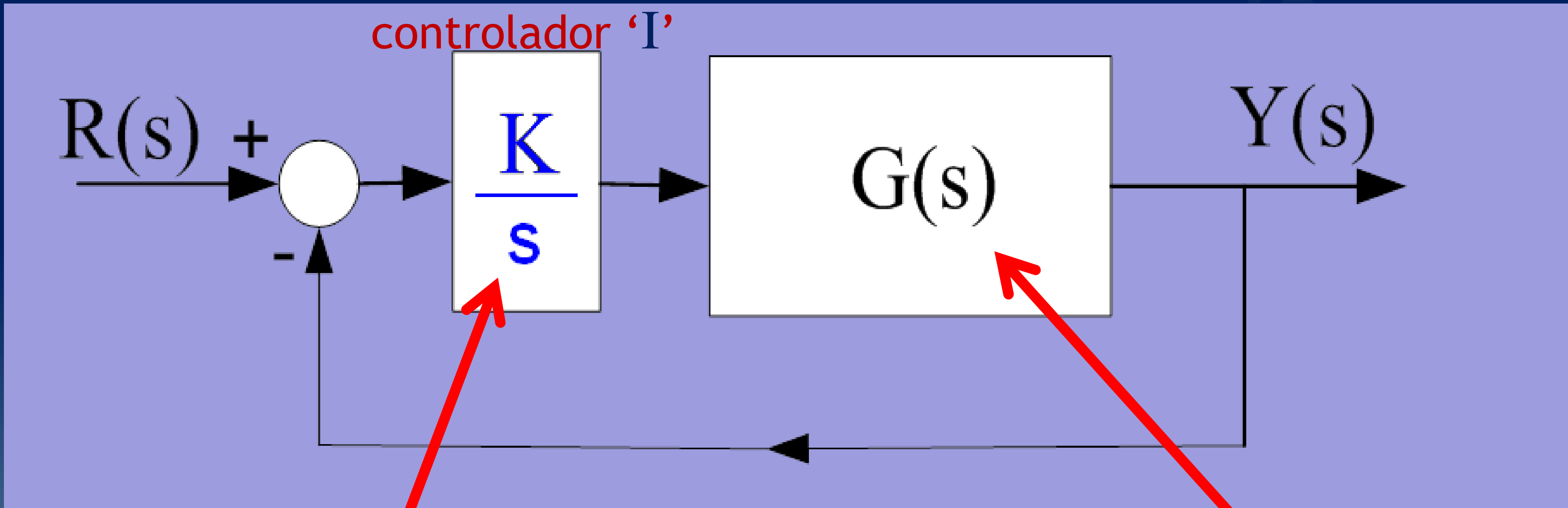
$$e_{ss} < 0{,}01$$

$$e_{ss} = \frac{1}{(2K+1)} < 0{,}01 = \frac{1}{100} \Rightarrow 100 < (2K+1)$$

$$\Rightarrow K > 99/2 \Rightarrow K > 49{,}5$$

devemos escolher $K > 49{,}5$

Exemplo 7:



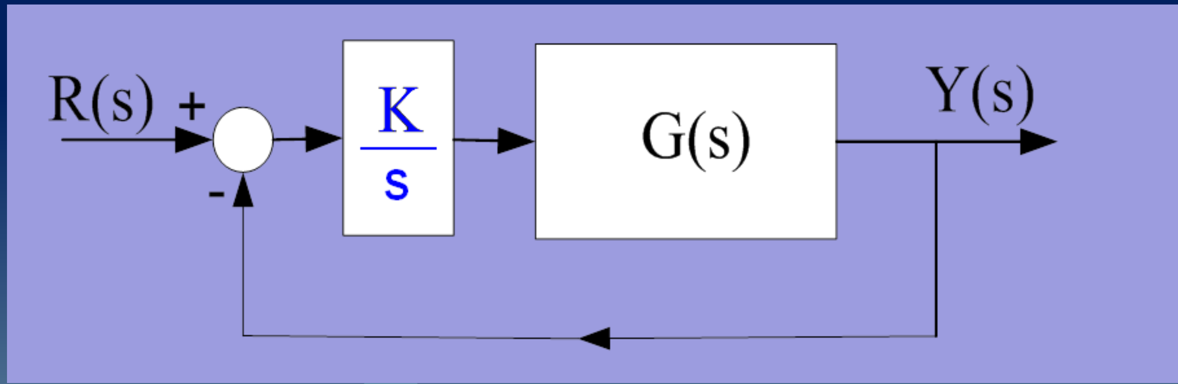
Usando K/s, temos um "*controlador integral*" ou "*controlador* I".

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)}$$

o mesmo do exemplo anterior

Exemplo 7:
(continuação)

$$R(s) = \frac{1}{s}$$



erro $e(t)$

$$E(s) = \frac{R(s)}{[1+G(s)H(s)]}$$

$$= \frac{1/s}{\left[1+\frac{2K}{s(s+1)}\right]}$$

$$= \frac{(s+1)}{(s^2+s+2K)}$$

erro em estado estacionário

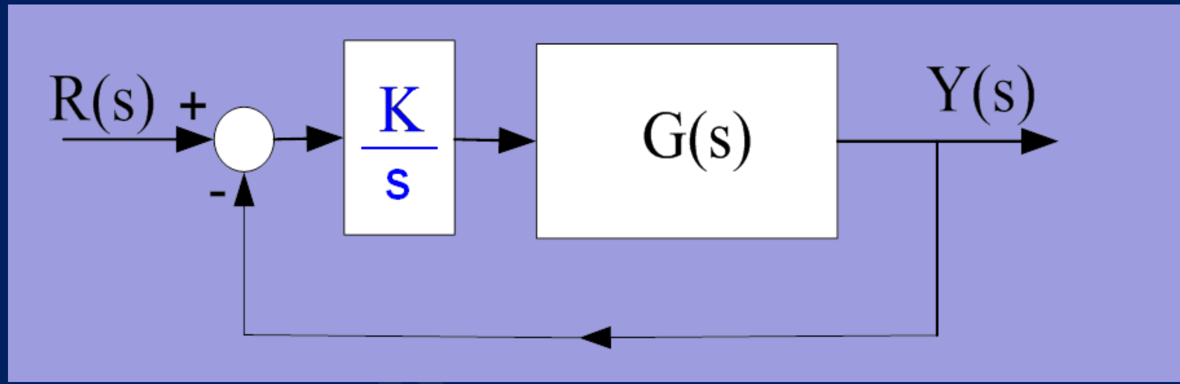
e_{ss} *(steady state error)*

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s\cdot \frac{(s+1)}{(s^2+s+2K)}$$

$$= 0$$

Exemplo 7:
(continuação)



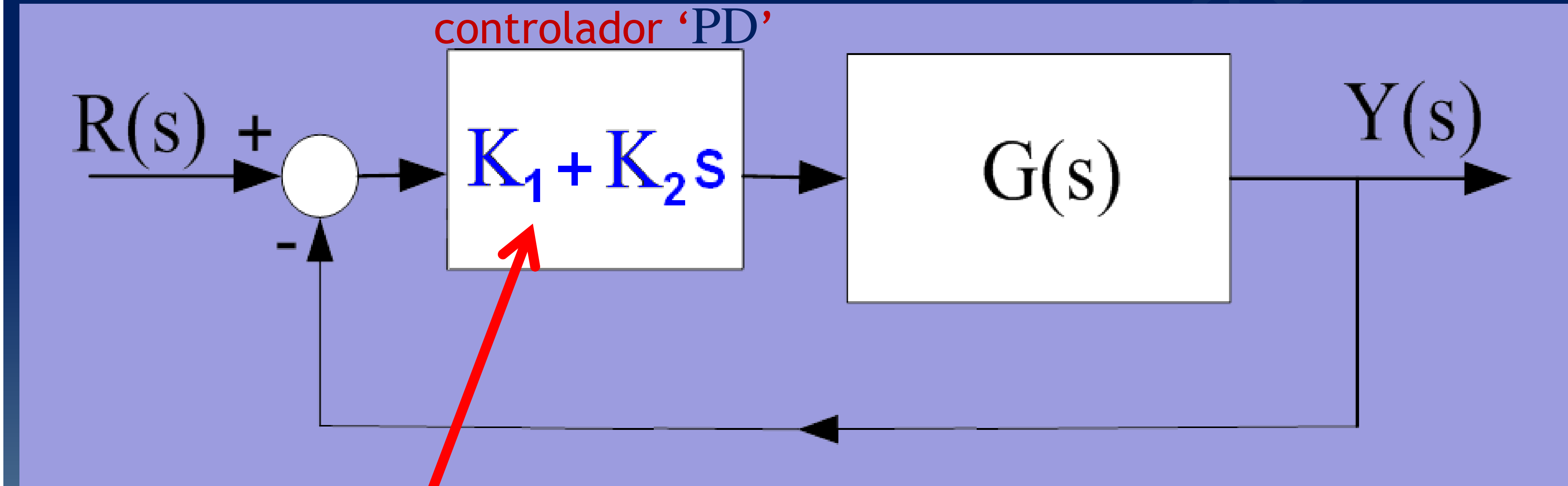
Logo, agora é possível, por exemplo, ajustar o K para que o erro em estado estacionário (*steady state error*) seja

$$e_{ss} = 0$$

devemos escolher $K > 0$

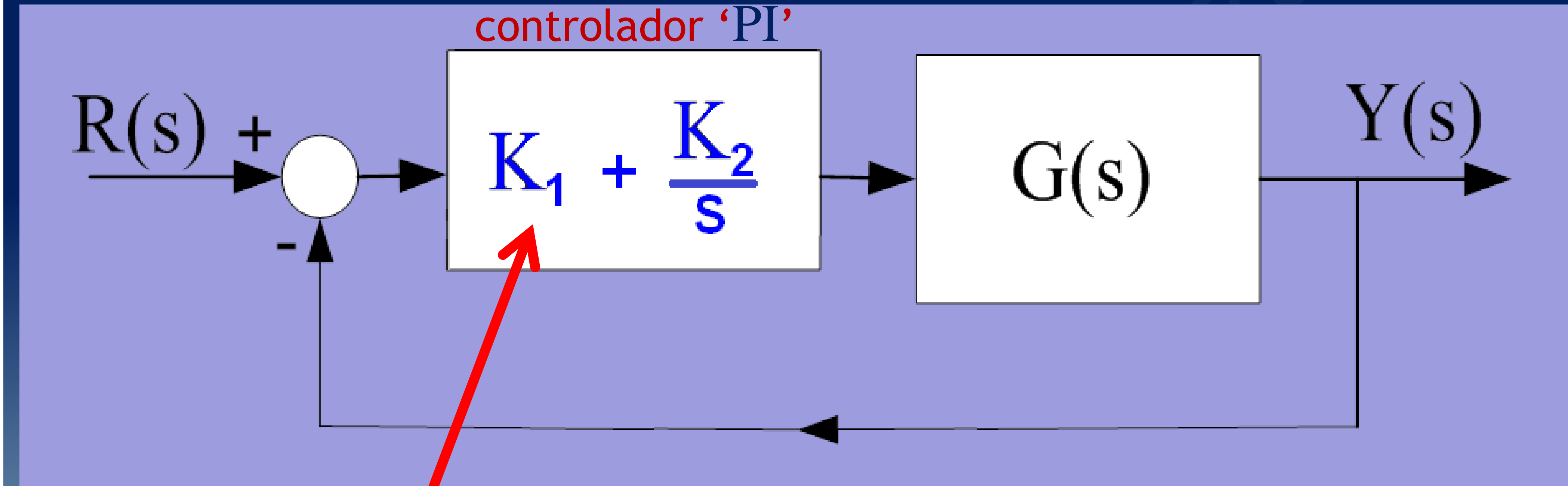
Diagramas blocos & erro

Há vários tipos de controladores



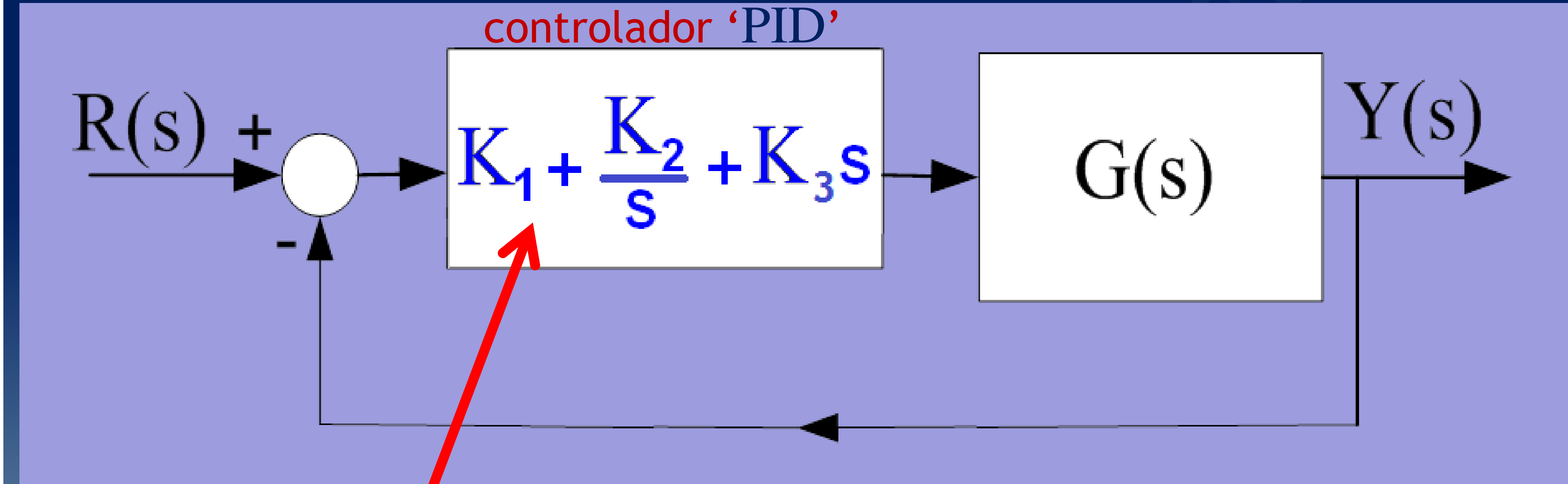
Usando $K_1 + K_2 s$, temos um "*controlador proporcional derivativo*" ou "*controlador* PD"

Há vários tipos de controladores



Usando $K_1 + K_2/s$, temos um "*controlador proporcional integral*" ou "*controlador* PI"

O caso mais geral é o 'controlador PID'



Usando $K_1 + K_2/s + K_3 s$, temos um "*controlador proporcional integral derivativo*" ou "*controlador* PID"

FACULDADE ENGENHARIA

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt