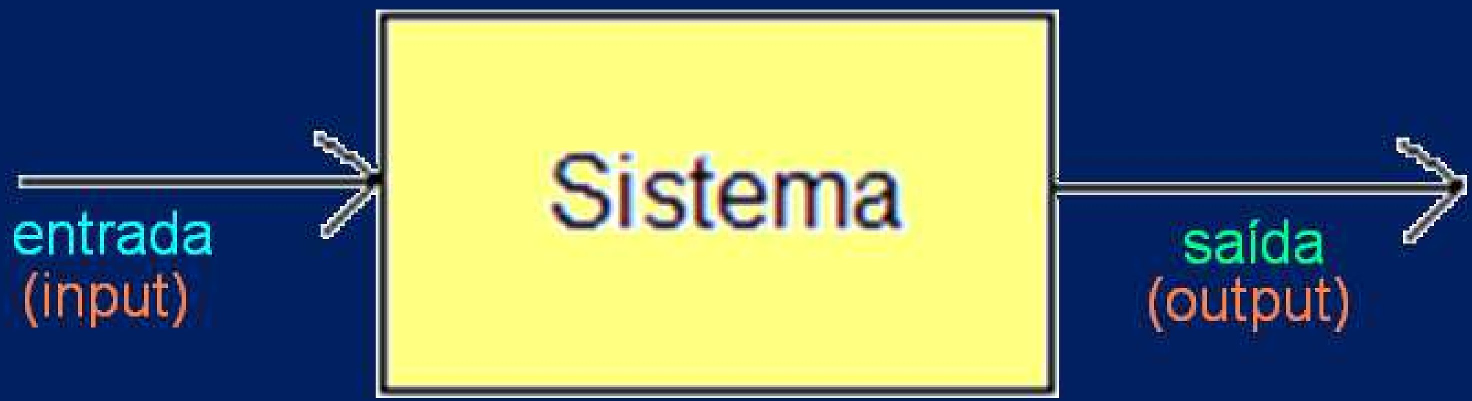
# Controlo de Sistemas

4

“Representação de Sistemas”

(*Systems representation*)

J. A. M. Felippe de Souza




## Função de Transferência

**Relação entre:**

$$\frac{\text{Transformada Laplace da saída } y(t)}{\text{Transformada Laplace da entrada } x(t)}$$

Y(s)

X(s)

**considerando condições iniciais nulas.**

Pierre Simon Laplace,
1749-1827

$$\text{Função de transferência} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$X(s)$ = Transformada Laplace de $x(t)$

$Y(s)$ = Transformada Laplace de $y(t)$

# Representação de Sistemas


$$\text{Função de transferência} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

saída (*output*)

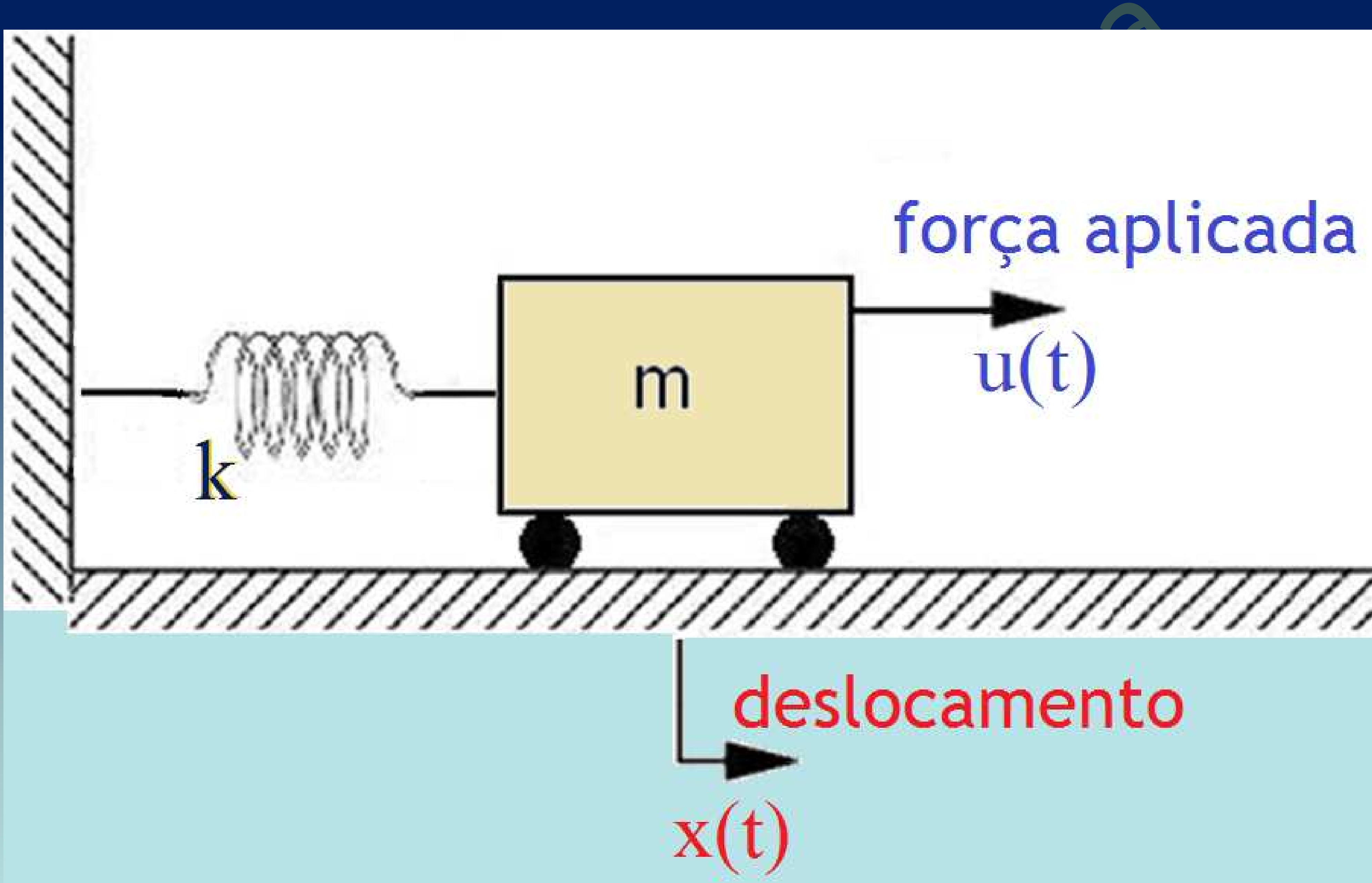
entrada (*input*)

$X(s)$ = Transformada Laplace de $x(t)$

$Y(s)$ = Transformada Laplace de $y(t)$

carro / massa / mola

carro / massa / mola



carro / massa / mola


$$\boxed{F.T. = \frac{X(s)}{U(s)}}$$

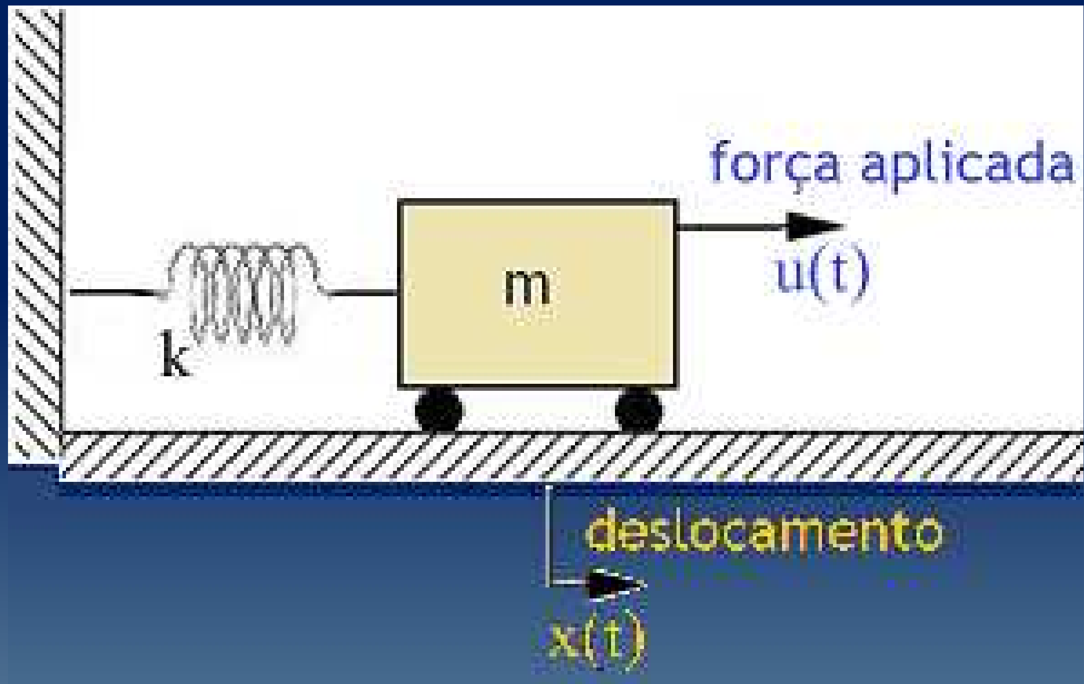
saída
(*output*)

entrada
(*input*)

$U(s)$ = Transformada Laplace de $u(t)$

$X(s)$ = Transformada Laplace de $x(t)$

carro / massa / mola

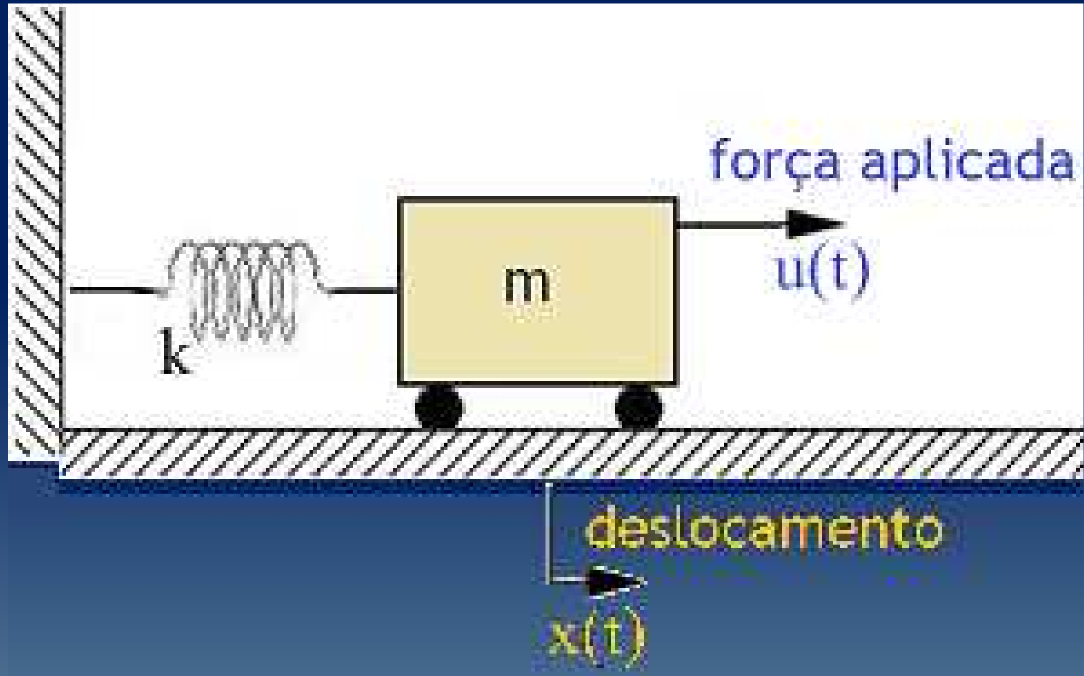



$$m x'' + \mu x' + k x = u,$$

ou

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + k\, x = u,$$

carro / massa / mola

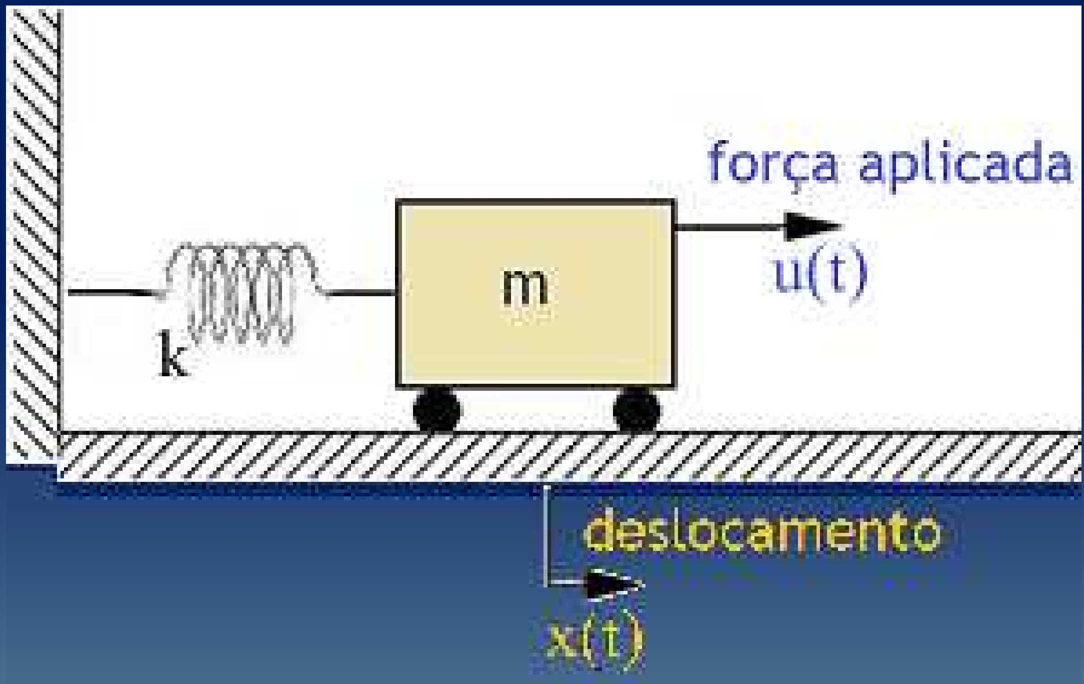



$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \mu\dfrac{dx}{dt} + k\,x = mx'' + \mu x' + kx = u, \\ x'(0) = 0, \qquad x(0) = 0 \end{cases}$$

logo,

$$m\,s^2X(s) + \mu\,s\,X(s) + k\,X(s) = U(s),$$

## carro / massa / mola

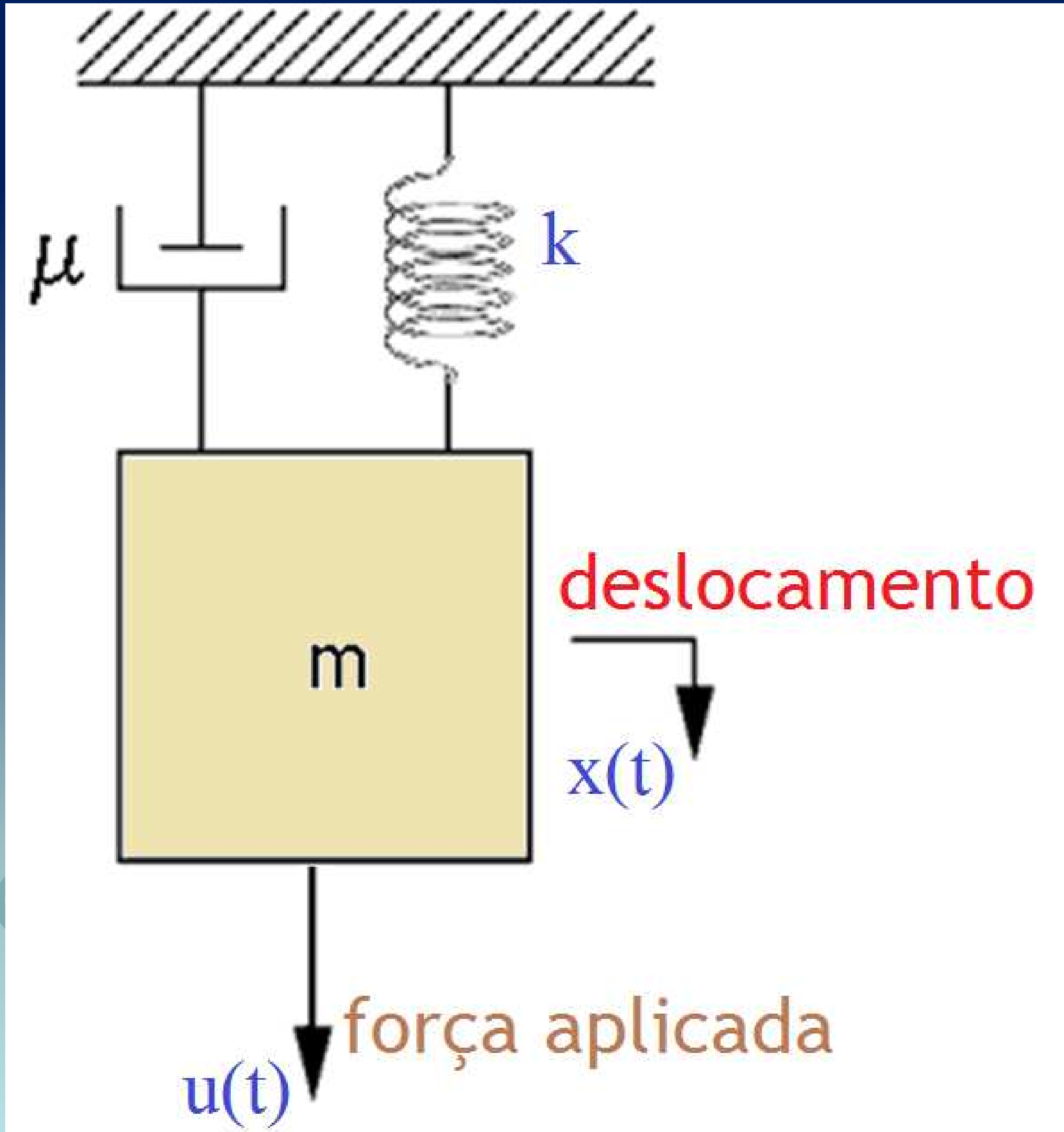



e portanto, a Função de Transferência (F.T.) é dada por

$$F.T. = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + \mu s + k}$$

movimento translacional mecânico

movimento translacional mecânico



## movimento translacional mecânico




$$\boxed{F.T. = \frac{X(s)}{U(s)}}$$

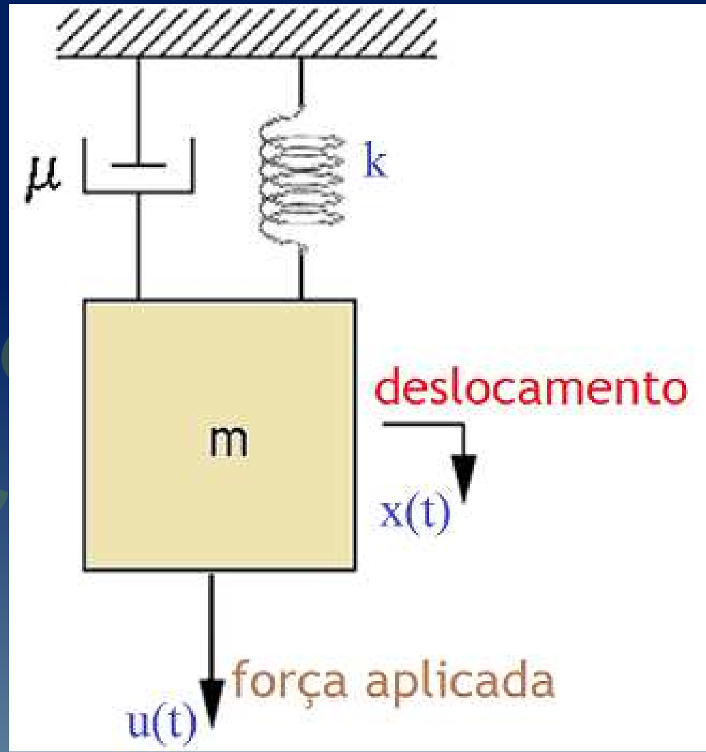
saída
(*output*)

entrada
(*input*)

$U(s)$ = Transformada Laplace de $u(t)$

$X(s)$ = Transformada Laplace de $x(t)$

movimento translacional mecânico

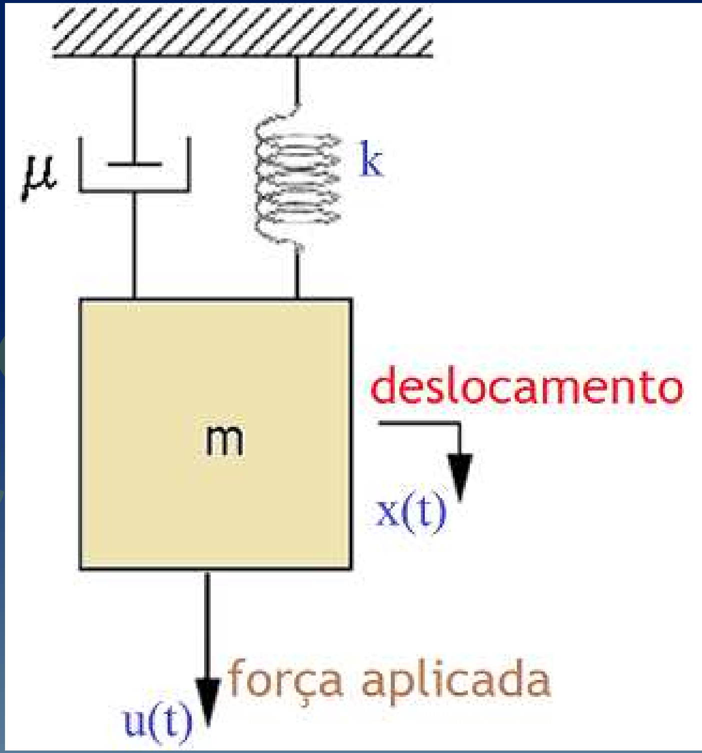



$$mx'' + \mu x' + kx = u,$$

ou

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + k\,x = u,$$

movimento translacional mecânico

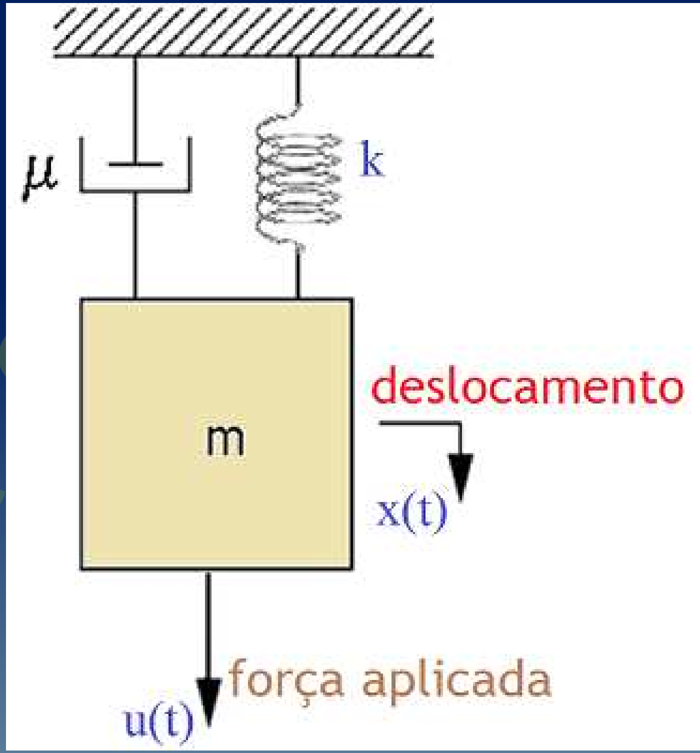



$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \mu\dfrac{dx}{dt} + k\,x = mx'' + \mu x' + kx = u, \\ x'(0) = 0, \qquad x(0) = 0 \end{cases}$$

logo,

$$m\,s^2X(s) + \mu\,s\,X(s) + k\,X(s) = U(s),$$

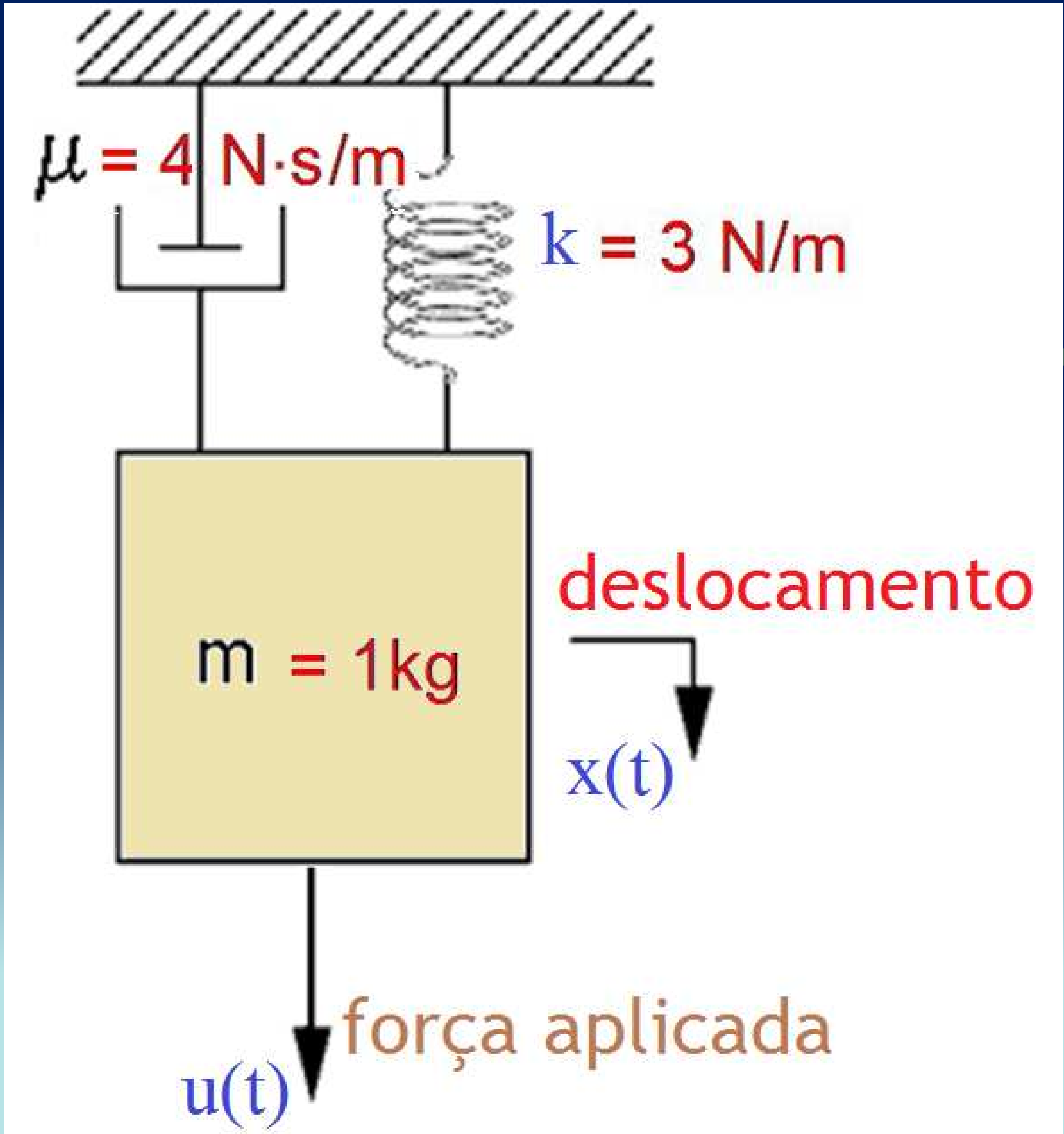
movimento translacional mecânico




e portanto, a Função de Transferência (F.T.) torna-se

$$\text{F.T.} = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + \mu s + k}$$

# movimento translacional mecânico

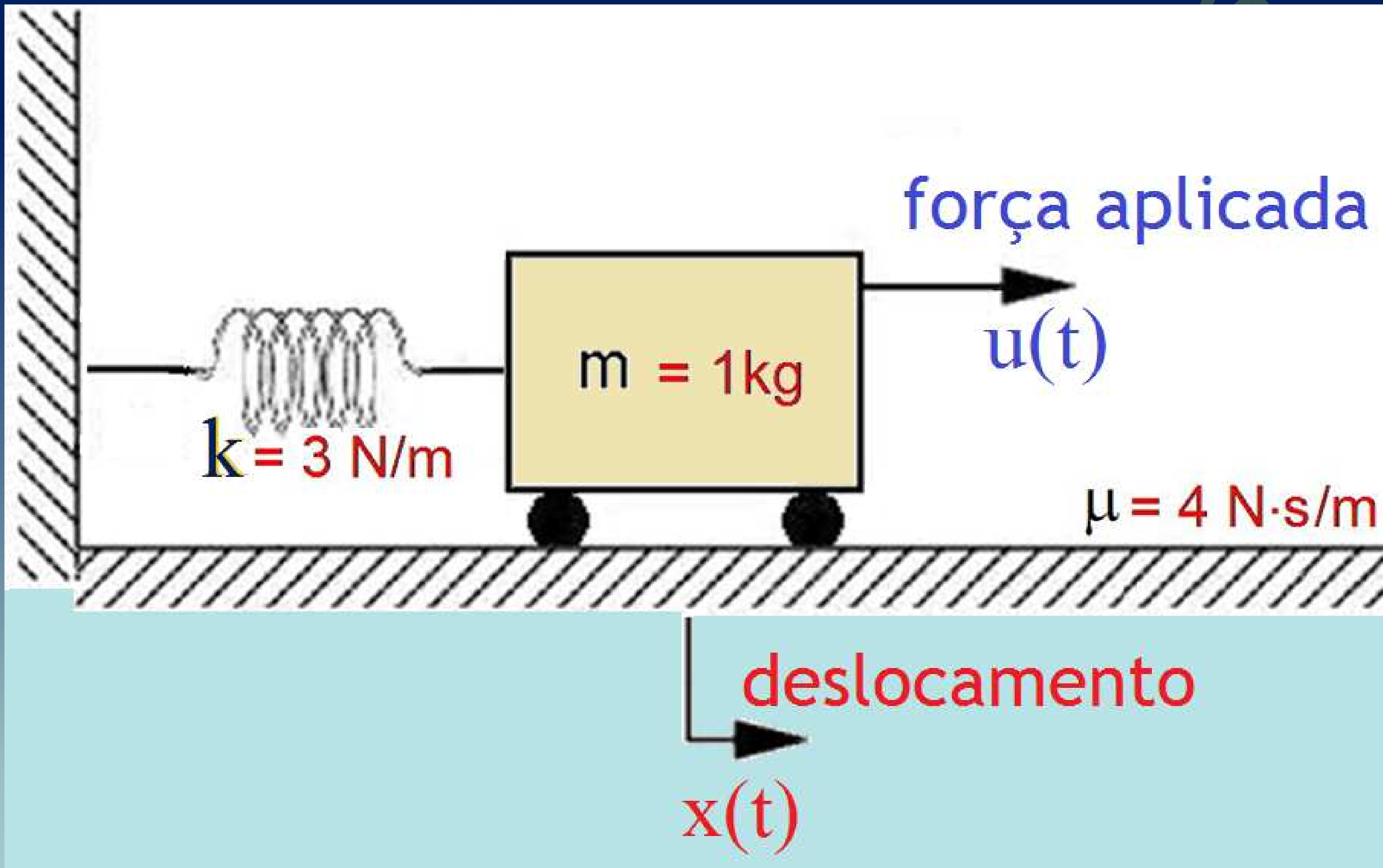



$m = 1$ kg

$\mu = 4$ N·s/m

$k = 3$ N/m

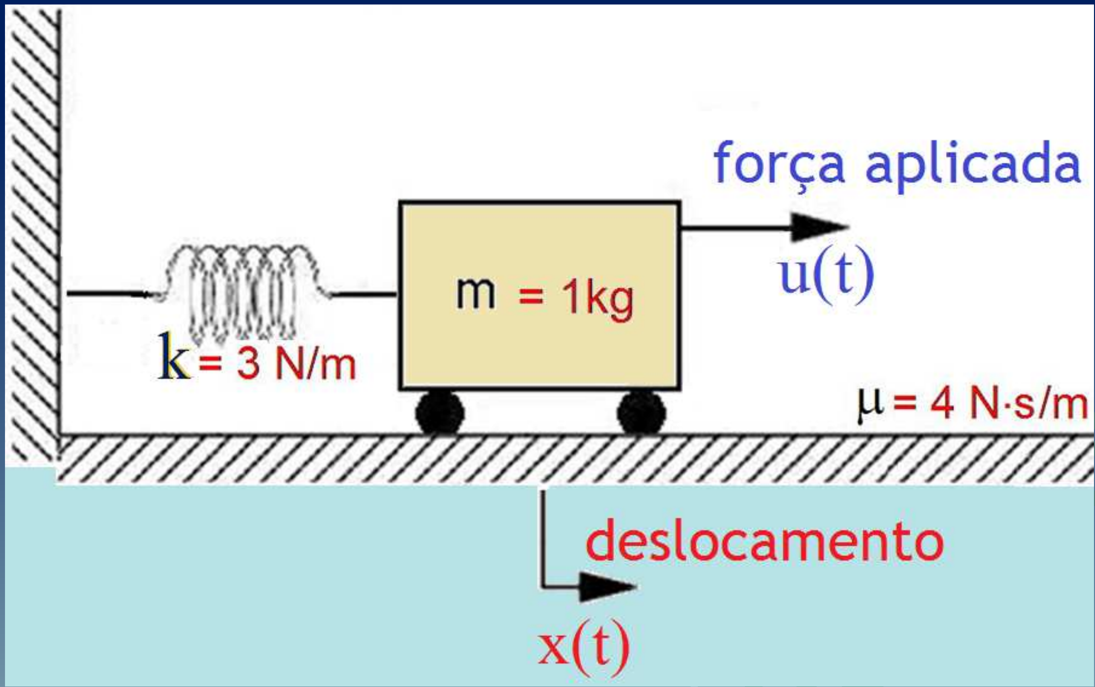
# carro / massa / mola

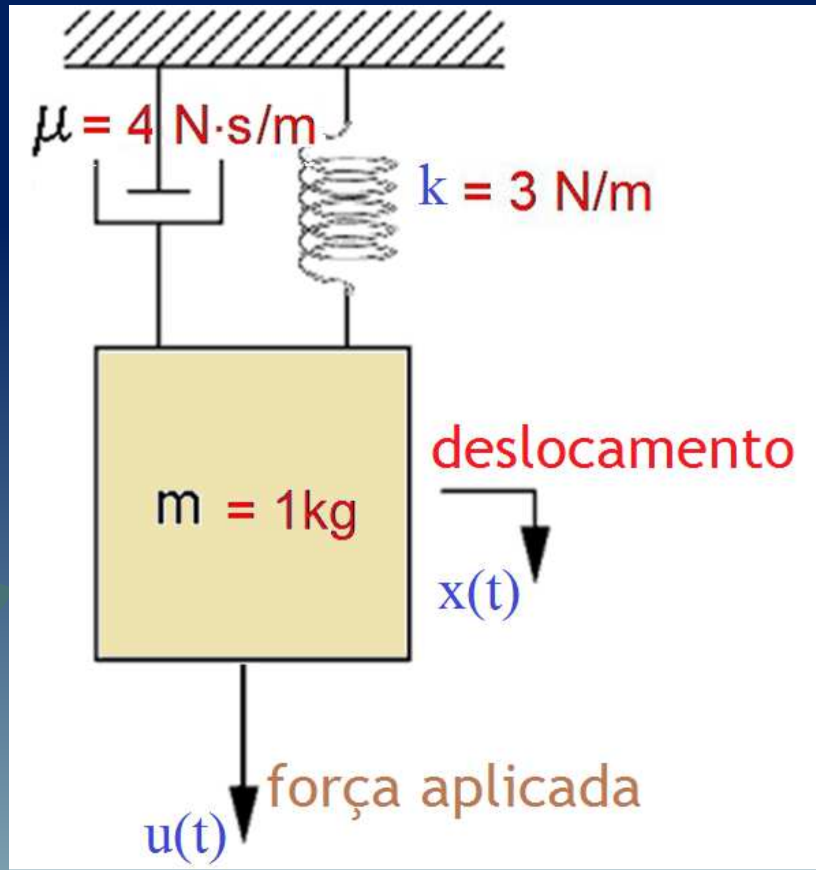



$m$ = 1 kg $\qquad \mu$ = 4 N·s/m $\qquad k$ = 3 N/m

# Representação de Sistemas

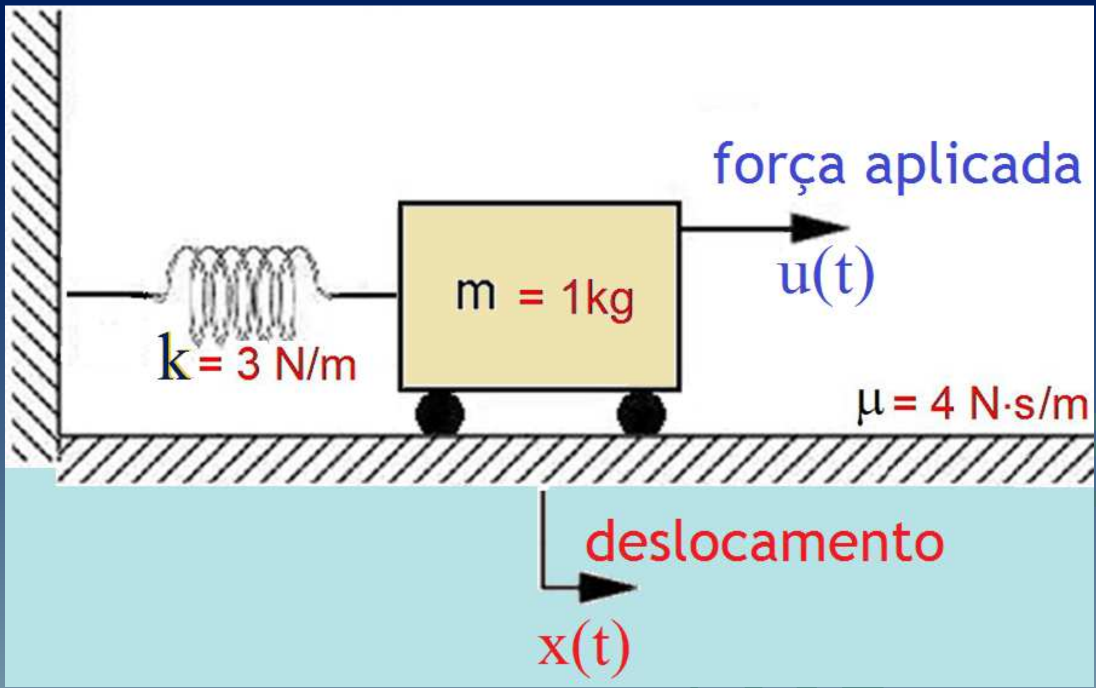
## carro / massa / mola ou movimento translacional mecânico

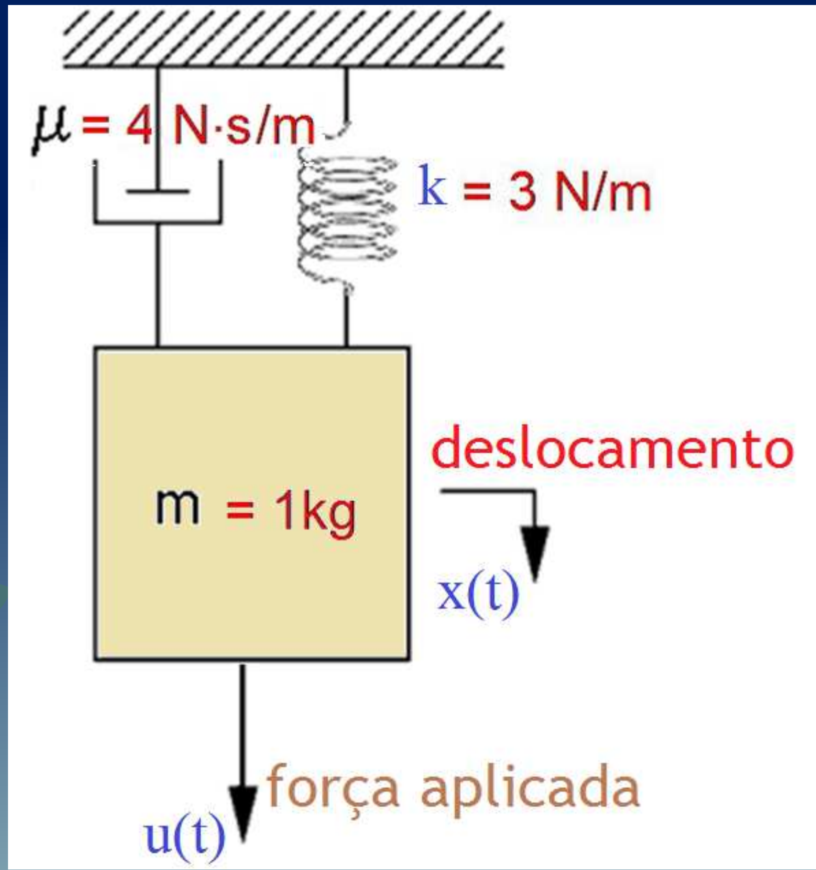



Já vimos que estes 2 sistemas são descritos pela mesma *equação diferencial* (de 2ª ordem) e têm o mesmo *modelo*.

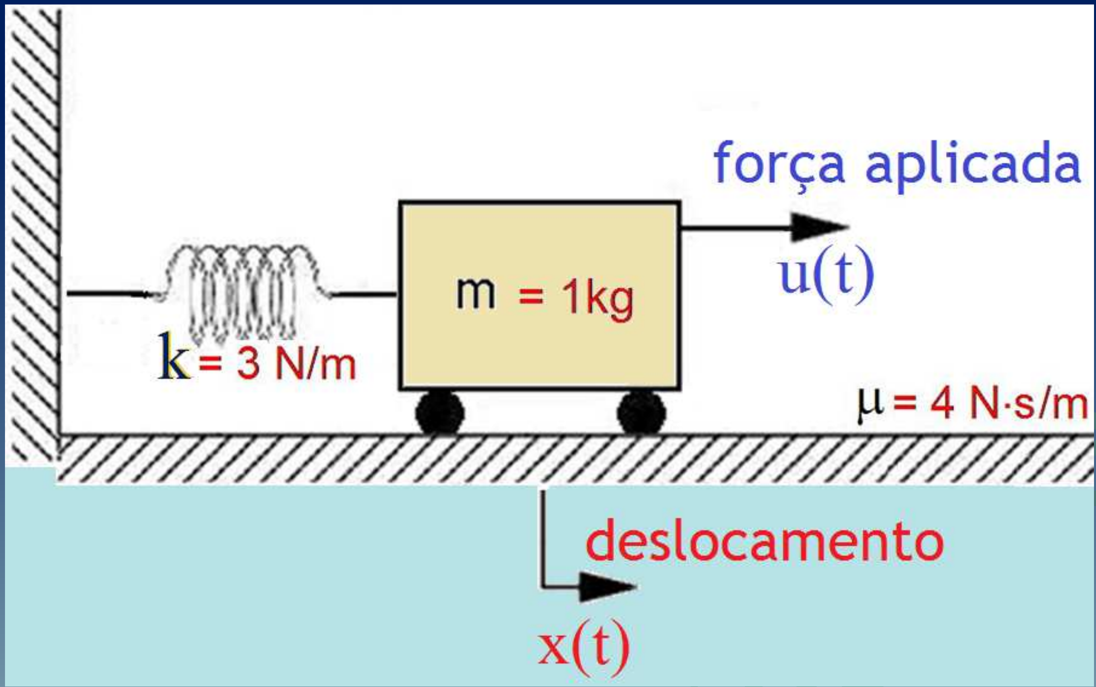
carro / massa / mola ou movimento translacional mecânico

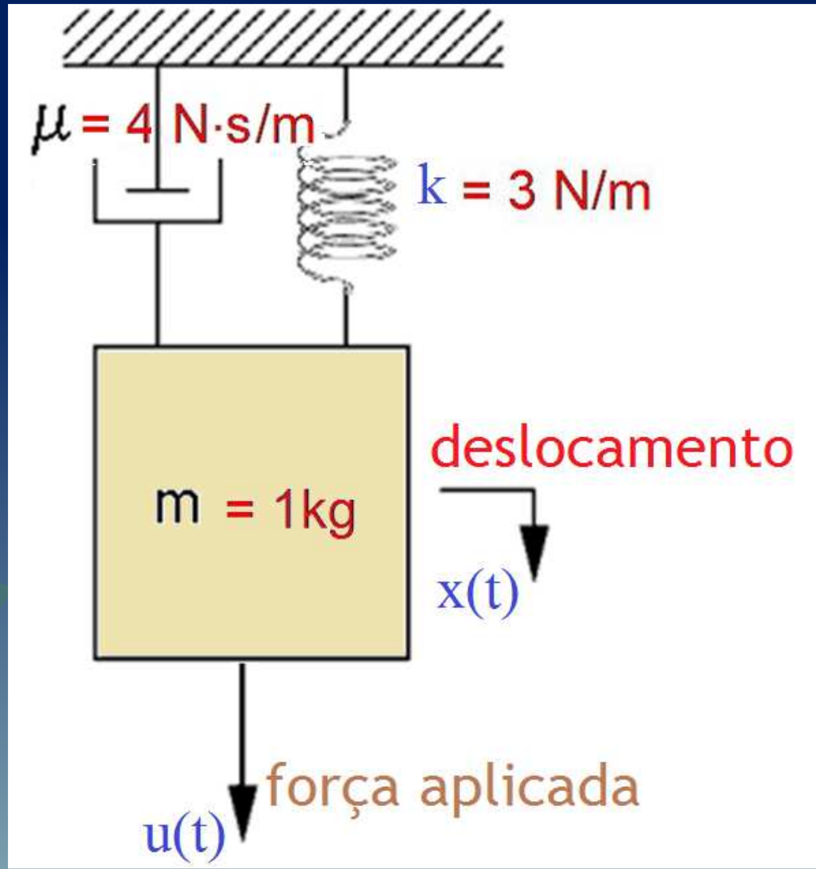



$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 3x = x'' + 4x' + 3x = u, \\ x'(0) = 0, \qquad x(0) = 0 \end{cases}$$

## carro / massa / mola ou movimento translacional mecânico



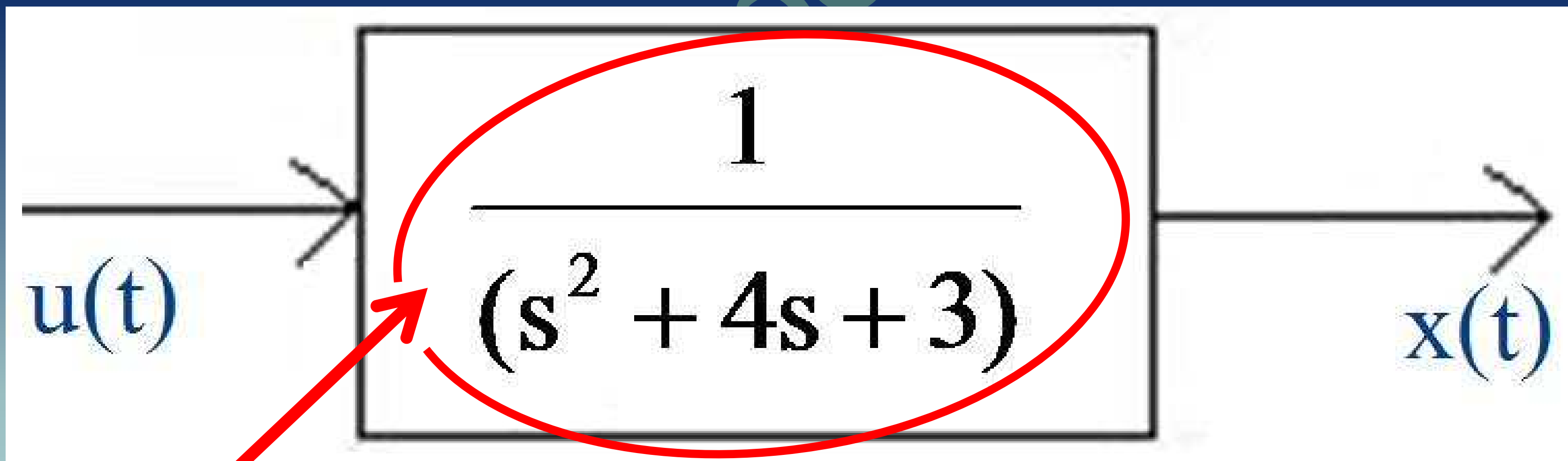




Logo, a Função de Transferência (F.T.) é dada por

$$\text{F.T.} = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

# Representação de Sistemas

carro / massa / mola ou movimento translacional mecânico

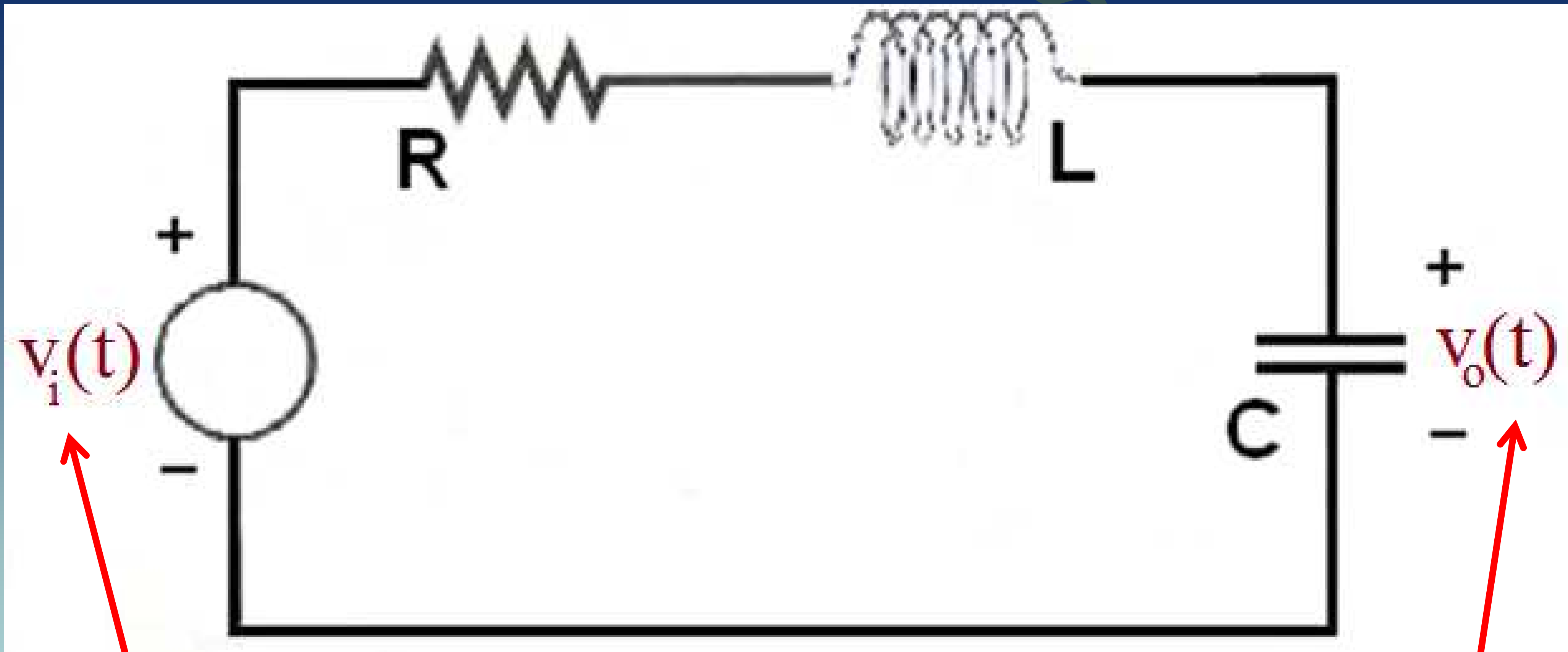




Função de Transferência (F.T.) do sistema

circuito RLC série

## circuito RLC série






tensão
na entrada

tensão
na saída

## circuito RLC série


entrada
(input)

saída
(output)

$$\boxed{\text{F.T.} = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}}$$

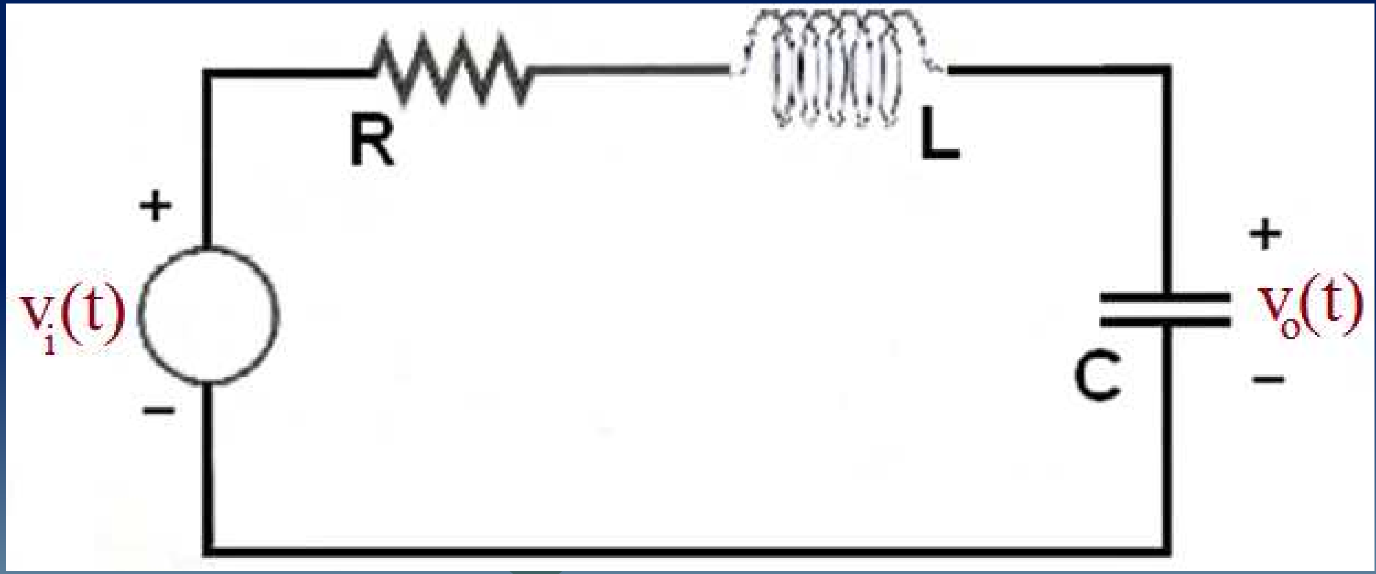
saída
(*output*)

entrada
(*input*)

$V_i(s)$ = Transformada Laplace de $v_i(t)$

$V_o(s)$ = Transformada Laplace de $v_o(t)$

circuito RLC série

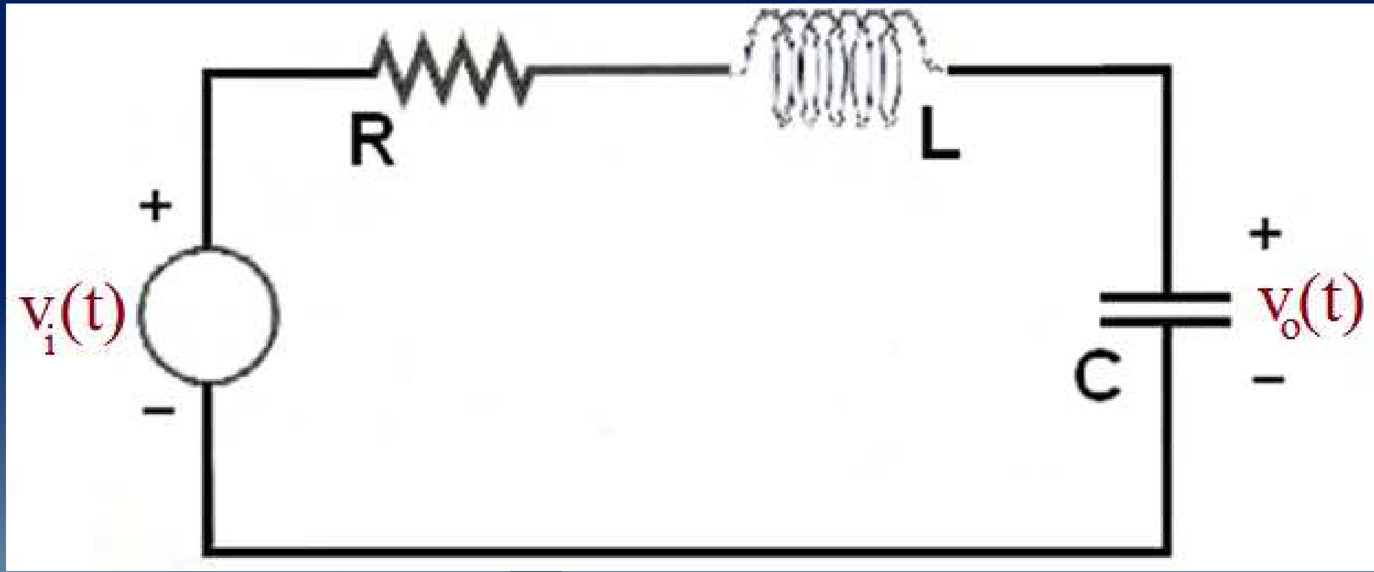



$$LC\, v_o'' + RC\, v_o' + v_o = v_i \,,$$

ou

$$LC \frac{d^2 v_o}{dt^2} + RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i \,,$$

circuito RLC série

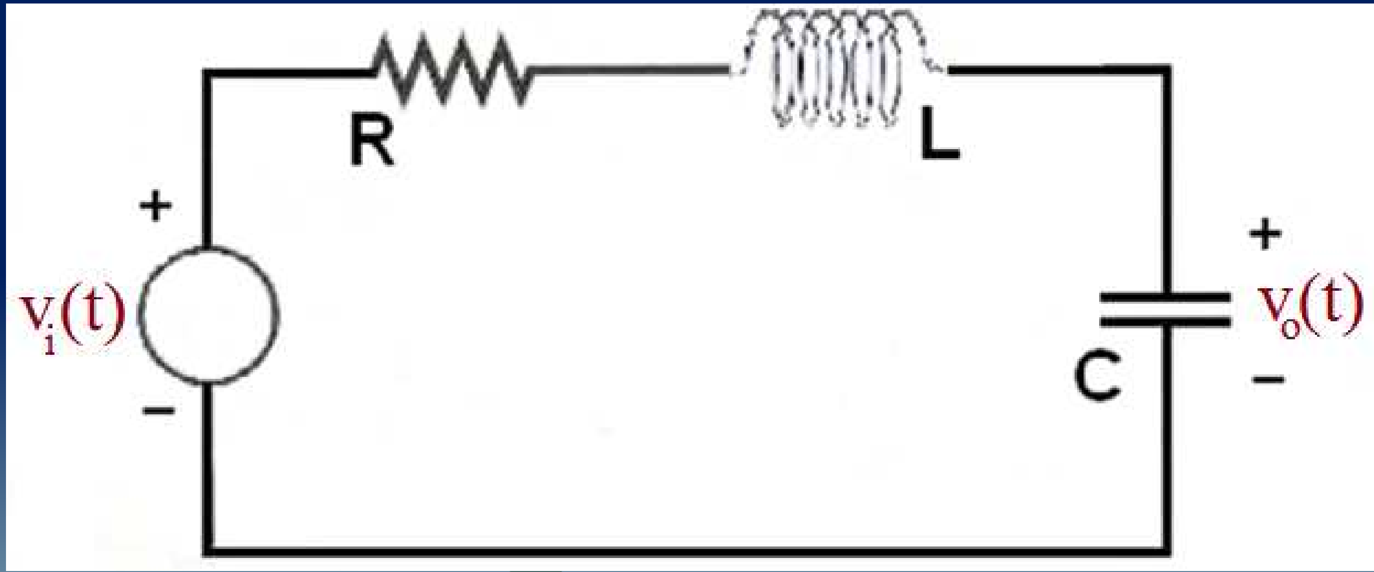



$$\begin{cases} LC\dfrac{d^2v_o}{dt^2}+RC\dfrac{dv_o}{dt}+v_o=LCv_o''+RCv_o'+v_o=v_i, \\ v_o'(0)=0, \qquad v_o(0)=0 \end{cases}$$

logo,

$$LC\,s^2V_o(s)+RC\,s\,V_o(s)+V_o(s) = V_i(s),$$

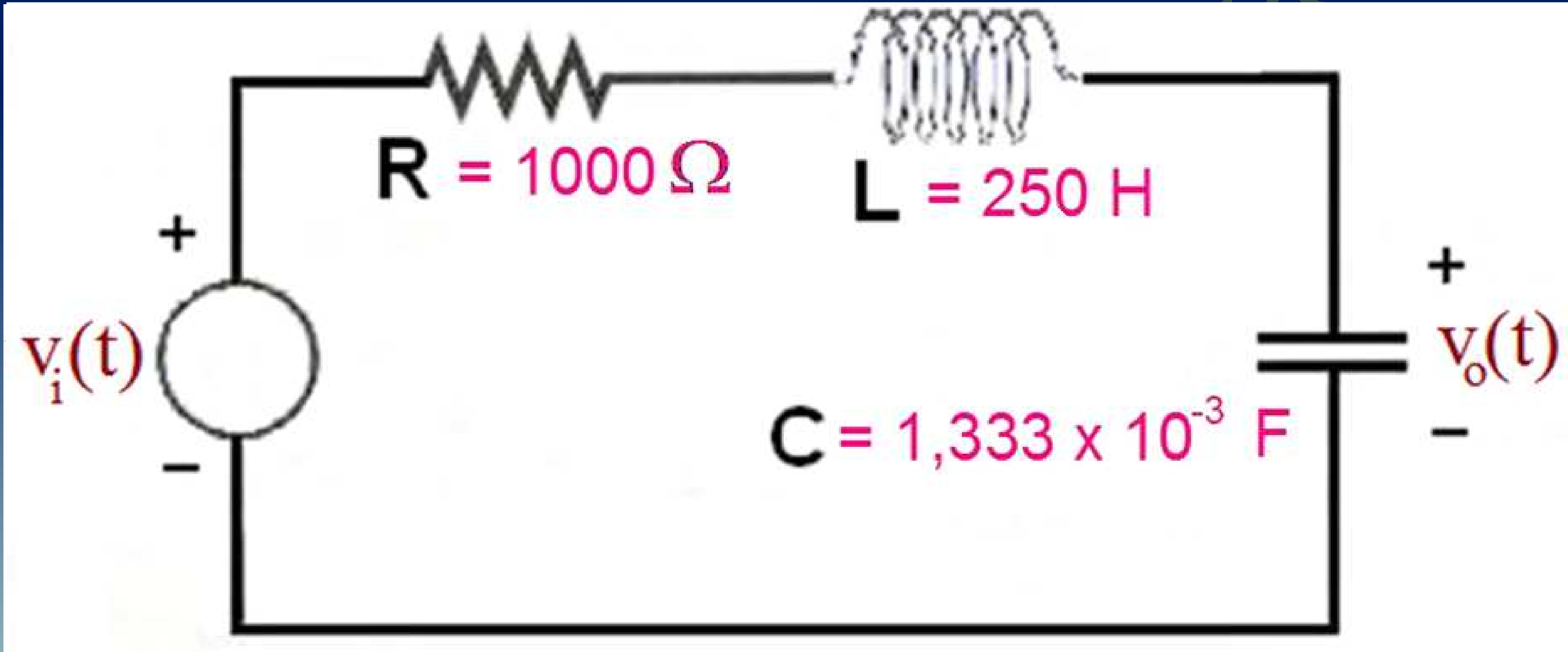
circuito RLC série




e portanto, a Função de Transferência (F.T.) do sistema é dada por

$$\text{F.T.} = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

# circuito RLC série

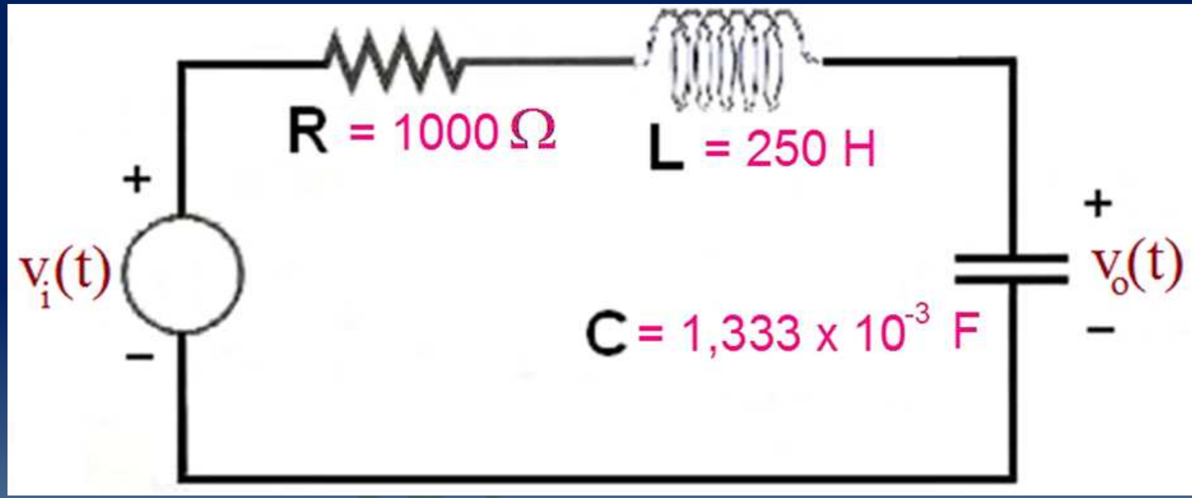



$R = 1000\ \Omega$

$L = 250\ H$

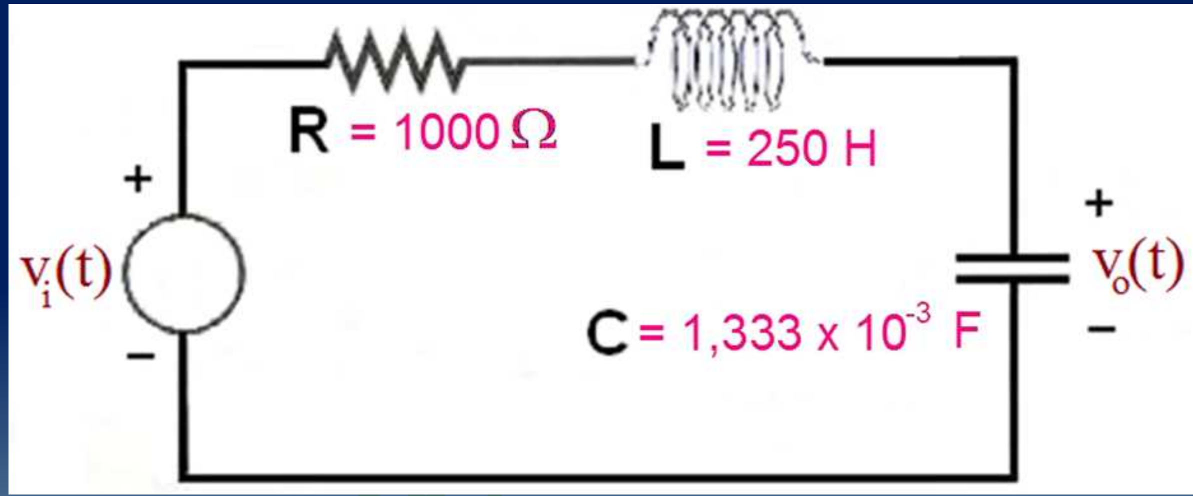
$C = 1{,}333 \times 10^{-3}\ F$

circuito RLC série




$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v_o}{dt^2} + 4\dfrac{dv_o}{dt} + 3v_o = v_o'' + 4v_o' + 3\,v_o = 3v_i, \\ v_o'(0) = 0, \qquad v_o(0) = 0 \end{cases}$$

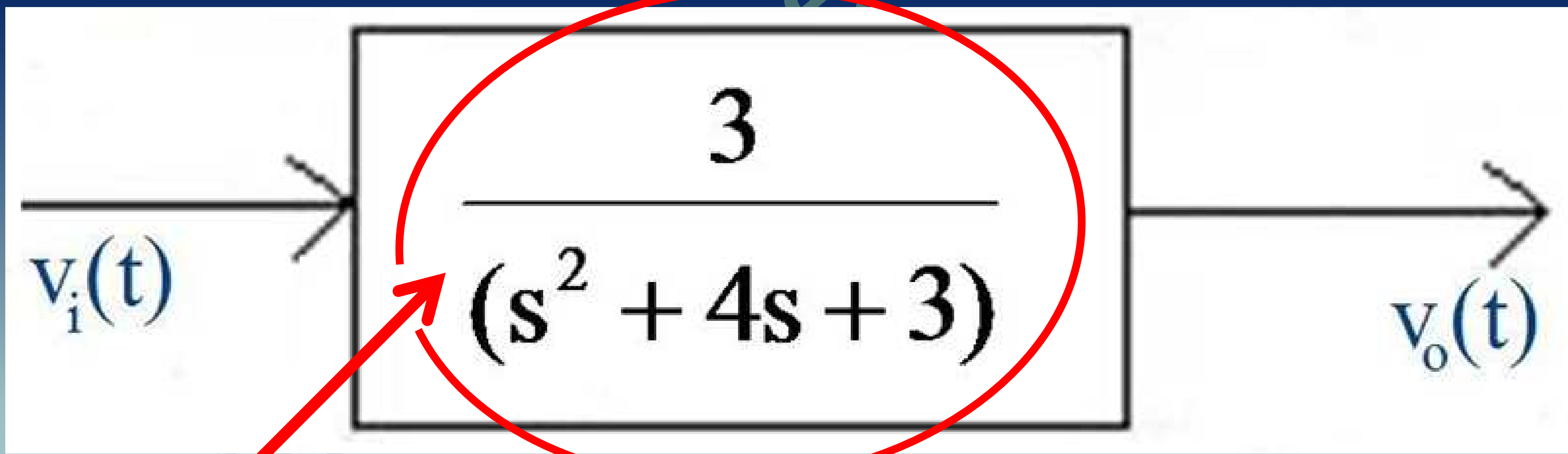
## circuito RLC série




e neste caso a Função de Transferência (F.T.) será:

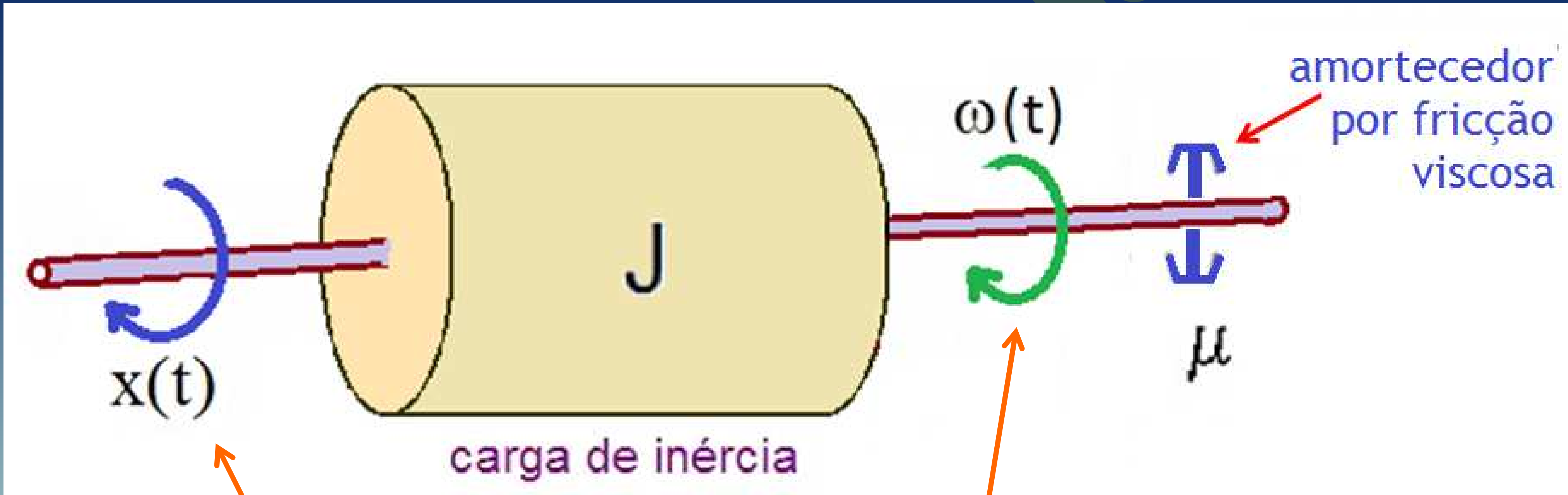
$$\text{F.T.} = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$$

## circuito RLC série


Função de Transferência (F.T.) do sistema movimento rotacional mecânico

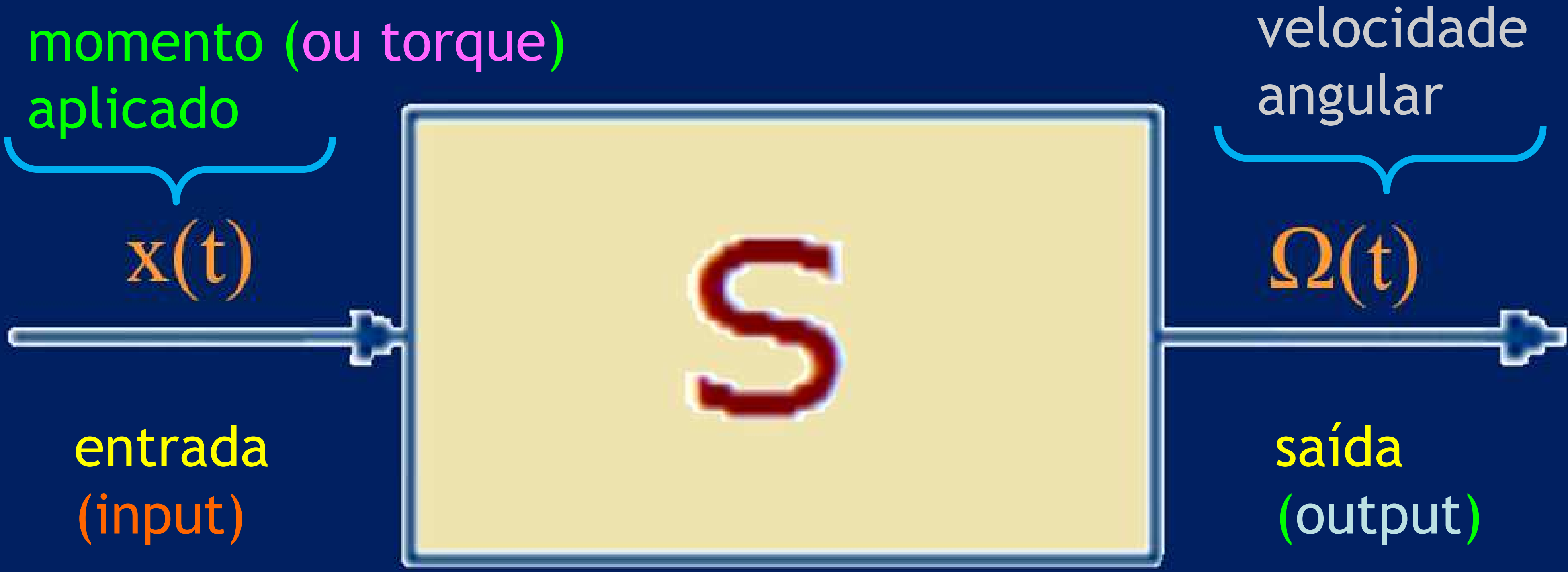
movimento rotacional mecânico




momento
(ou torque)
aplicado

velocidade
angular

## movimento rotacional mecânico




$$\text{F.T.} = \frac{\Omega(s)}{X(s)}$$

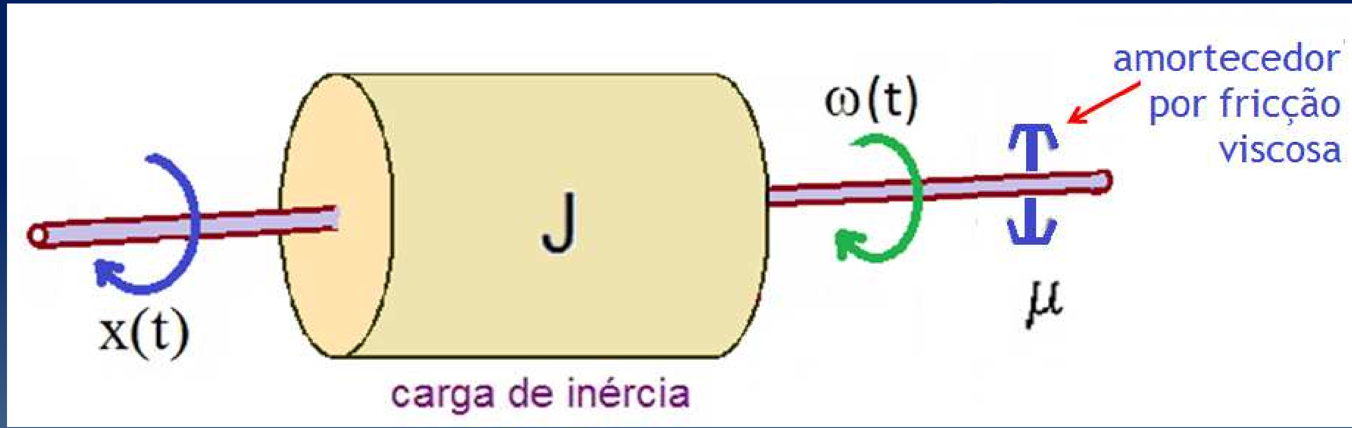
saída (*output*)

entrada (*input*)

$\Omega(s)$ = Transformada Laplace de $\omega(t)$

$X(s)$ = Transformada Laplace de $x(t)$

## movimento rotacional mecânico

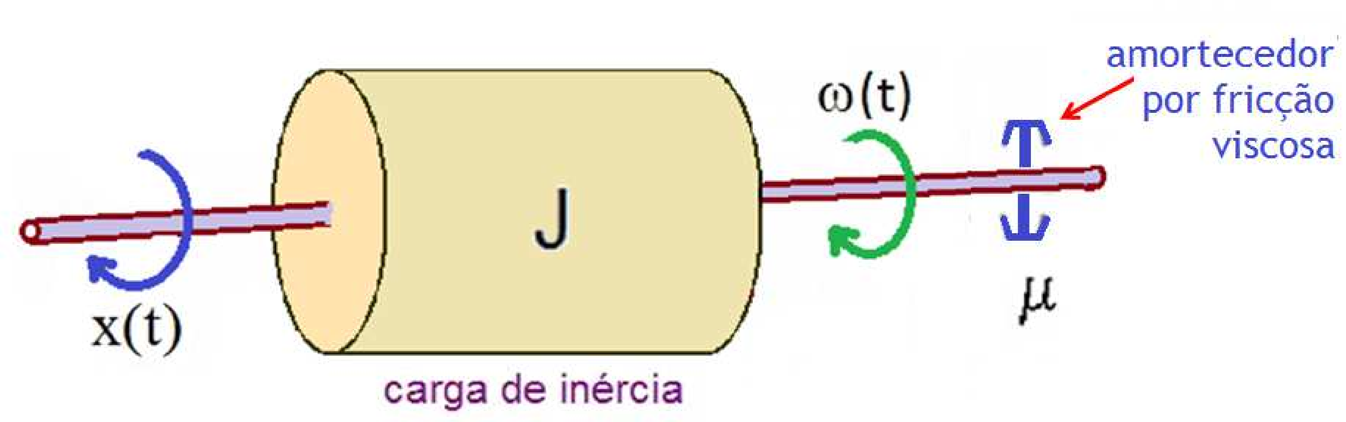



$$J\,\omega' + \mu\,\omega = x\,,$$

ou

$$J\,\frac{d\omega}{dt} + \mu\,\omega(t) = x\,,$$

## movimento rotacional mecânico

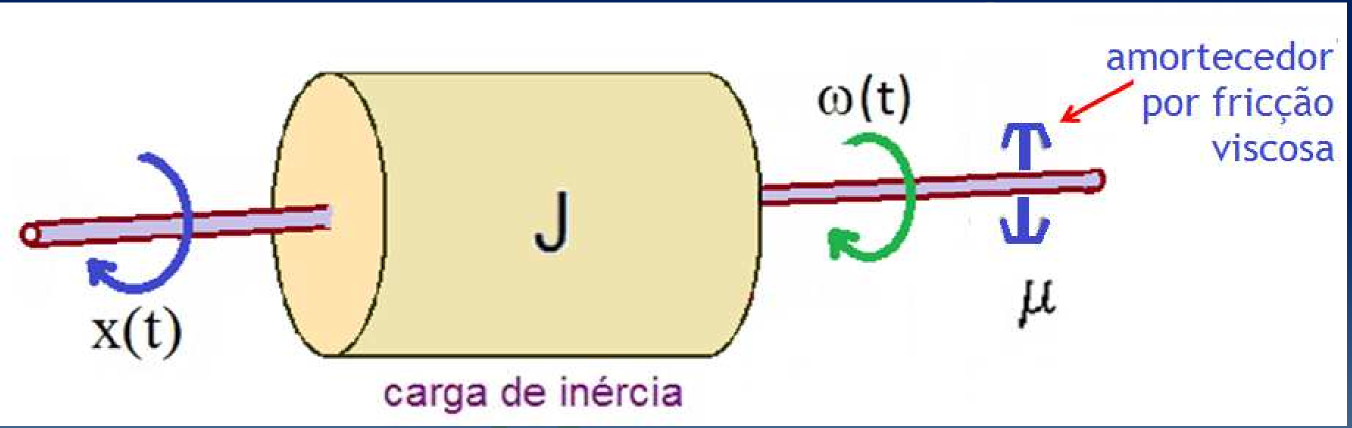



$$\begin{cases} J\dfrac{d\omega}{dt} + \mu\omega = J\omega' + \mu\omega = x \\ \omega(0) = 0 \end{cases}$$

logo,

$$J\,s\,\Omega(s) + \mu\,\Omega(s) = X(s),$$

# movimento rotacional mecânico





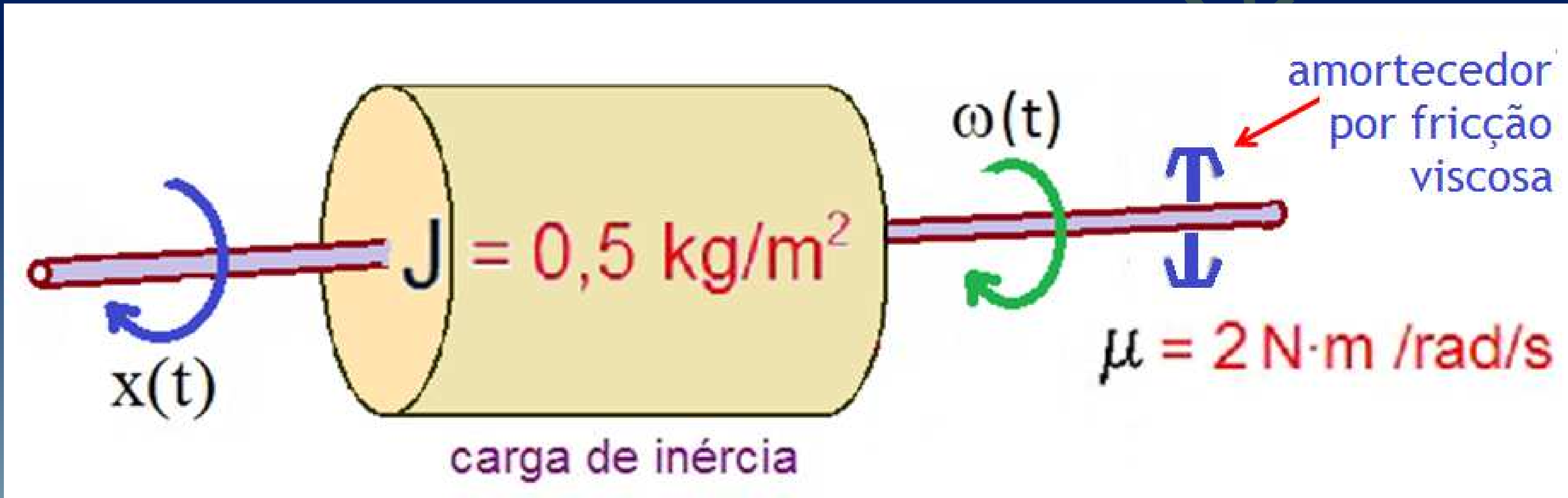

e portanto, a Função de Transferência (F.T.) do sistema é dada por

$$\text{F.T.} = \frac{\Omega(s)}{X(s)} = \frac{1}{Js + \mu}$$

## movimento rotacional mecânico

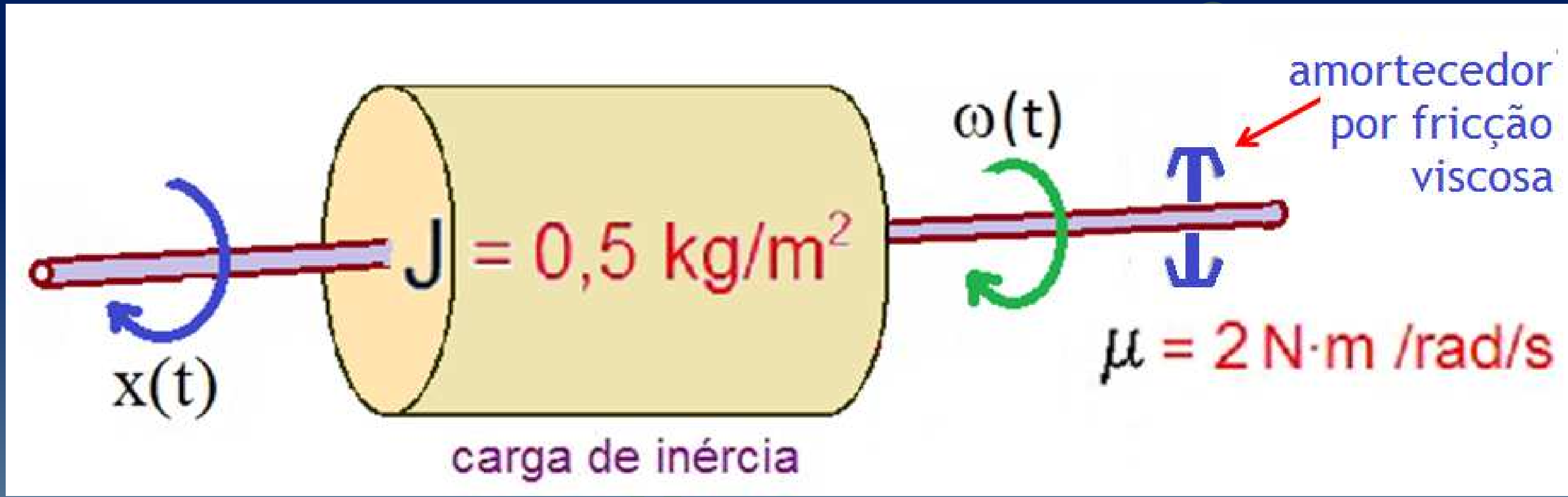
$J = 0{,}5\ kg/m^2$

$\mu = 2\ N{\cdot}m\ /rad/s$




$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} + 4\,\omega = \omega' + 4\,\omega = 2\,x\,, \\ \omega(0) = a \end{cases}$$

# movimento rotacional mecânico

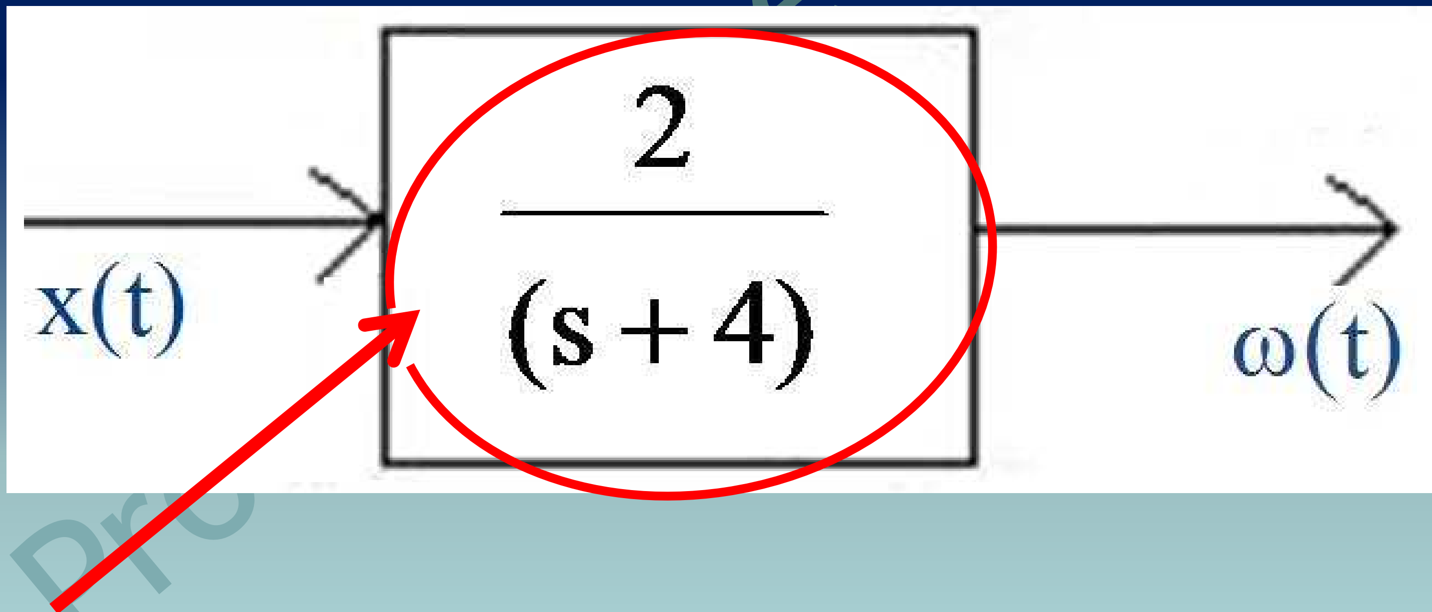





e neste caso, a Função de Transferência (F.T.)

$$\text{F.T.} = \frac{\Omega(s)}{X(s)} = \frac{2}{s+4}$$

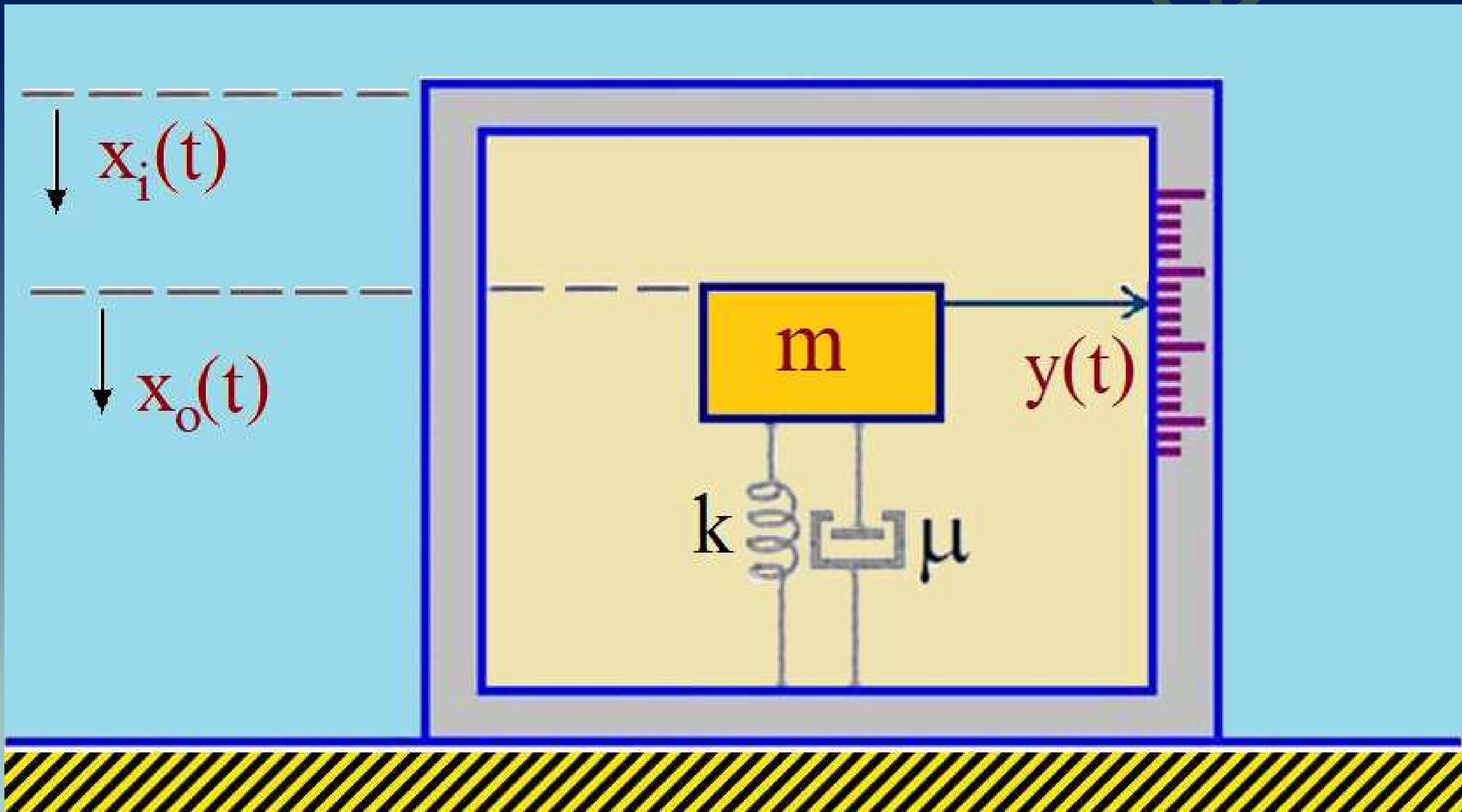
## movimento rotacional mecânico


Função de Transferência (F.T.)
do sistema

sismógrafo

# sismógrafo



sismógrafo


$$\text{F.T.} = \frac{Y(s)}{X_i(s)}$$

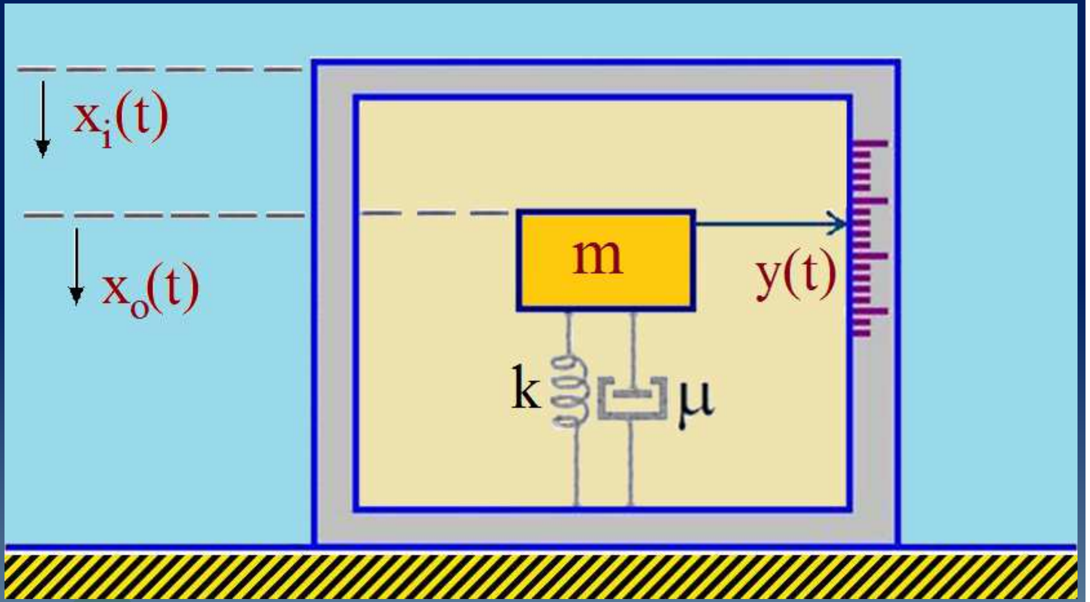
saída (*output*)

entrada (*input*)

$X_i(s)$ = Transformada Laplace de $x_i(t)$

$Y(s)$ = Transformada Laplace de $y(t)$

## sismógrafo

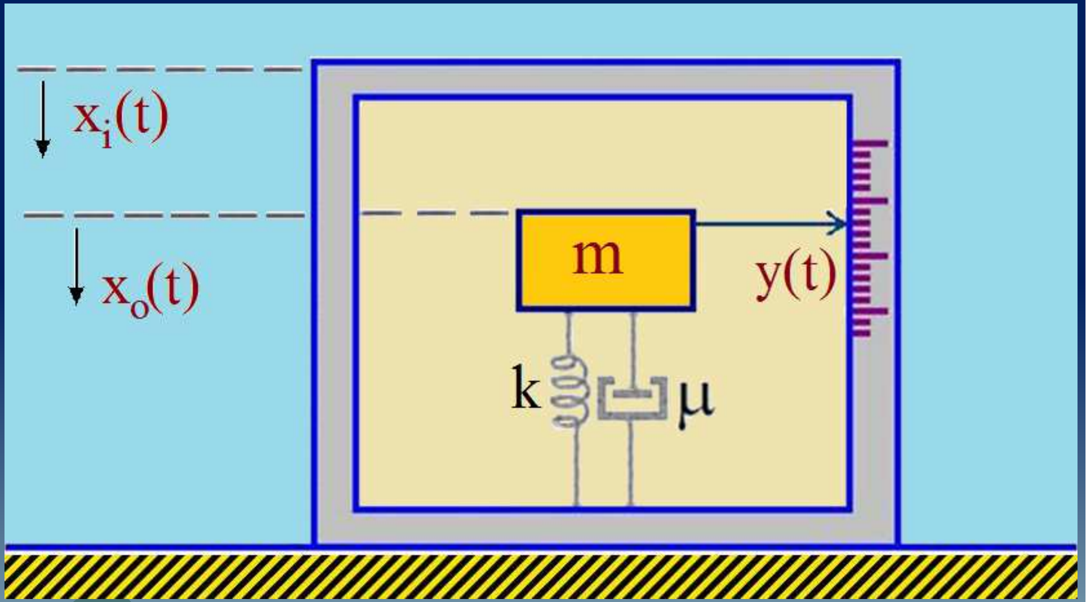



$$m\,y'' + \mu\,y' + k\,y = -m\,x_i'',$$

ou

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + k\,y = -m\frac{d^2x_i}{dt^2},$$

sismógrafo

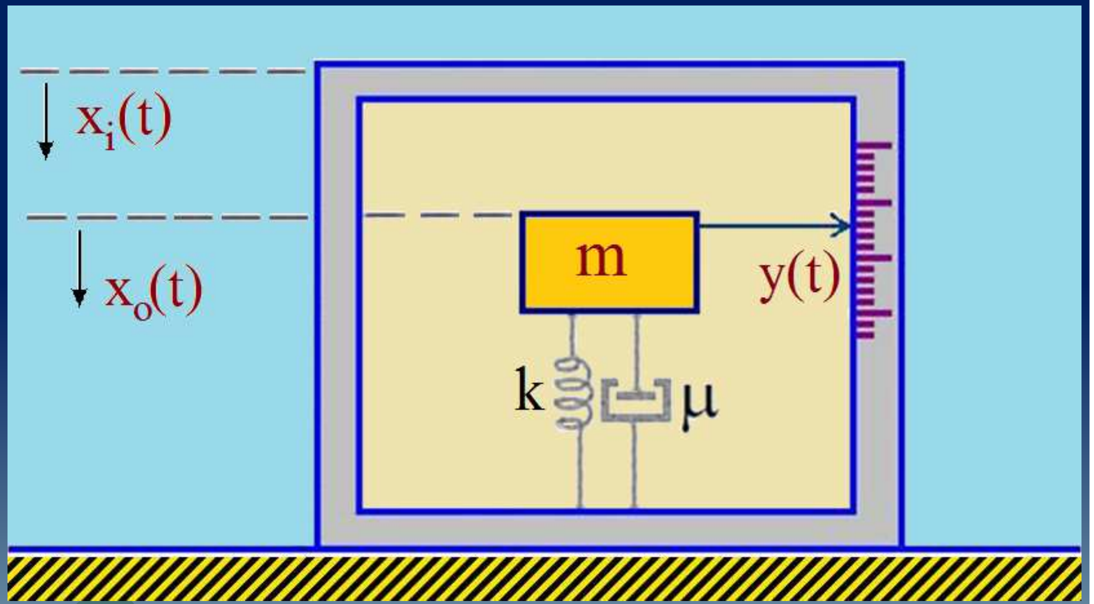



$$\begin{cases} m\dfrac{d^2y}{dt^2} + \mu\dfrac{dy}{dt} + ky = m\,y'' + \mu\,y' + k\,y = -m\,x_i'' \,, \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

logo,

$$m\,s^2 Y(s) + \mu\,s\,Y(s) + k\,Y(s) = -m\,s^2\,X_i(s),$$

## sismógrafo

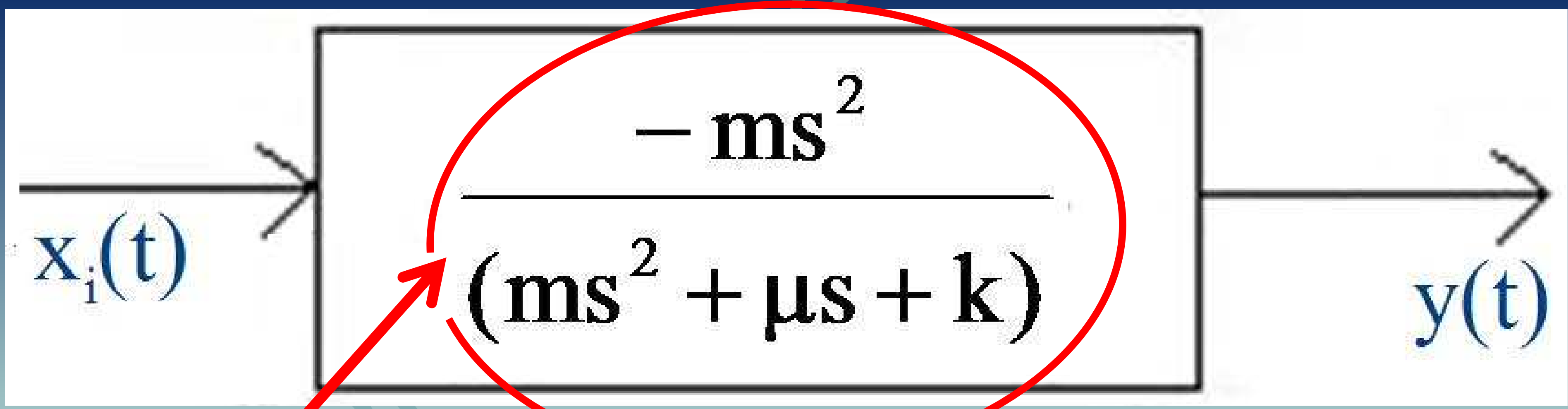





e portanto, a Função de Transferência (F.T.) do sistema é dada por

$$F.T. = \frac{Y(s)}{X_i(s)} = \frac{-ms^2}{ms^2 + \mu s + k}$$

## sismógrafo


Função de Transferência (F.T.)
do sistema

# Função de Transferência (F.T.)

Observe que a Função de Transferência (F.T.) deve ser expressa como polinómio/polinómio na sua forma final, ou seja

$$^{q(s)}/_{p(s)}.$$

$$F.T. = G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{q(s)}{p(s)}$$

$$\text{F.T.} = G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

As *raízes* de $q(s)$ são chamadas de zeros do sistema.

As *raízes* de $p(s)$ são chamadas de polos do sistema.

$$F.T. = G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

O *polinómio* $p(s)$ é chamado de polinómio característico do sistema.

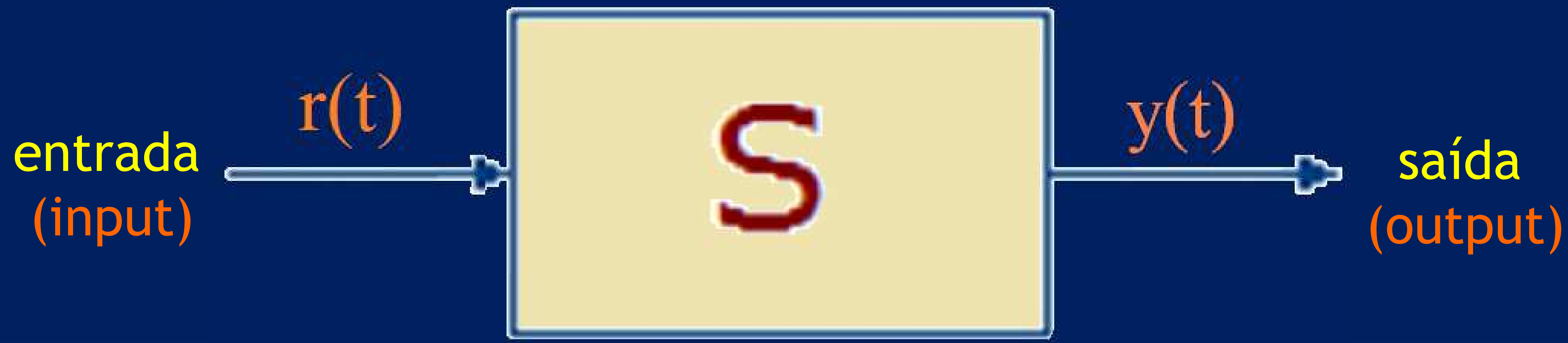
A *equação*

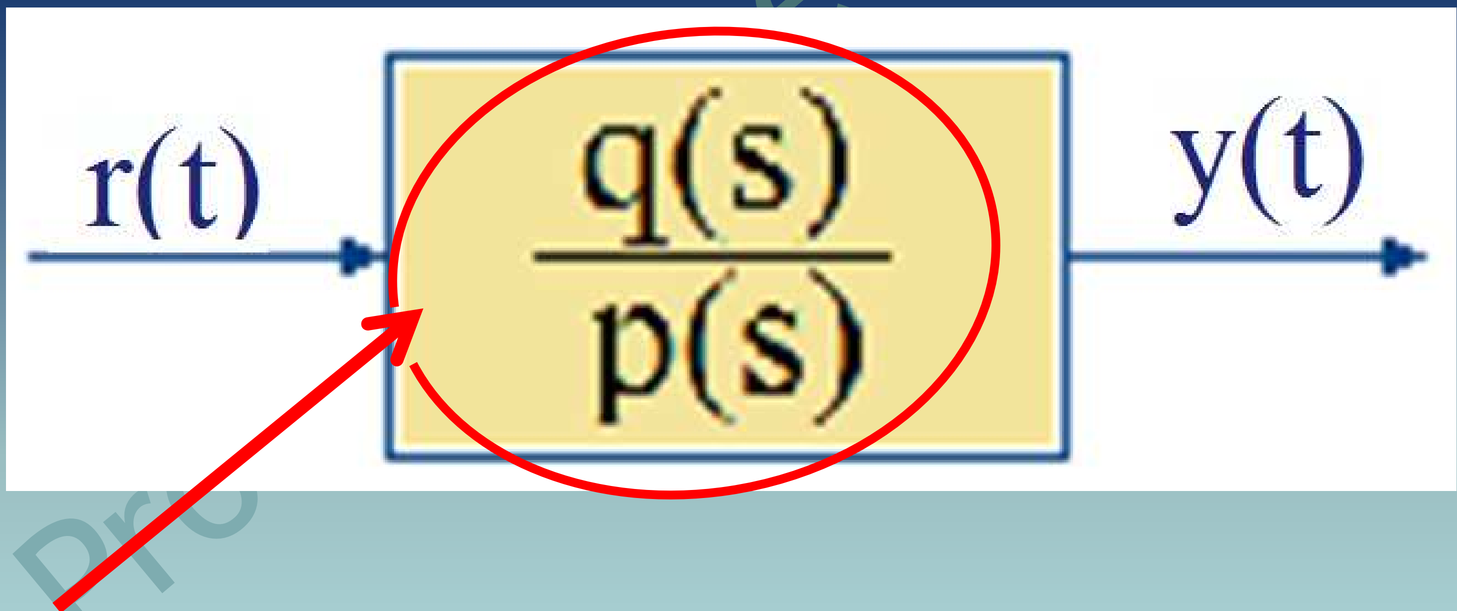
$$p(s) = 0$$

é chamada de

*equação característica* do sistema.

# Representação de Sistemas




Função de Transferência (F.T.)
do sistema

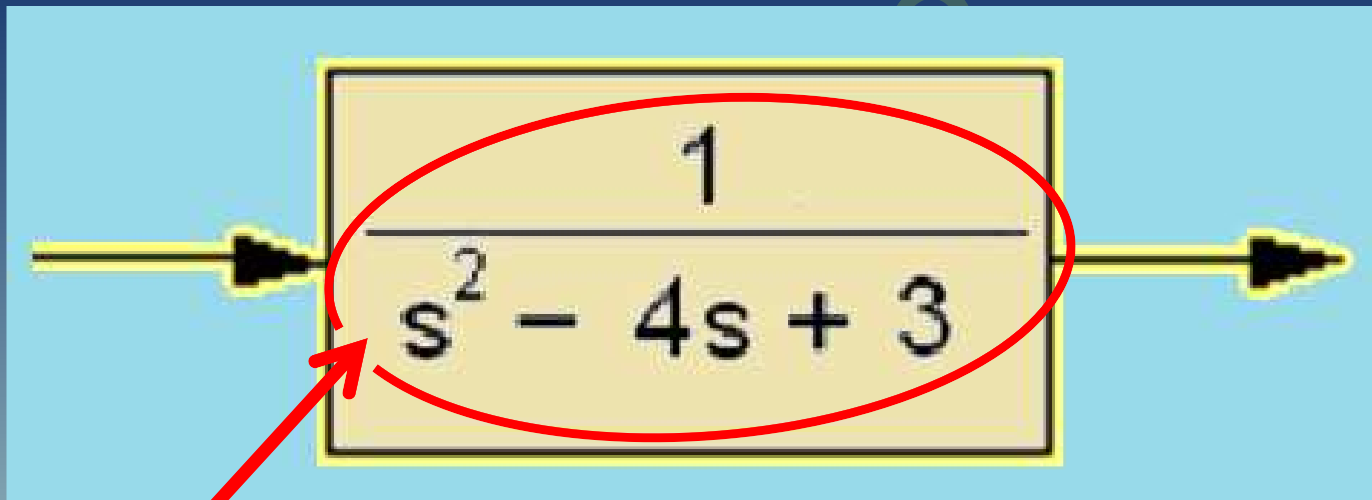
ou simplesmente,


Função de Transferência (F.T.)
do sistema

*Caixa preta* ou
Bloco simples

# Diagramas de Blocos

Com a F.T. pode-se representar sistemas em Diagramas de Blocos:

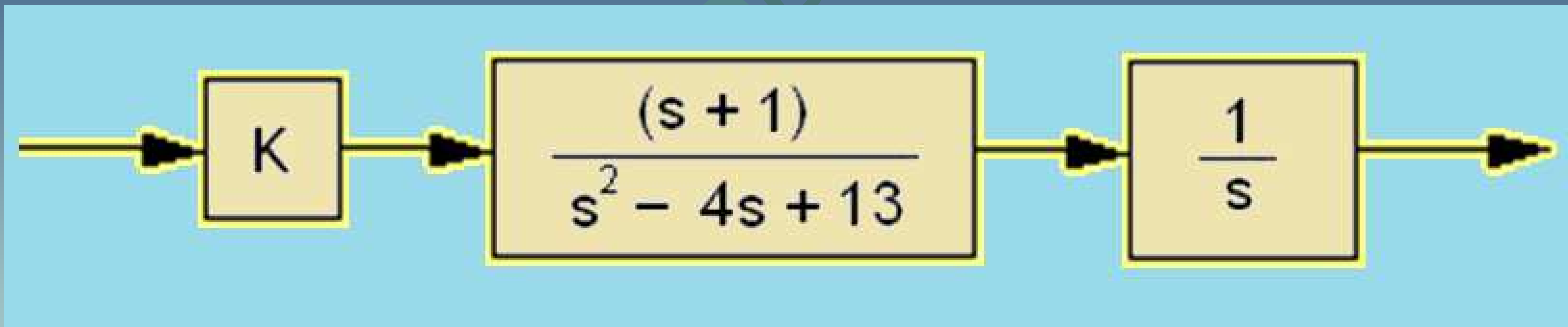



Bloco simples ou caixa-preta (*black box*)

Função de Transferência (F.T.) do bloco

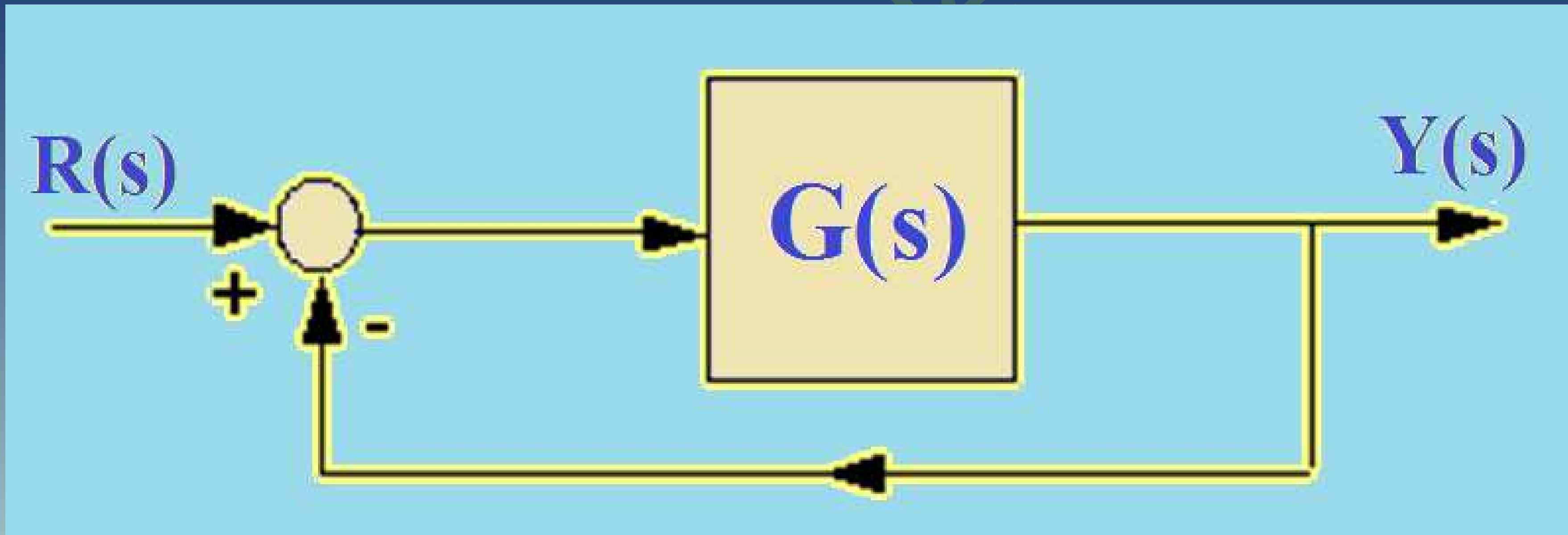
Diagramas de Blocos é o tema do próximo capítulo.

Há diversos tipos de ligações possíveis nos blocos, como por exemplo, 'blocos em cascata':




Blocos em cascata

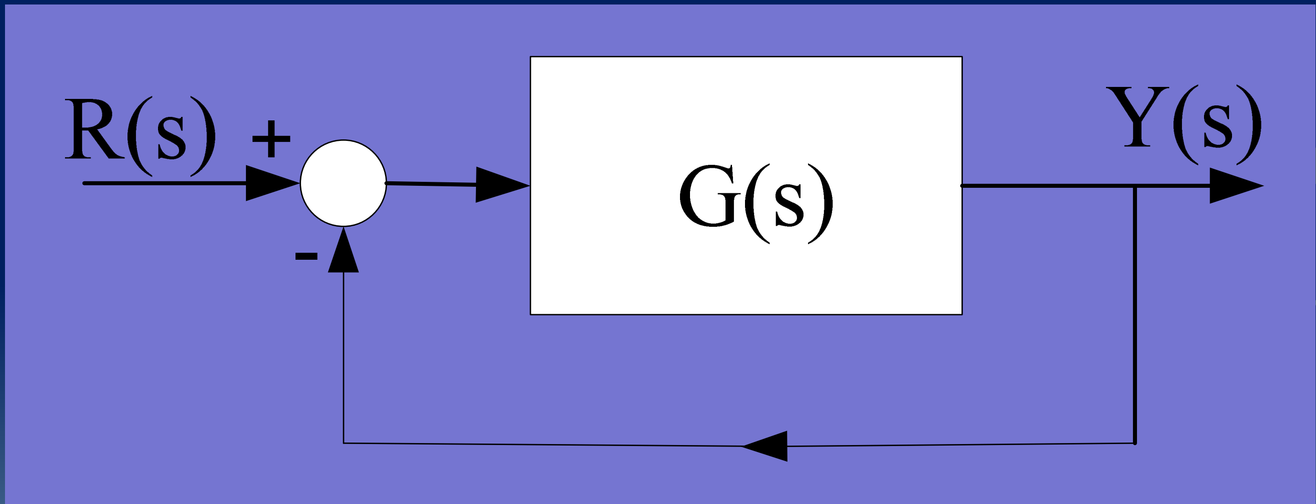
# Blocos com realimentação:
# *(feedback)*




Bloco **G(s)** com *realimentação* unitária

# Exemplo 1:

No próximo capítulo veremos que o diagrama de bloco:




onde:

$$G(s) = \frac{5}{s(s+4)}$$

Tem a seguinte função de transferência:

$$T.F. = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{5}{s(s+4)}}{1+\dfrac{5}{s(s+4)}} = \frac{5}{s^2+4s+5}$$

# Exemplo 1 (*continuação*):

$$T.F. = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2 + 4s + 5}$$

Este sistema tem dois polos $p_1$ e $p_2$ e nenhum zero.

$$p_1 = -2 + j \qquad\qquad p_2 = -2 - j$$

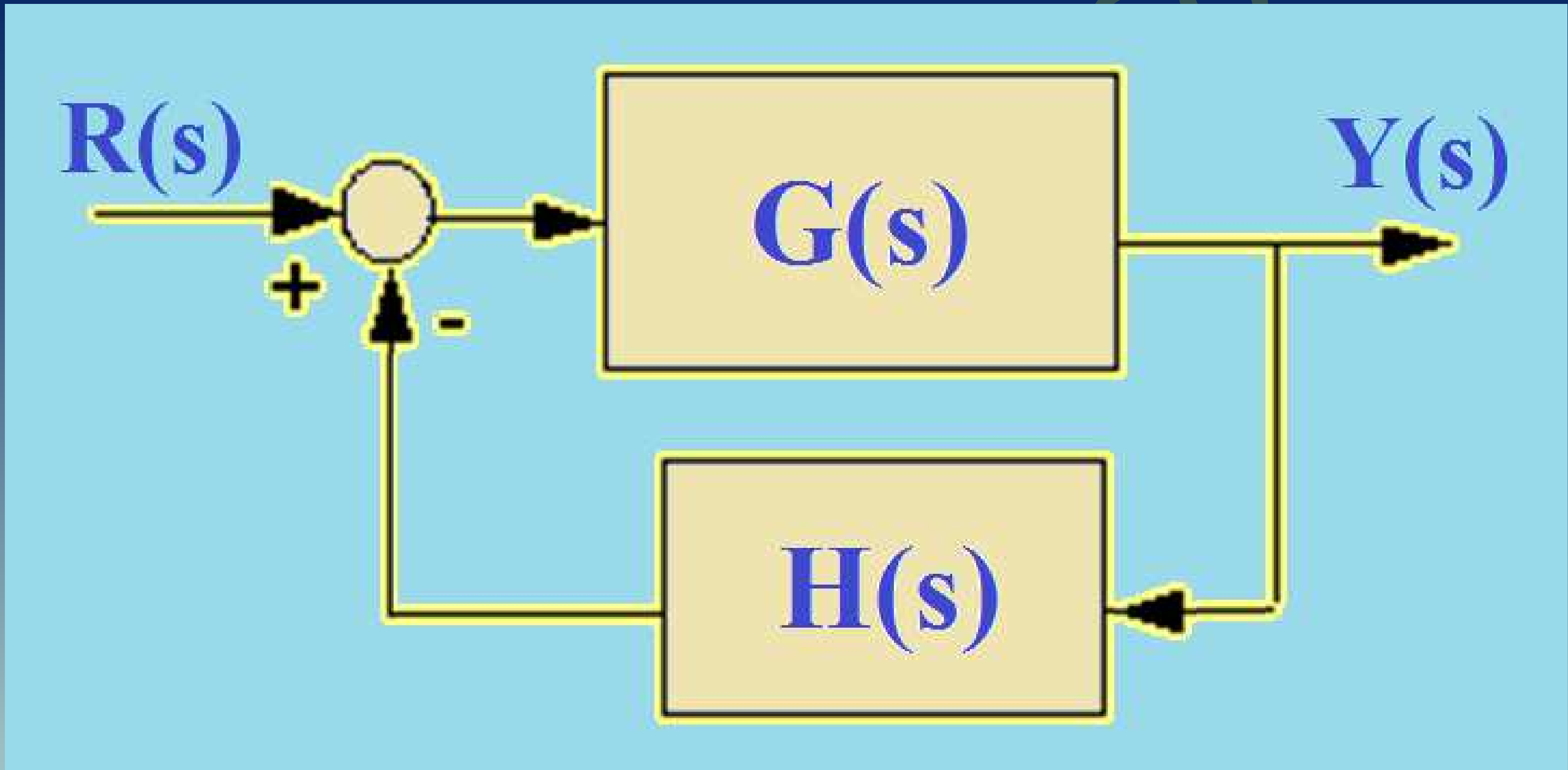
que são as raízes do polinómio característico $p(s)$

$$p(s) = s^2 + 4s + 5$$

e a equação característica do sistema é dado por:

$$s^2 + 4s + 5 = 0$$

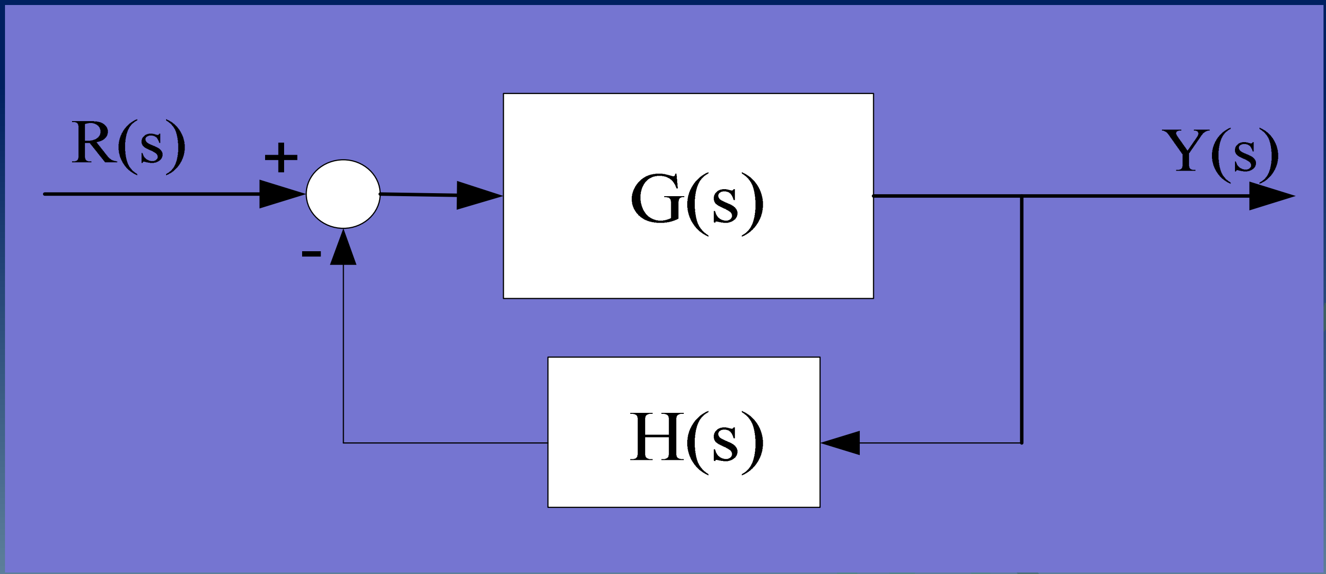
# Blocos com realimentação:
## *(feedback)*




Bloco G(s) com *realimentação* <u>não</u> unitária H(s)

## Exemplo 2:

No próximo capítulo veremos que o diagrama de bloco:




onde:

$$G(s) = \frac{5}{s(s+4)}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+3)}$$

tem a seguinte função de transferência:

$$T.F. = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{5}{s(s+4)}}{1+\dfrac{5}{s(s+4)}\cdot\dfrac{1}{(s+3)}} = \frac{5(s+3)}{(s^3+7s^2+12s+5)}$$

# Exemplo 2 (*continuação*):

$$\text{T.F.} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5(s+3)}{(s^3 + 7s^2 + 12s + 5)}$$

Este sistema tem três polos $p_1$, $p_2$ e $p_3$ e um zero $z_1$.

$p_1 = -4{,}65$ $p_2 = -1{,}726$ $p_3 = -0{,}623$ $z_1 = -3$

que são as raízes do polinómio característico $p(s)$

$$p(s) = s^3 + 7s^2 + 12s + 5$$

e da equação $s + 3 = 0$.

A equação característica do sistema é dado por:

$$s^3 + 7s^2 + 12s + 5 = 0$$

FACULDADE ENGENHARIA

Departamento de
Engenharia Eletromecânica

# Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt