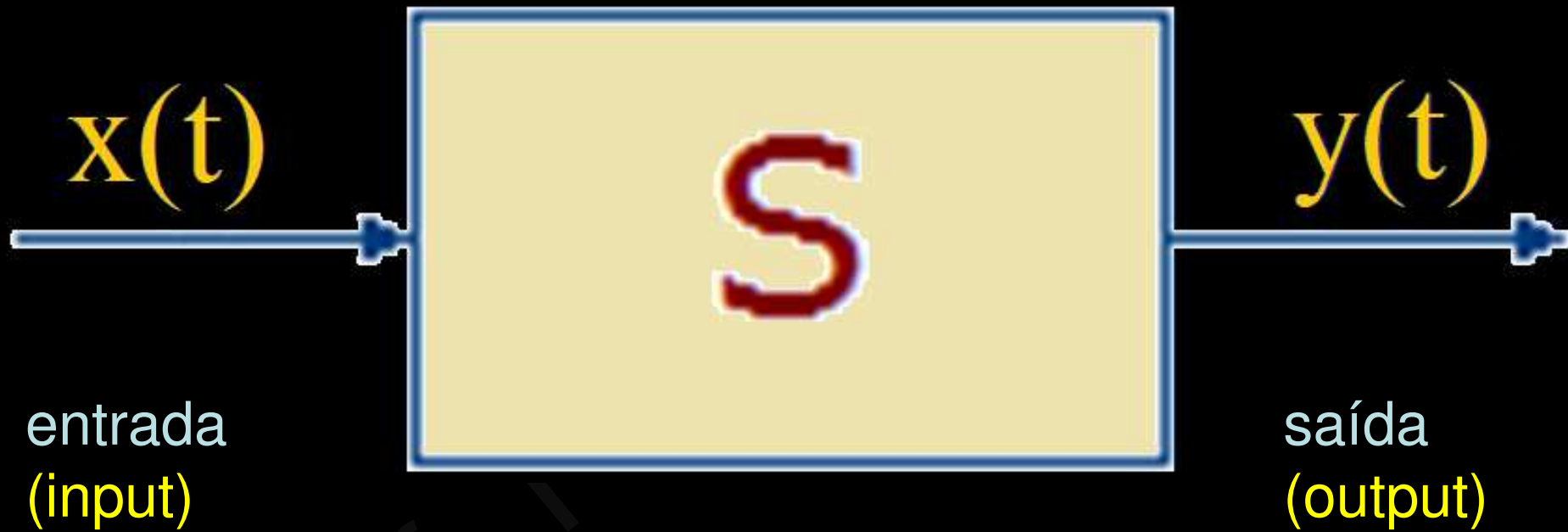


Controlo de Sistemas

3

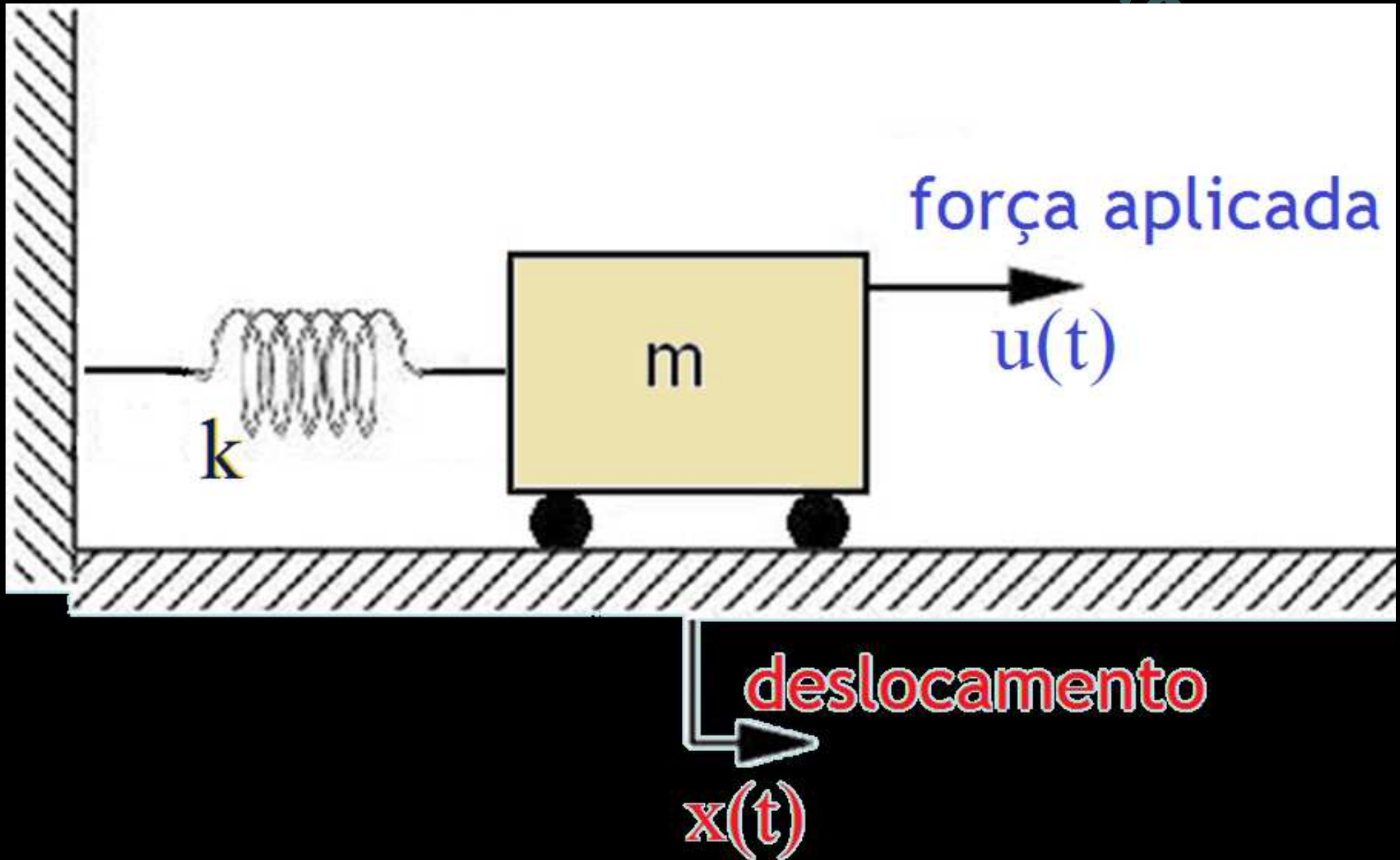
“Modelização de Sistemas” (*Systems modelling*)

J. A. M. Felippe de Souza



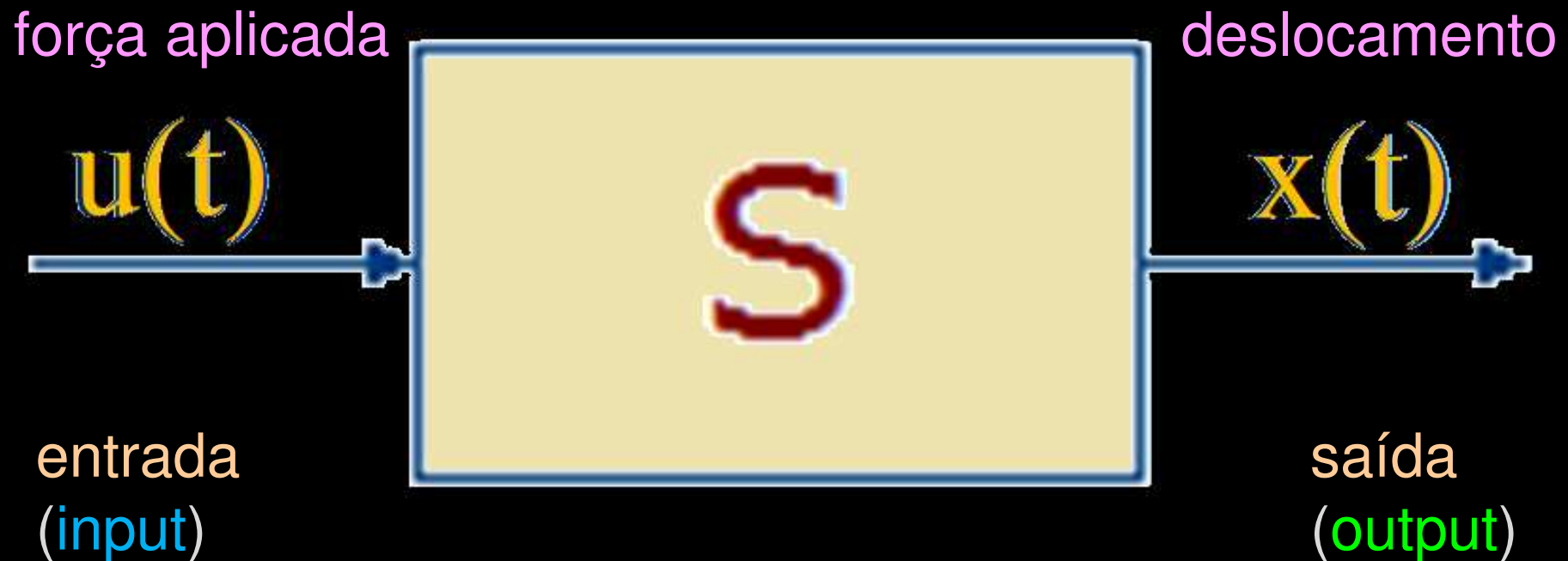
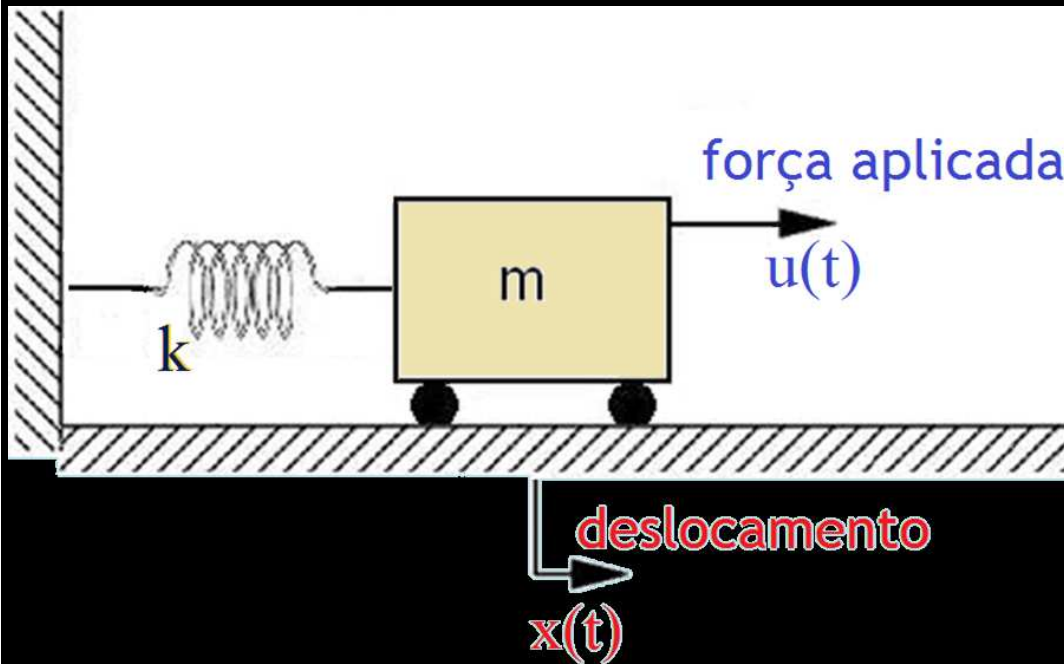
carro / massa / mola

carro / massa / mola



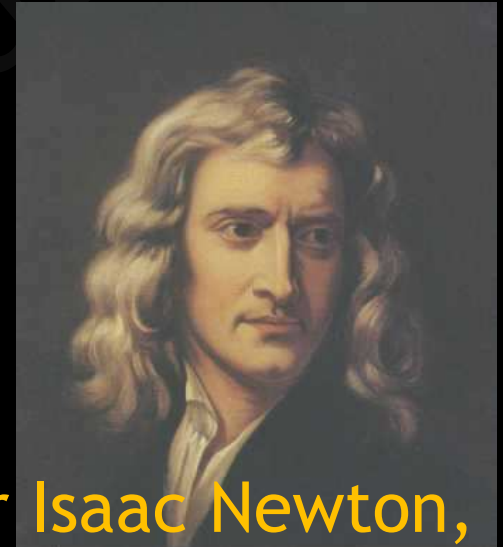
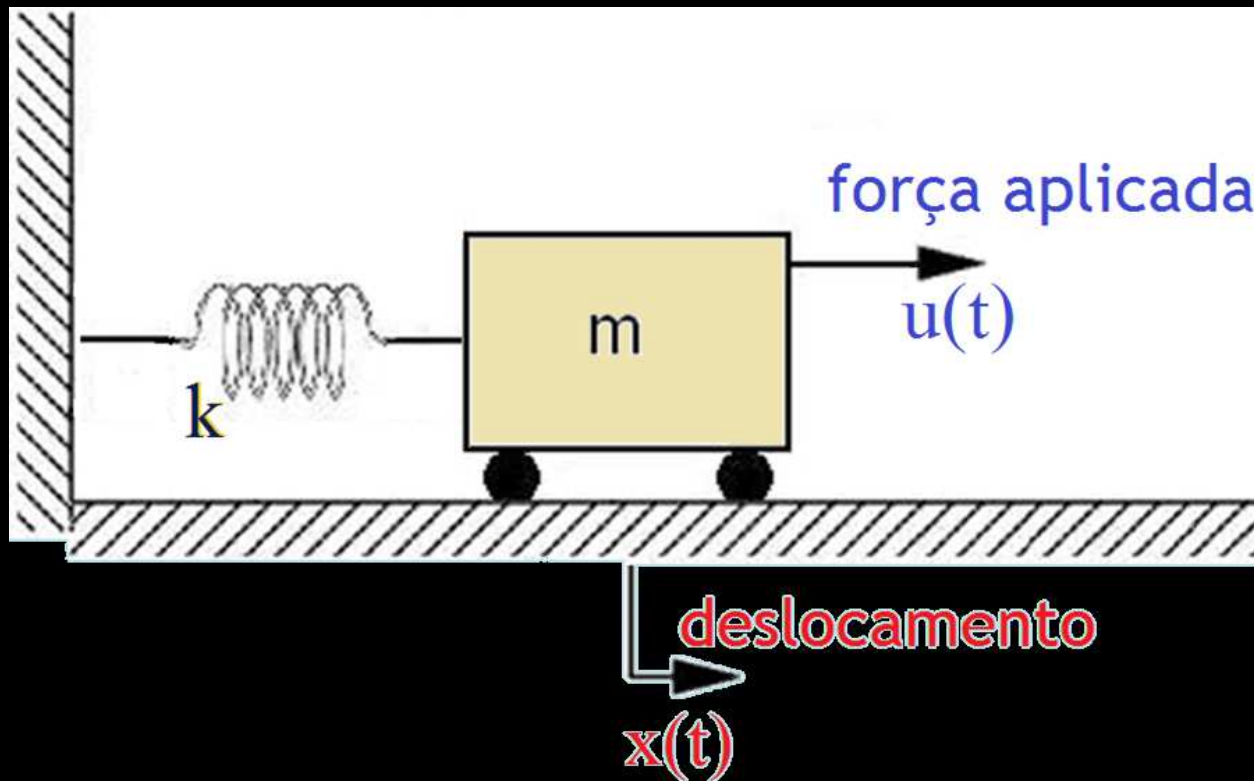
Modelização de Sistemas

carro / massa / mola



2ª Lei de Newton

$$\sum F = m \cdot a$$



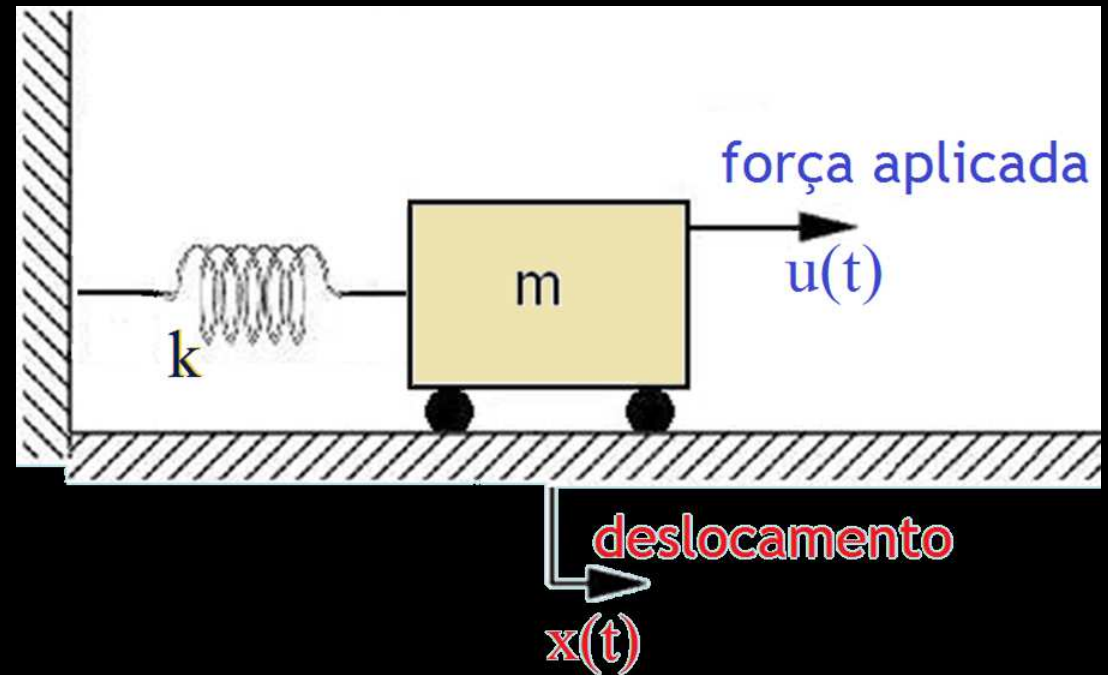
Sir Isaac Newton,
1643-1727

logo

$$m x'' = -kx - \mu x' + u,$$

Modelização de Sistemas

carro / massa / mola



e portanto,

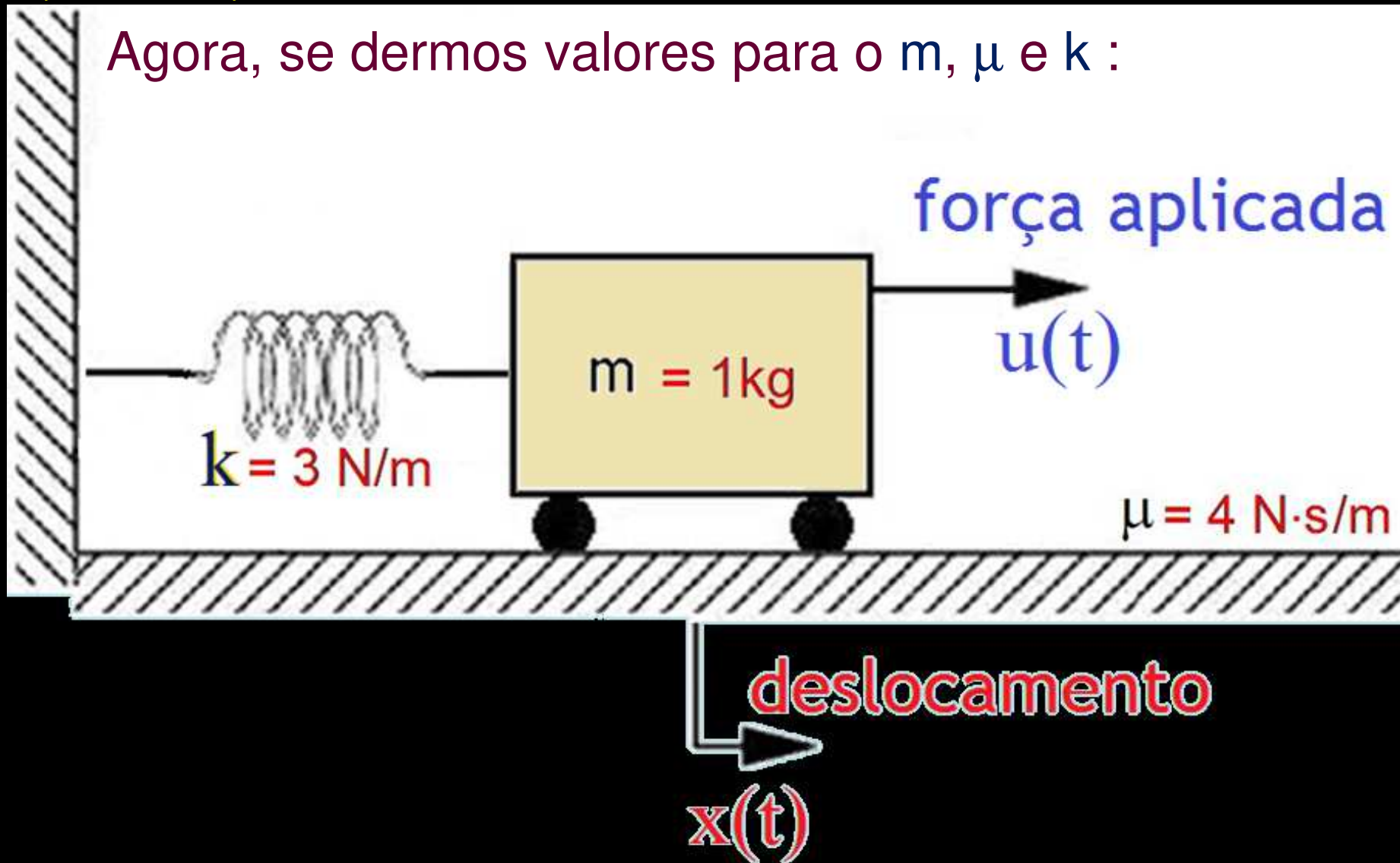
$$mx'' + \mu x' + kx = u,$$

ou

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + k x = u,$$

carro / massa / mola

Agora, se dermos valores para o m , μ e k :



$$m = 1\text{ kg}$$

$$\mu = 4\text{ N}\cdot\text{s/m}$$

$$k = 3\text{ N/m}$$

Modelização de Sistemas

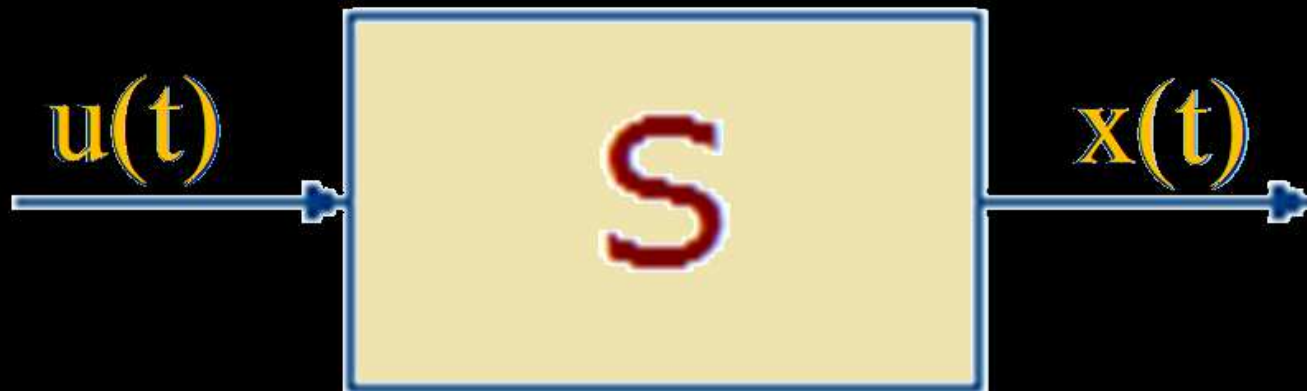
carro / massa / mola

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\mu = 4 \text{ N}\cdot\text{s/m}$$

$$k = 3 \text{ N/m}$$

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + k x = u \\ x'(0) = a, \quad x(0) = b \end{cases}$$



Modelização de Sistemas

carro / massa / mola

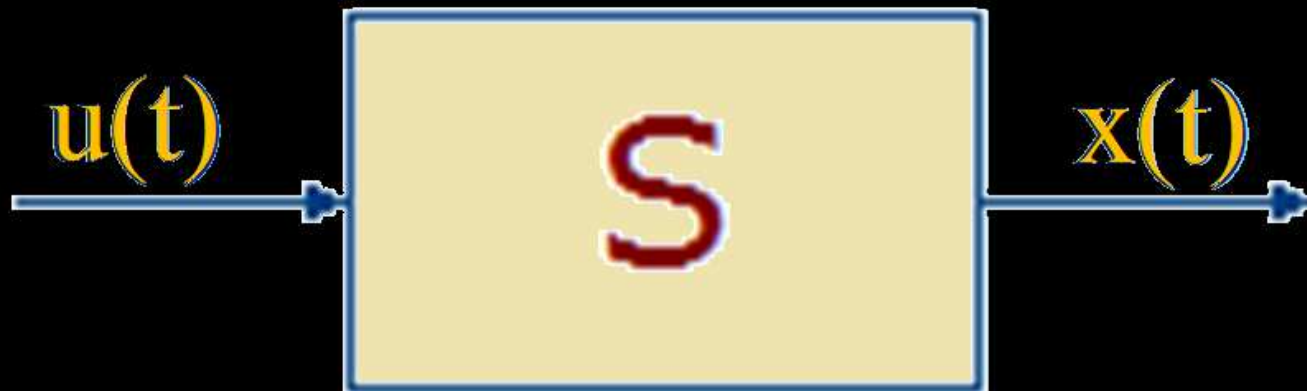
$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\mu = 4 \text{ N}\cdot\text{s/m}$$

$$k = 3 \text{ N/m}$$

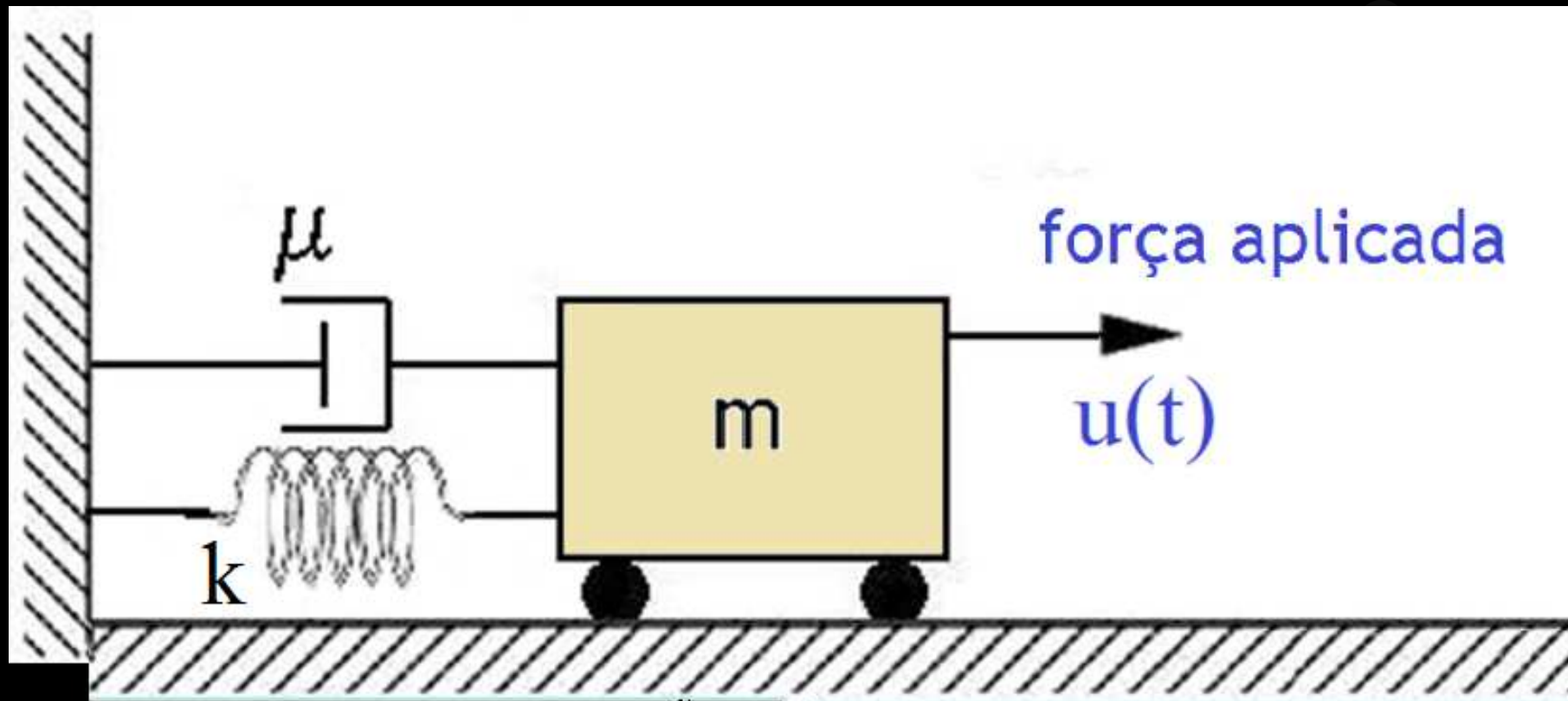
e o modelo torna-se em:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 3x = u, \\ x'(0) = a, \quad x(0) = b \end{cases}$$



movimento translacional mecânico

movimento translacional mecânico



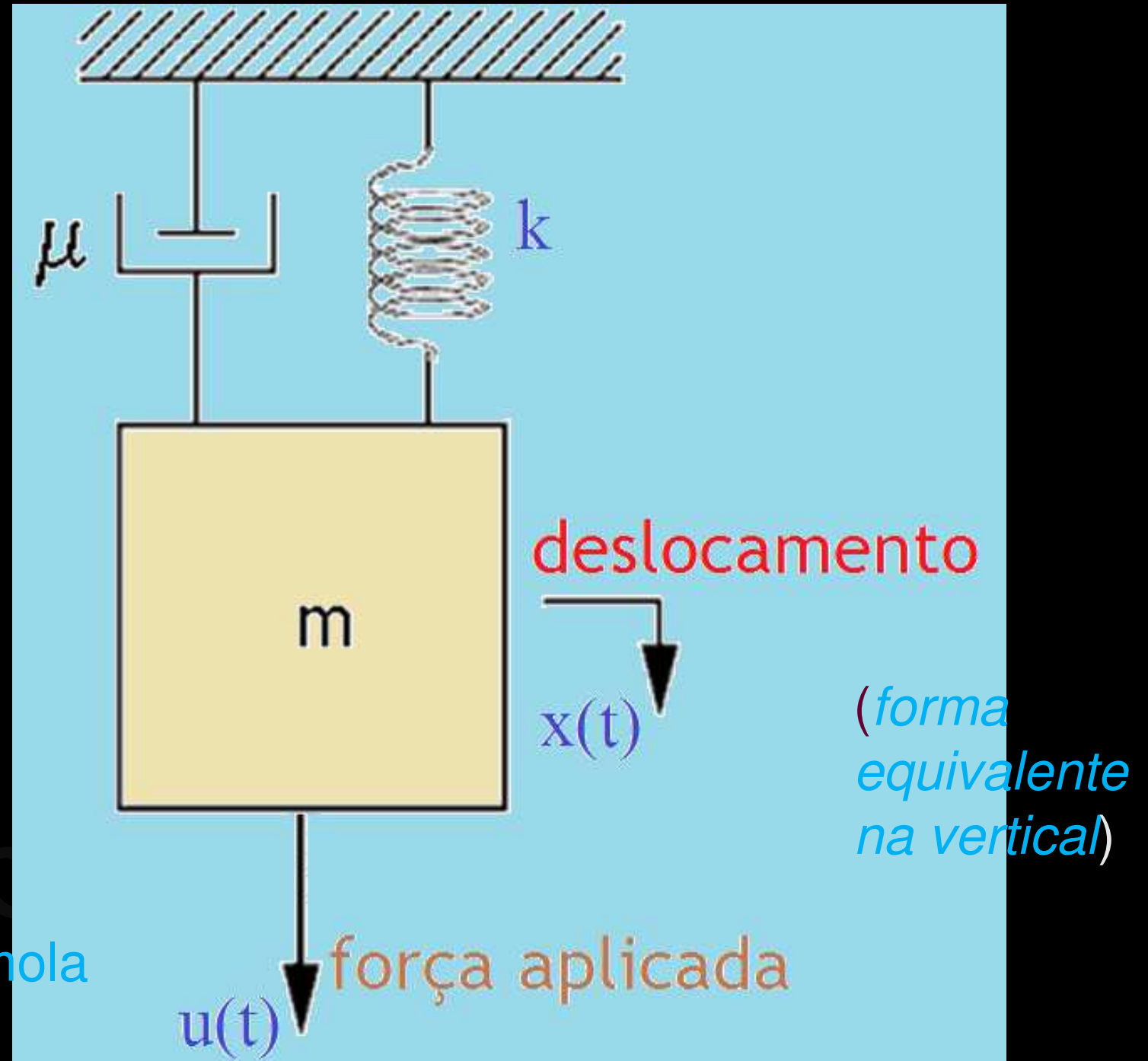
problema similar
ao anterior

carro / massa / mola

Modelização de Sistemas

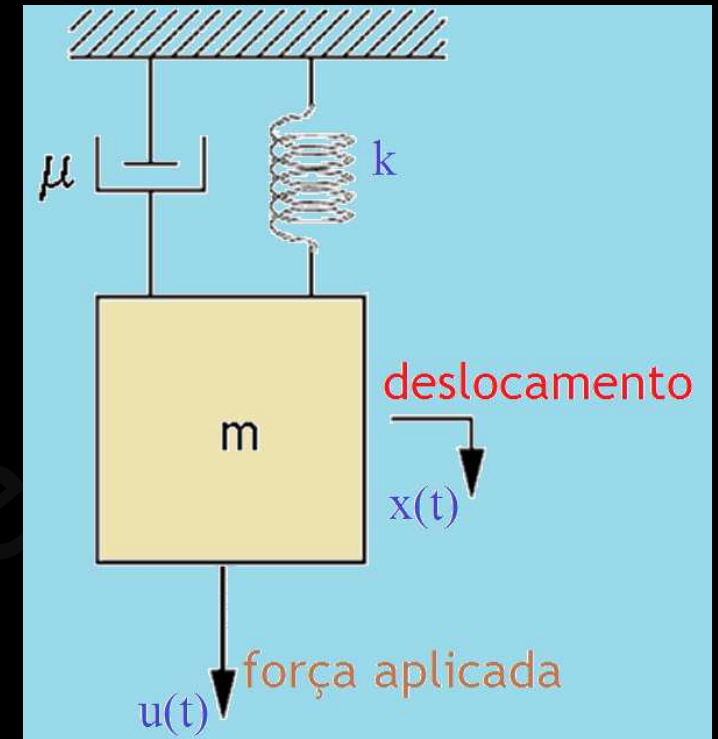
movimento
translacional
mecânico

problema similar
ao anterior
carro / massa / mola



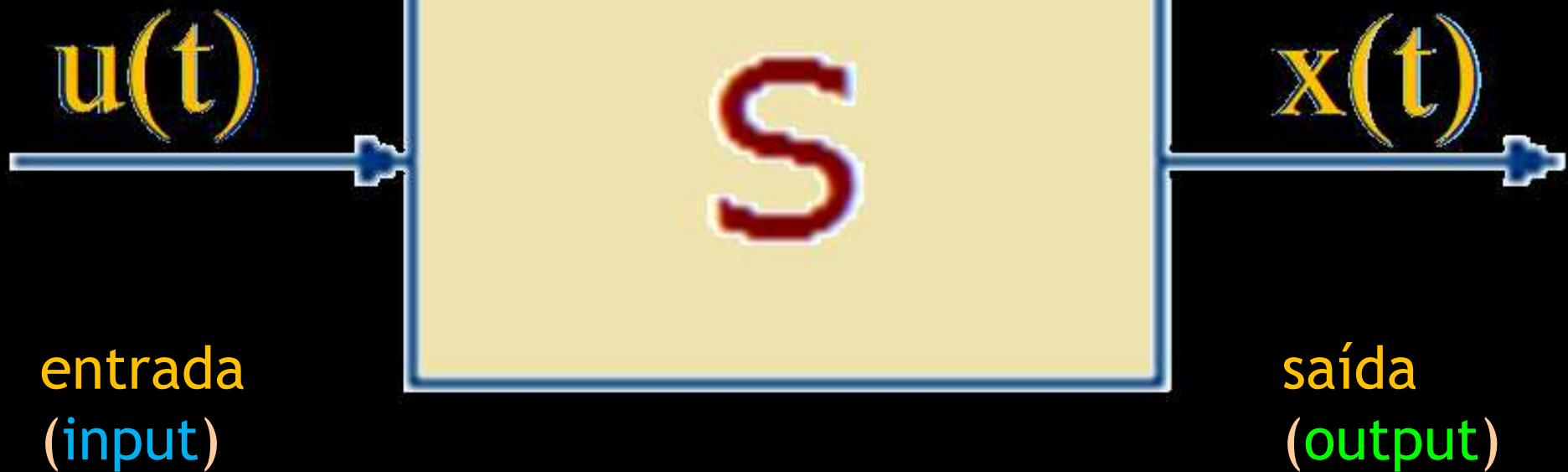
Modelização de Sistemas

movimento
translacional
mecânico



força aplicada

deslocamento



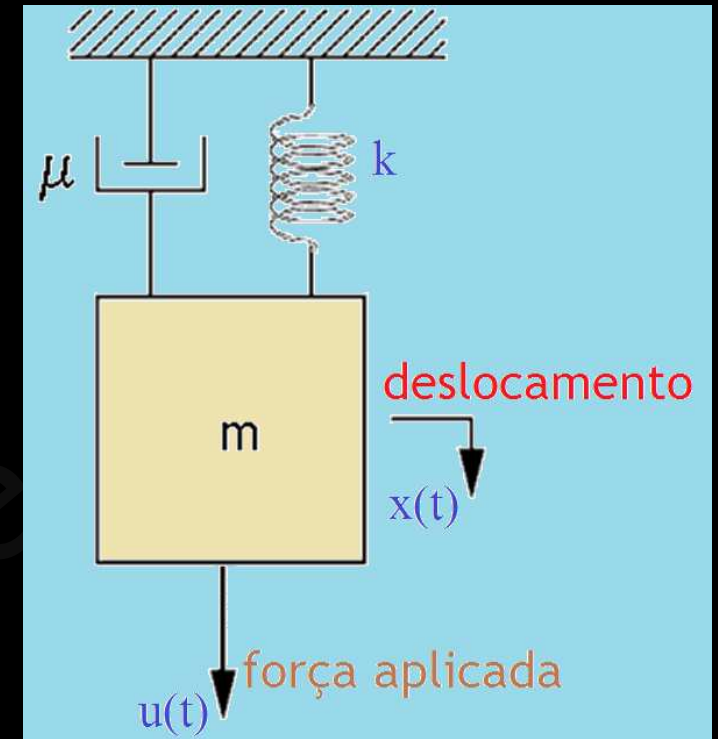
movimento
translacional
mecânico

Novamente, usando a 2ª Lei de Newton,
obtem-se:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = u,$$

ou

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + k x = u,$$



Modelização de Sistemas

carro / massa / mola ou movimento translacional mecânico

Portanto, estes 2 sistemas são descritos pela mesma *equação diferencial* (de 2ª ordem), ou seja, têm o mesmo modelo:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + k x =$$
$$= m x'' + \mu x' + k x = u$$

condições iniciais:

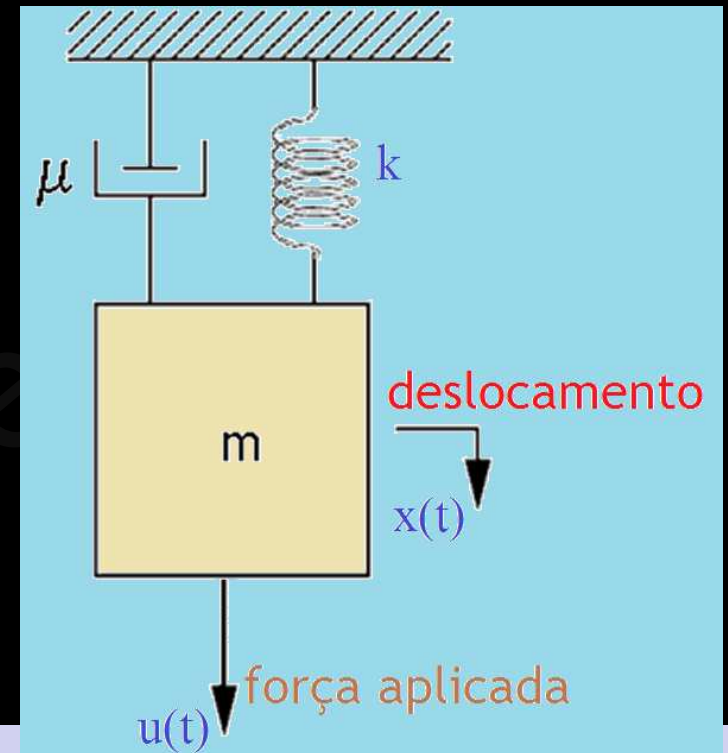
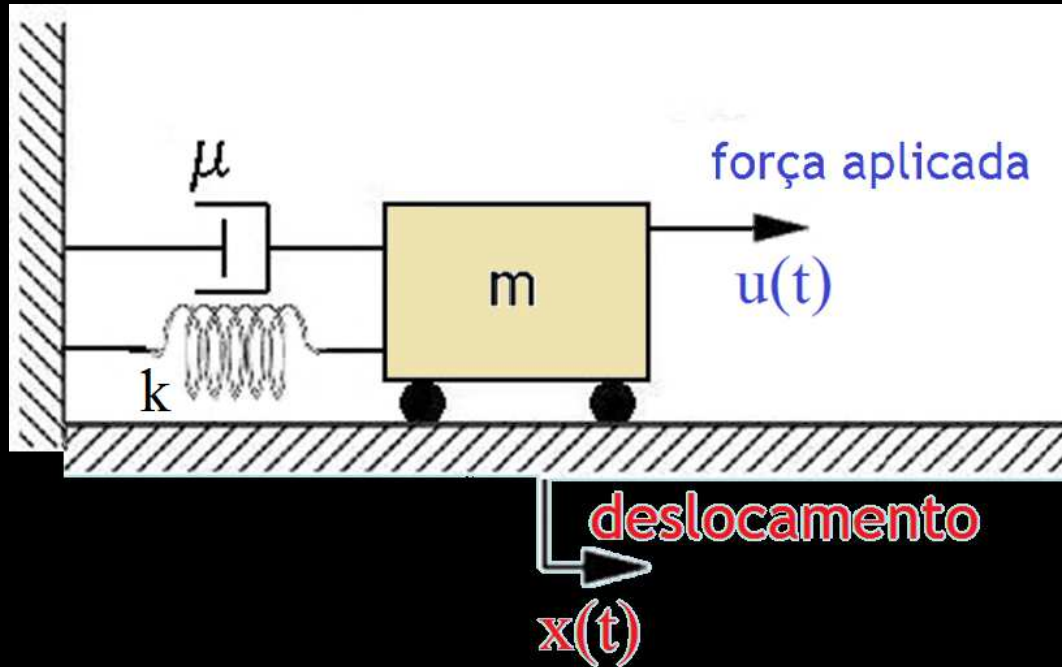
$$x'(0) = a, \quad x(0) = b$$

Modelização de Sistemas

carro / massa / mola

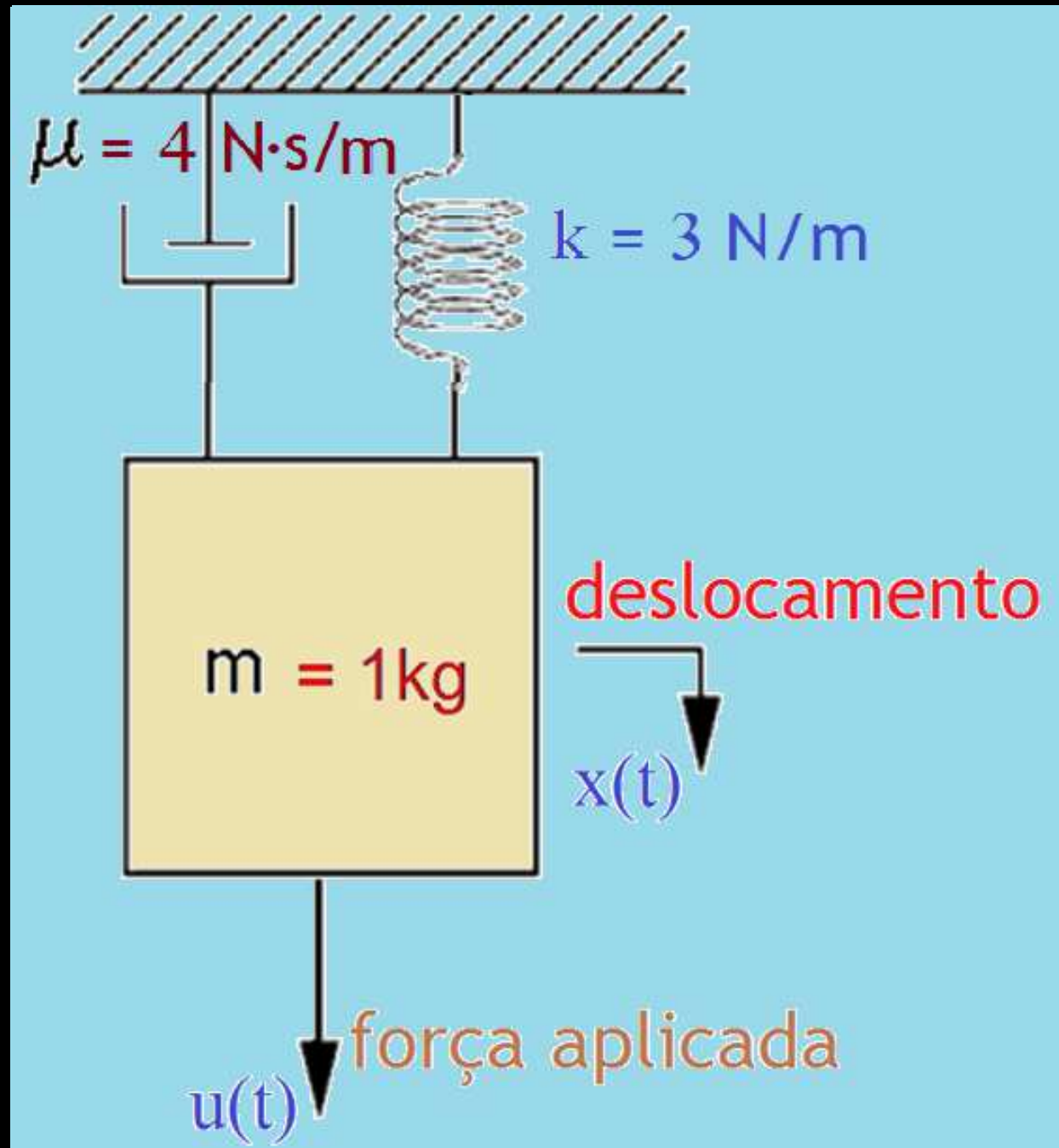
ou

movimento translacional mecânico



$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + k x = m x'' + \mu x' + k x = u, \\ x'(0) = a, \quad x(0) = b \end{array} \right.$$

movimento translacional mecânico



Agora, dando os mesmos valores para o m , μ e k que foram dados para o problema carro / massa / mola, temos:

$$m = 1\text{ kg}$$

$$\mu = 4\text{ N}\cdot\text{s/m}$$

$$k = 3\text{ N/m}$$

Modelização de Sistemas

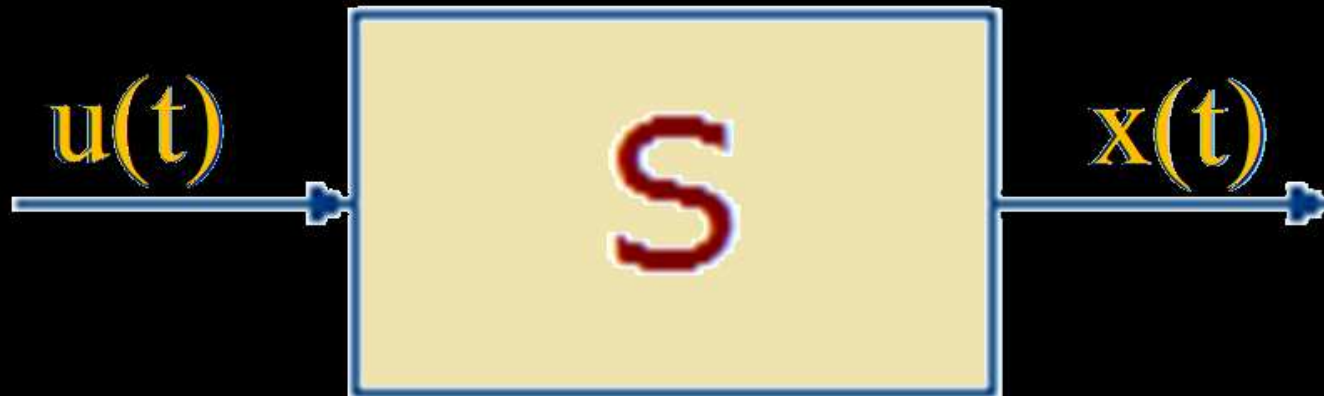
carro / massa / mola ou movimento translacional mecânico

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\mu = 4 \text{ N}\cdot\text{s/m}$$

$$k = 3 \text{ N/m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + k x = u, \\ x'(0) = a, \quad x(0) = b \end{array} \right.$$



Modelização de Sistemas

carro / massa / mola ou movimento translacional mecânico

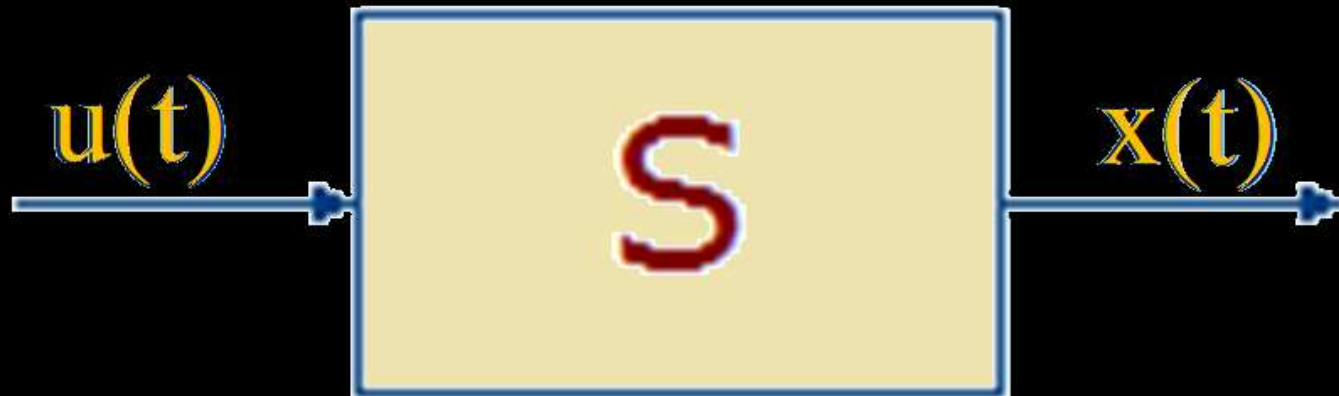
$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\mu = 4 \text{ N}\cdot\text{s/m}$$

$$k = 3 \text{ N/m}$$

(ambos possuem o mesmo modelo)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 3x = u, \\ x'(0) = a, \quad x(0) = b \end{array} \right.$$

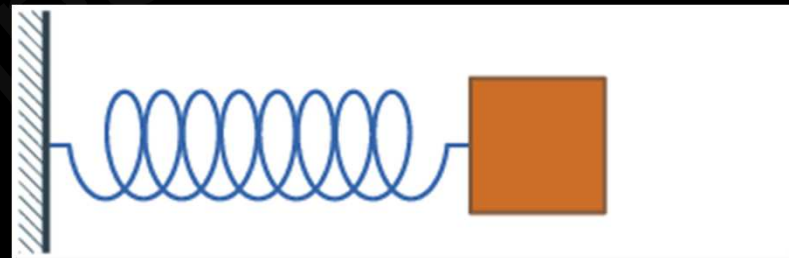
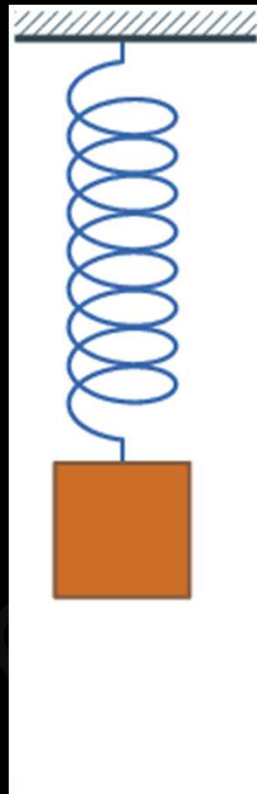


movimento translacional mecânico

Observação:

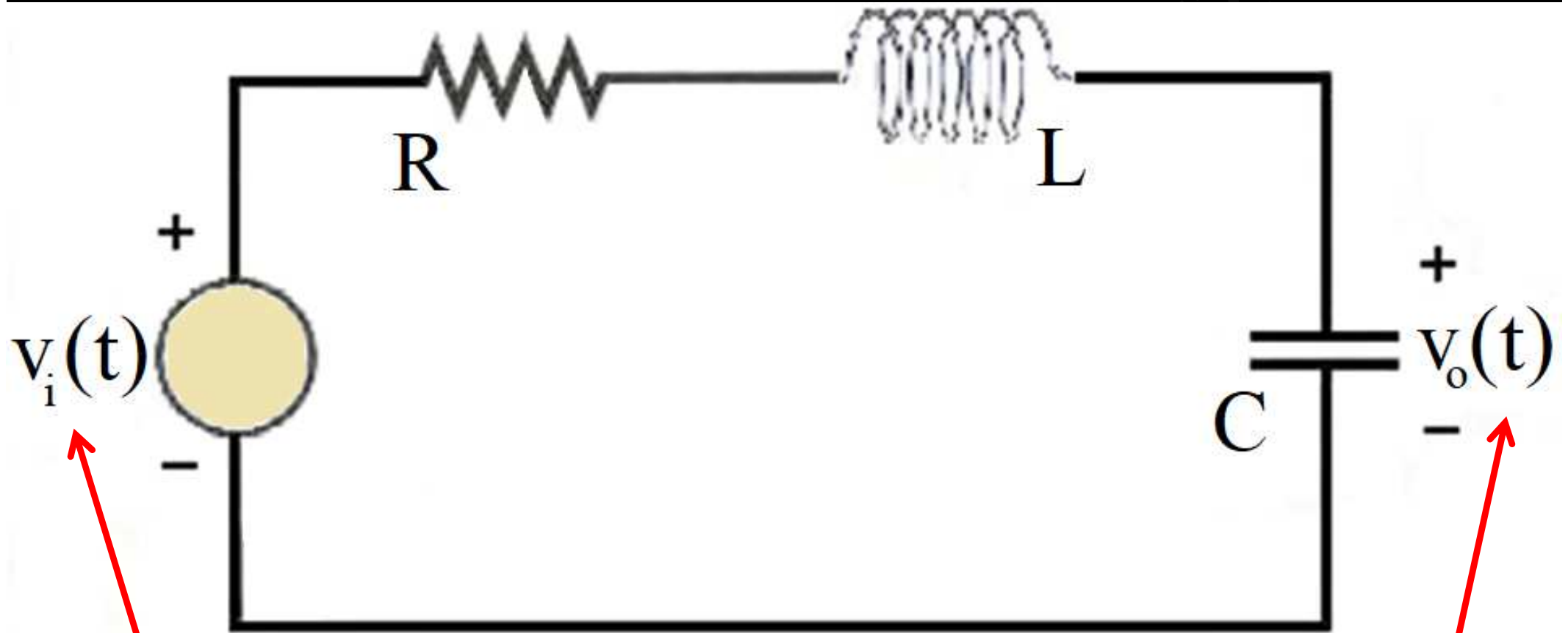
Note que se $\mu = 0$

Este sistema torna-se o “*oscilador harmónico*”.



circuito RLC série

circuito RLC série

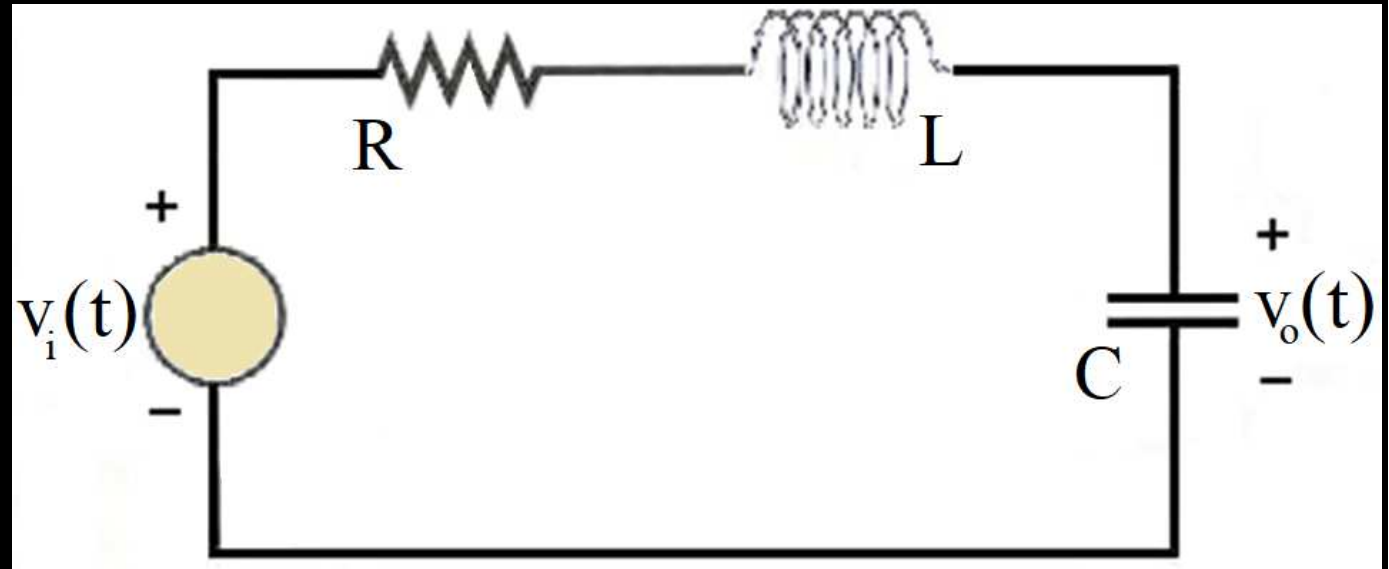


tensão
na entrada

tensão
na saída

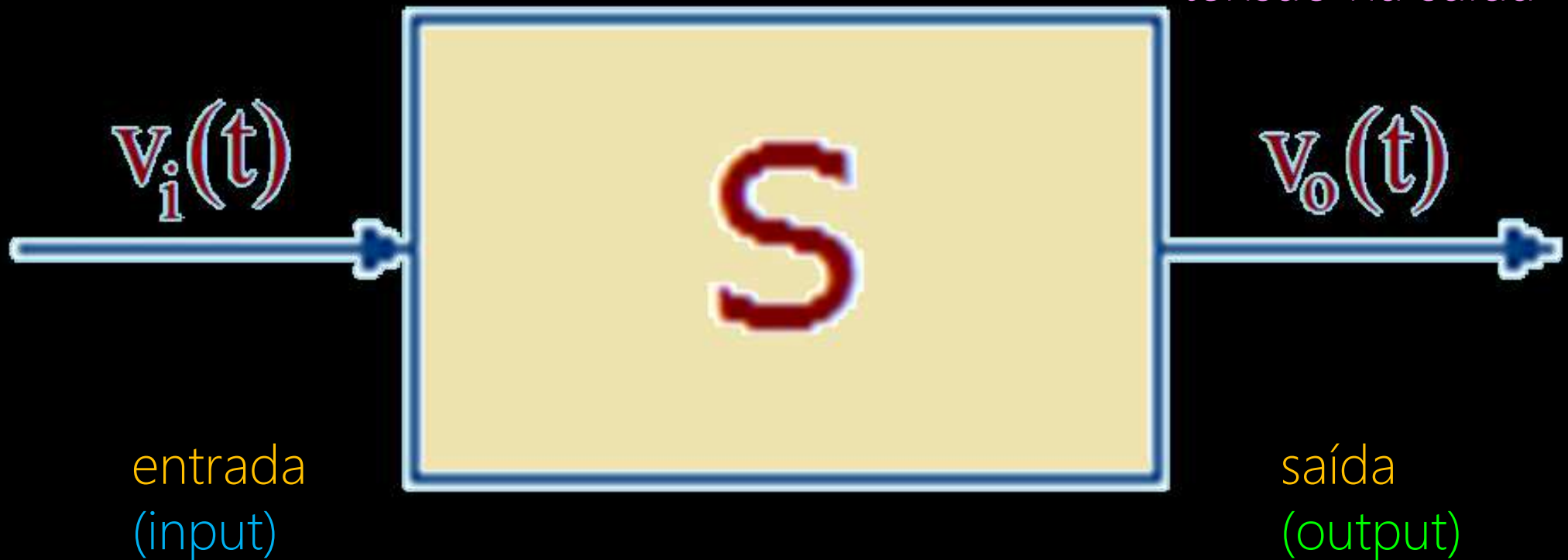
Modelização de Sistemas

circuito RLC série



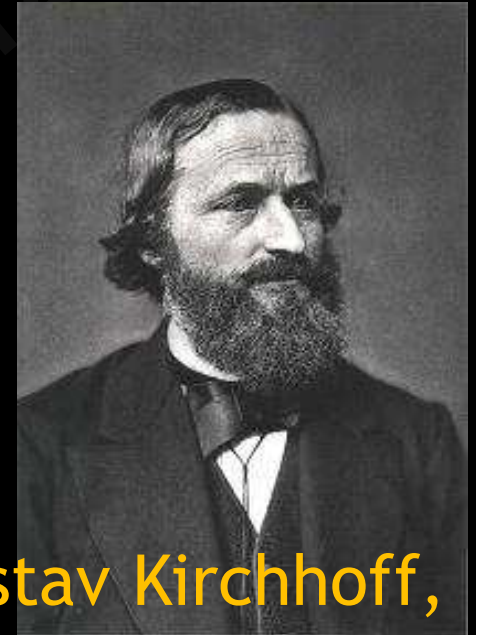
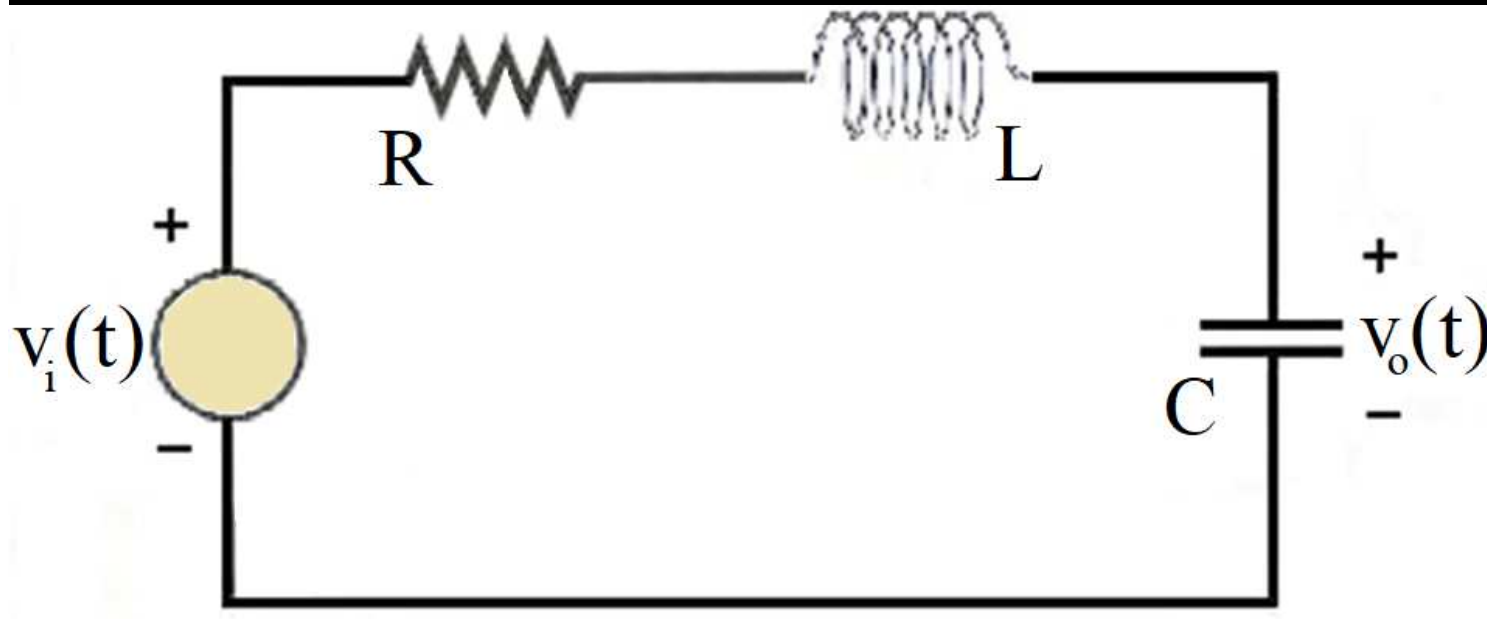
tensão na entrada

tensão na saída



Lei de Kirchhoff para malhas:

$$\sum V_k = 0$$



Gustav Kirchhoff,
1824-1887

logo

$$v_i - LC v_o'' - RC v_o' - v_o = 0,$$

circuito RLC série

e portanto,

$$LC v_o'' + RC v_o' + v_o = v_i ,$$

ou

$$LC \frac{d^2 v_o}{dt^2} + RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i ,$$

Logo, este *sistema* também é descrito por uma *equação diferencial* de *2ª ordem*, como no exemplo anterior.

circuito RLC série

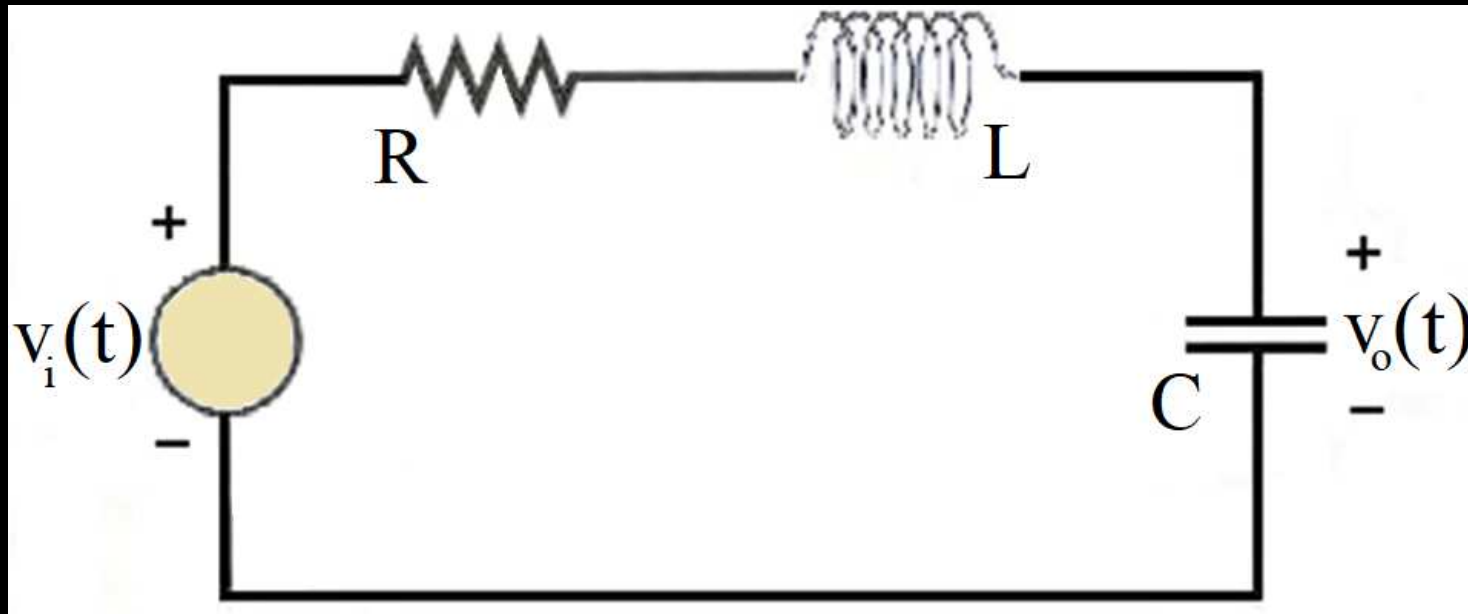
Ou seja, o modelo deste sistema é uma *equação diferencial* de 2ª ordem:

$$LC \frac{d^2 v_o}{dt^2} + RC \frac{dv_o}{dt} + v_o =$$
$$= RC v_o'' + LC v_o' + v_o = v_i$$

condições iniciais:

$$v_o'(0) = a, \quad v_o(0) = b$$

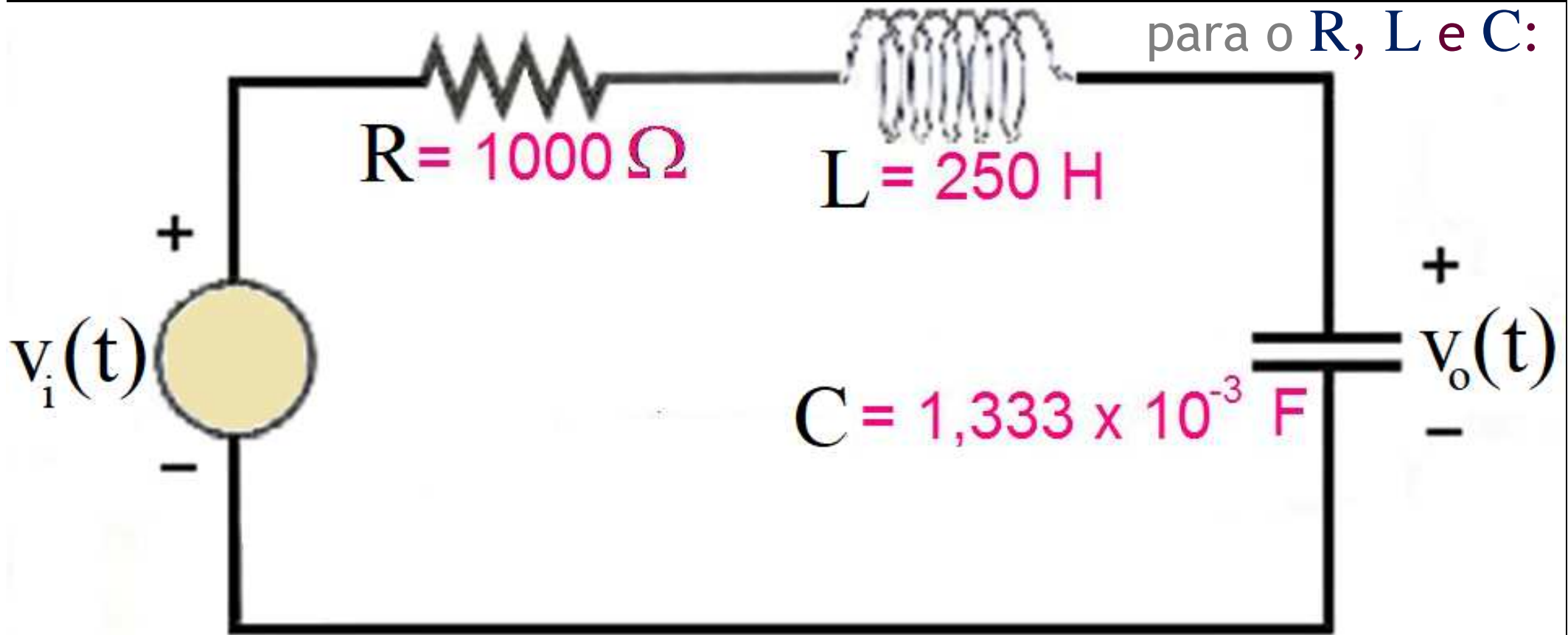
circuito RLC série



$$\left\{ \begin{array}{l} LC \frac{d^2 v_o}{dt^2} + RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = LC v_o'' + RC v_o' + v_o = v_i \\ v_o'(0) = a, \quad v_o(0) = b \end{array} \right.$$

circuito RLC série

Dando valores
para o R , L e C :

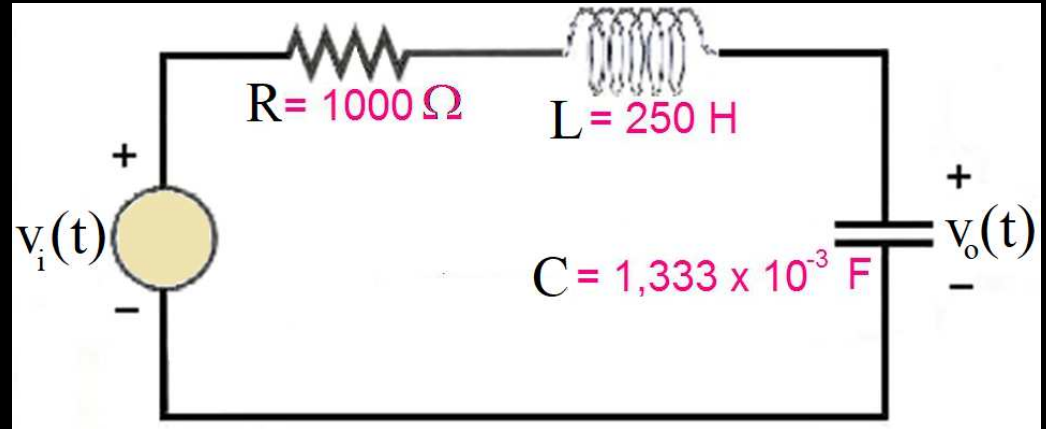


$$R = 1000 \Omega$$

$$L = 250 \text{ H}$$

$$C = 1,333 \times 10^{-3} \text{ F}$$

Modelização de Sistemas



circuito RLC série

$$\left\{ \begin{array}{l} LC \frac{d^2 v_o}{dt^2} + RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = LCv_o'' + RCv_o' + v_o = v_i, \\ v_o'(0) = a, \quad v_o(0) = b \end{array} \right.$$

$$R = 1000 \, \Omega$$

$$L = 250 \, \text{H}$$

$$C = 1,333 \times 10^{-3} \, \text{F}$$

circuito RLC série

$$\left\{ \begin{array}{l} LC \frac{d^2 v_o}{dt^2} + RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = LC v_o'' + RC v_o' + v_o = v_i, \\ v_o'(0) = a, \quad v_o(0) = b \end{array} \right.$$

$$R = 1000 \, \Omega$$

$$L = 250 \, \text{H}$$

$$C = 1,333 \times 10^{-3} \, \text{F}$$



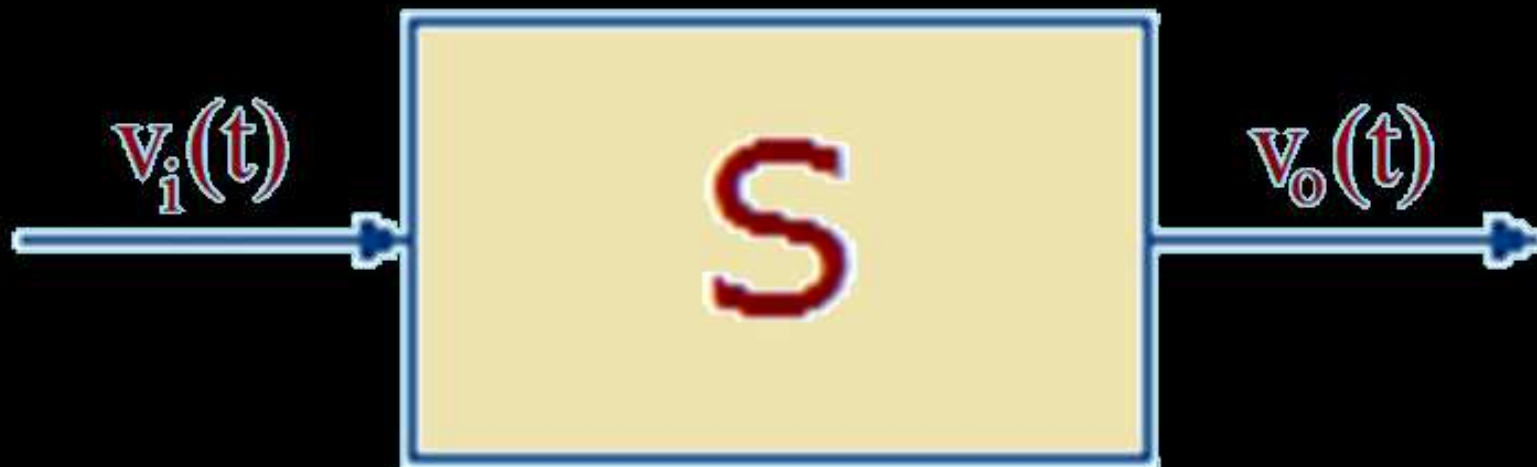
circuito RLC série

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 v_o}{dt^2} + 4 \frac{dv_o}{dt} + 3v_o = v_o'' + 4v_o' + 3v_o = 3v_i, \\ v_o'(0) = a, \quad v_o(0) = b \end{array} \right.$$

$$R = 1000 \, \Omega$$

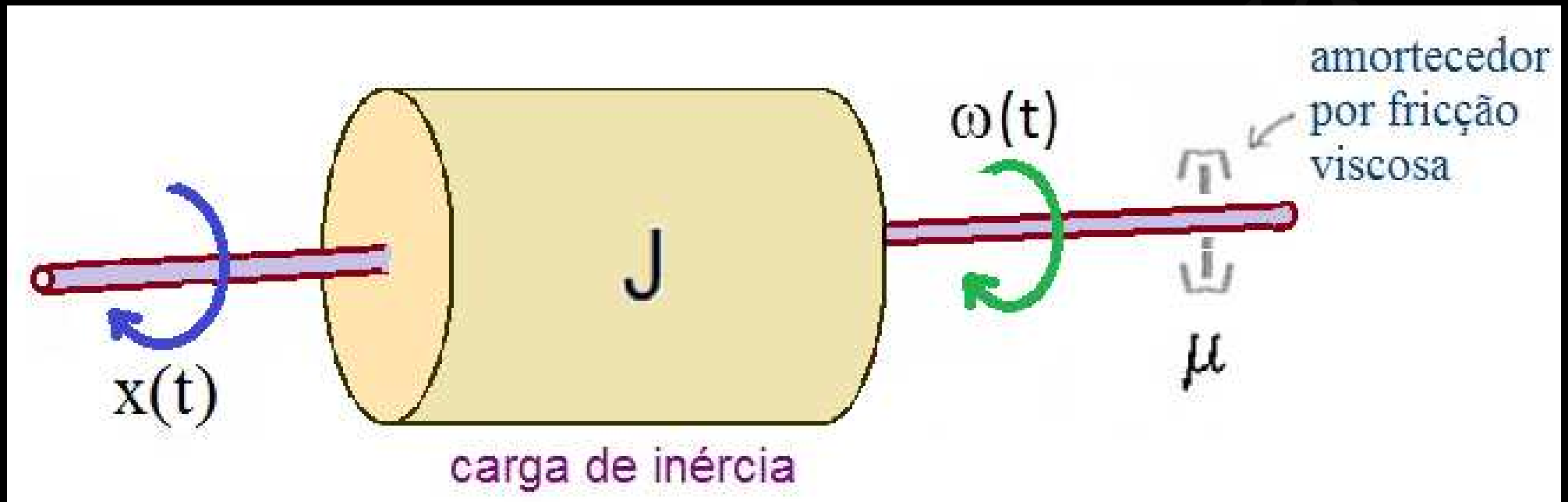
$$L = 250 \, \text{H}$$

$$C = 1,333 \times 10^{-3} \, \text{F}$$



movimento rotacional mecânico

movimento rotacional mecânico



$x(t)$ = momento aplicado ao sistema entrada/input [N·m];

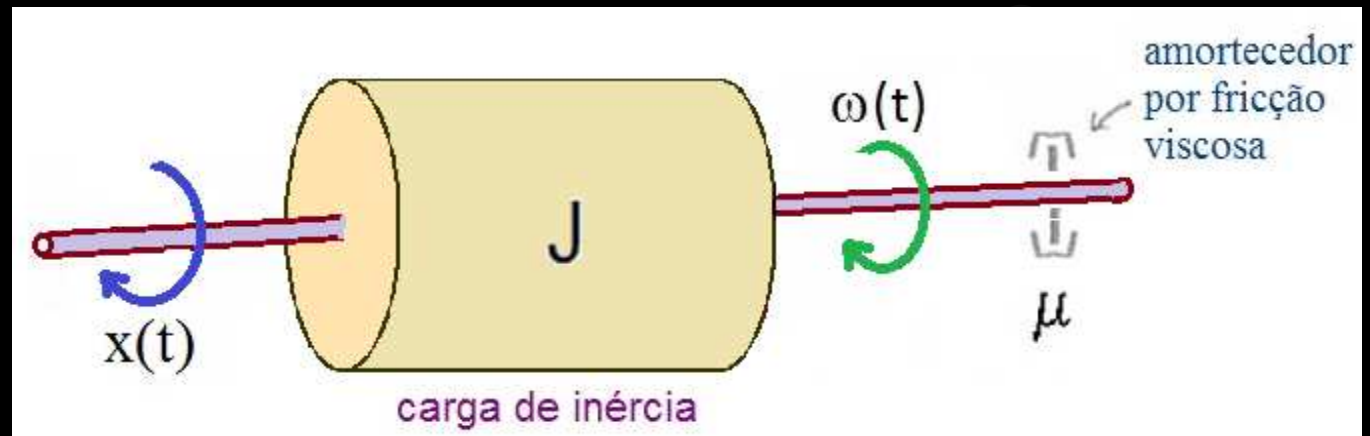
$\omega(t)$ = velocidade angular saída/output [rad/s];

J = momento de inércia [kg · m²];

μ = coeficiente de fricção viscosa [N·m / rad/s]

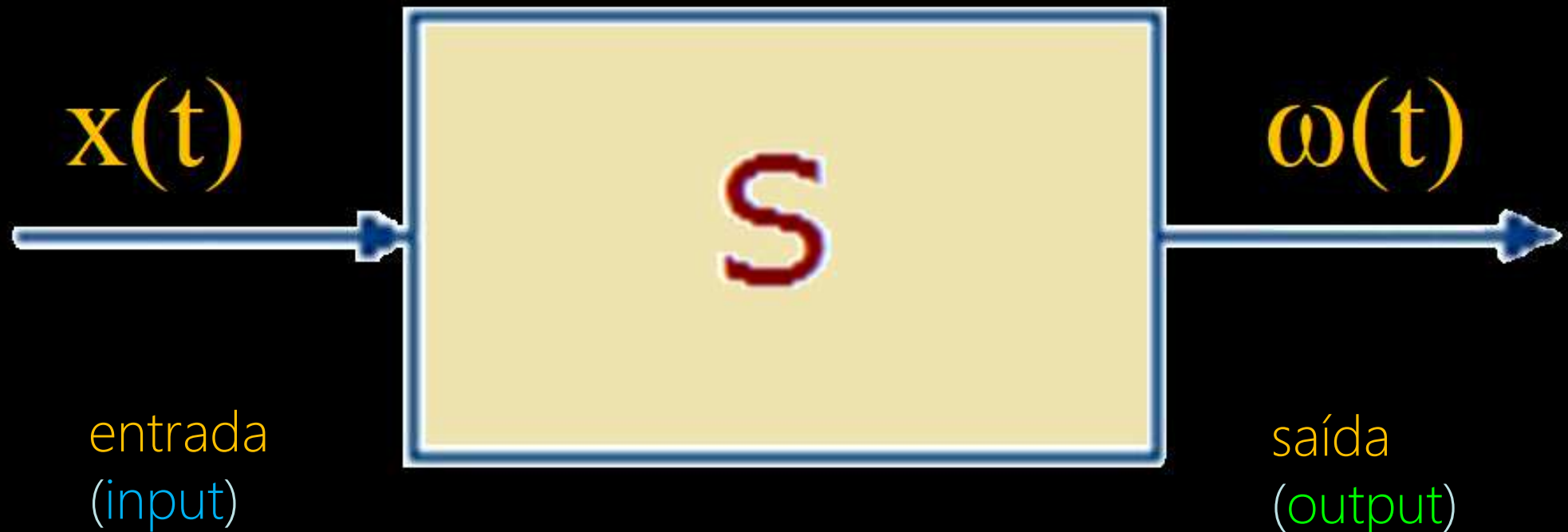
Modelização de Sistemas

movimento rotacional mecânico



momento (ou *torque*)
aplicado

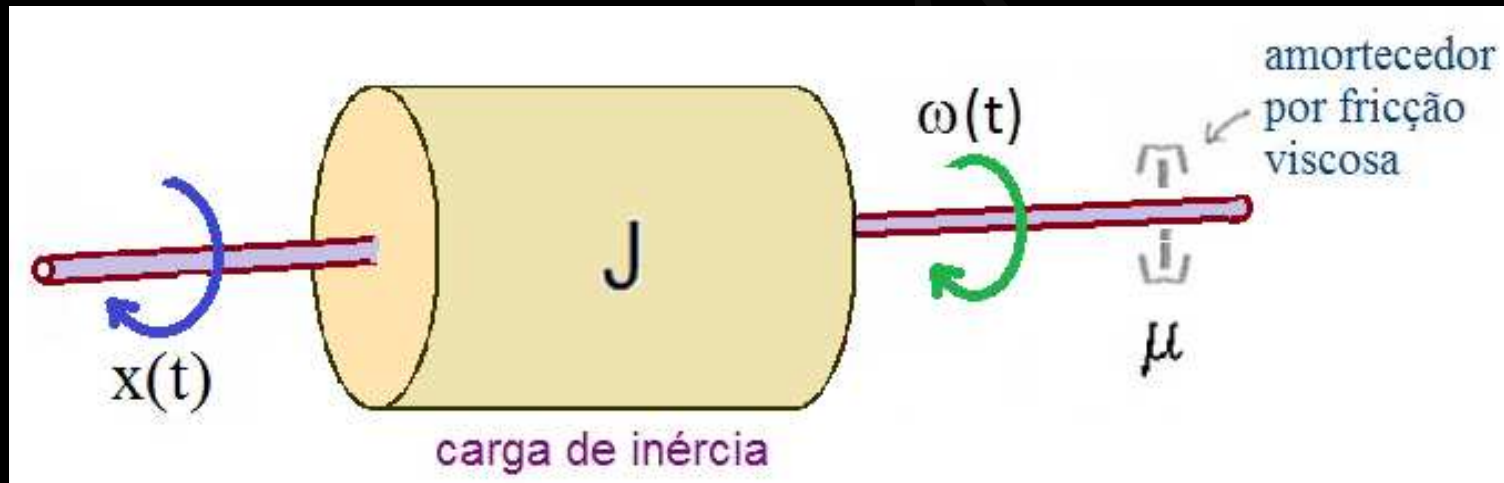
velocidade
angular



movimento rotacional mecânico

Usando a Lei de Newton para sistemas rotacionais

$$\sum \text{momentos} = J \omega',$$



tem-se que

$$J \omega' + \mu \omega = x,$$

movimento rotacional mecânico

Logo, este sistema é descrito por uma *equação diferencial* (de 1ª ordem):

$$J \frac{d\omega}{dt} + \mu \omega =$$

$$= J\omega' + \mu\omega = x$$

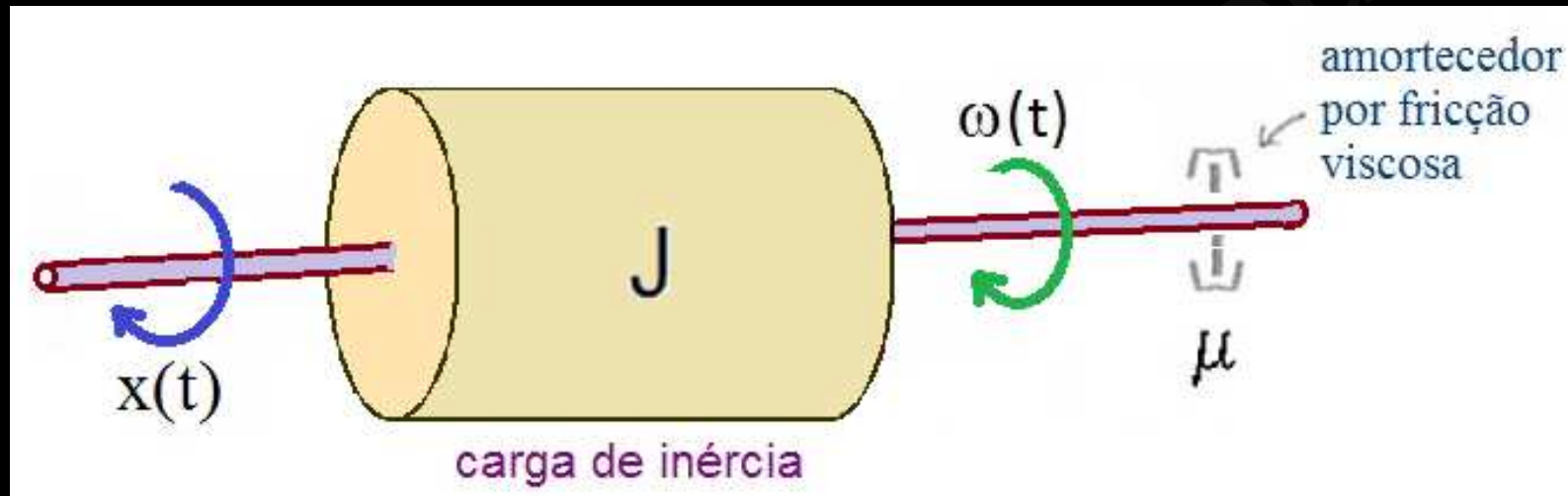
condição inicial:

$$\omega(0) = a$$

movimento rotacional mecânico

Ou seja,

o modelo deste sistema é uma *equação diferencial* de 1ª ordem:



$$\left\{ \begin{array}{l} J \frac{d\omega}{dt} + \mu\omega = J\omega' + \mu\omega = x, \\ \omega(0) = a \end{array} \right.$$

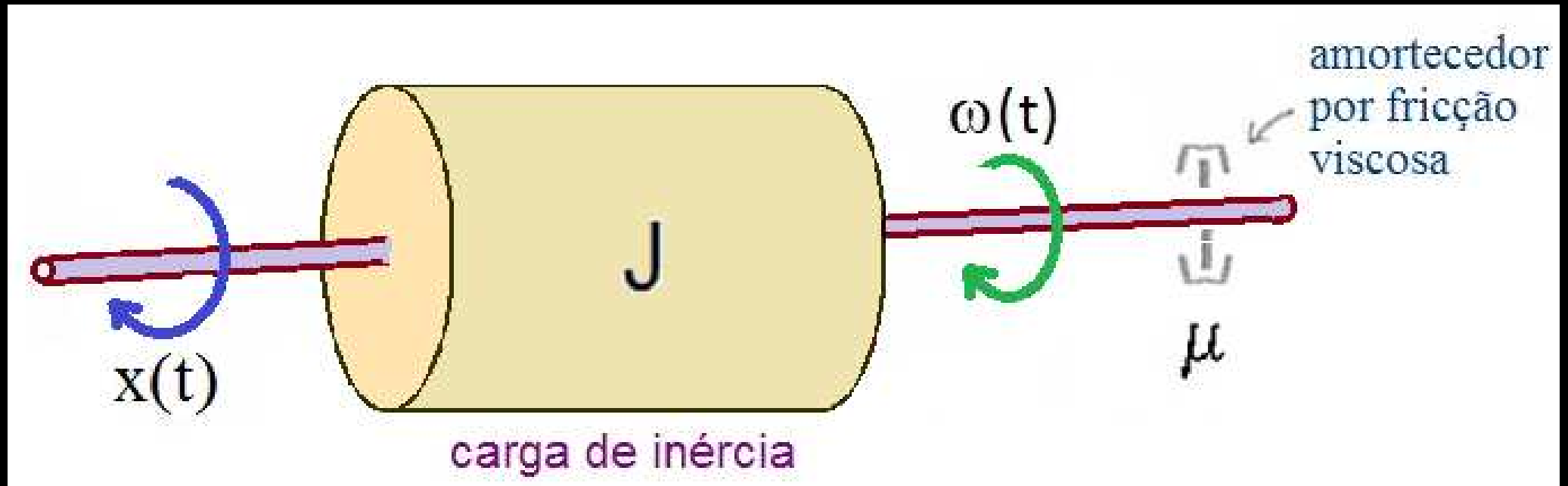
Modelização de Sistemas

movimento rotacional mecânico

Agora, dando valores para o J e μ :

$$J = 0,5 \text{ kg/m}^2$$

$$\mu = 2 \text{ N}\cdot\text{m} / \text{rad/s}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} J \frac{d\omega}{dt} + \mu\omega = J\omega' + \mu\omega = x \\ \omega(0) = a \end{array} \right.$$

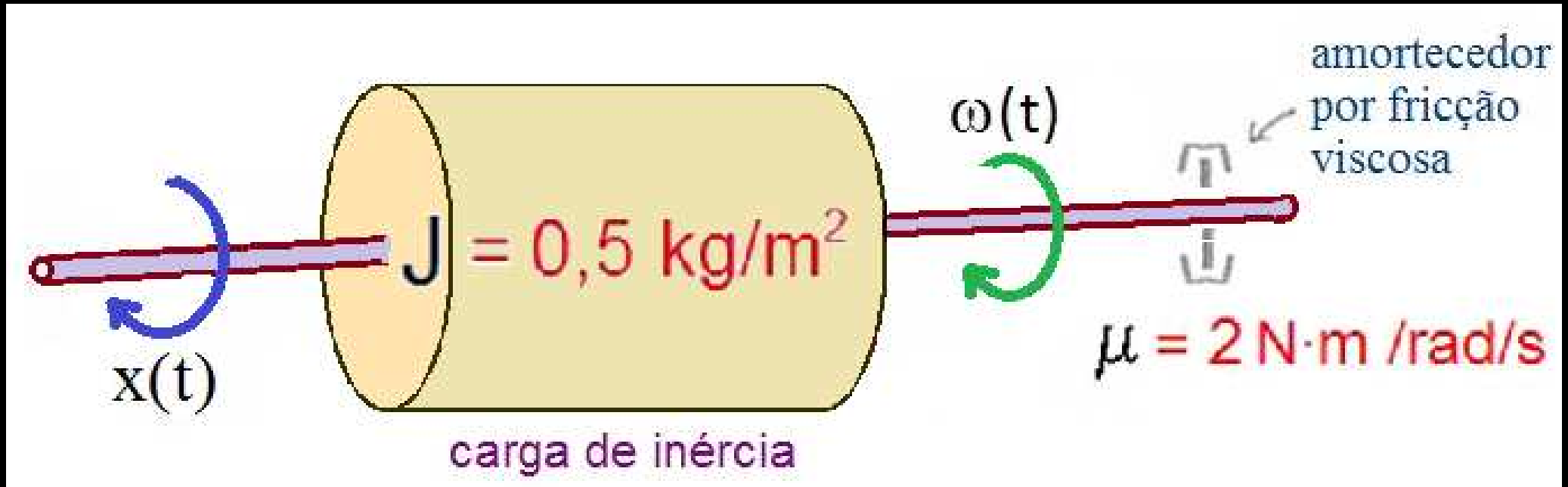
Modelização de Sistemas

movimento rotacional mecânico

Agora, dando valores para o J e μ :

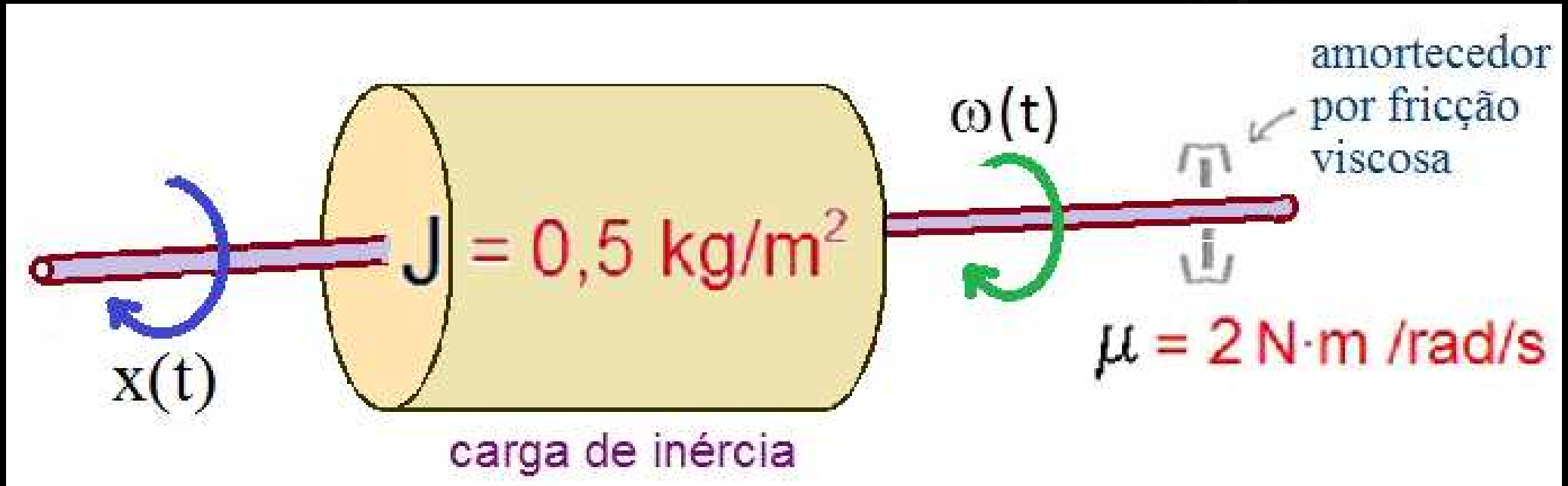
$$J = 0,5 \text{ kg/m}^2$$

$$\mu = 2 \text{ N}\cdot\text{m} / \text{rad/s}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} J \frac{d\omega}{dt} + \mu\omega = J\omega' + \mu\omega = x, \\ \omega(0) = a \end{array} \right.$$

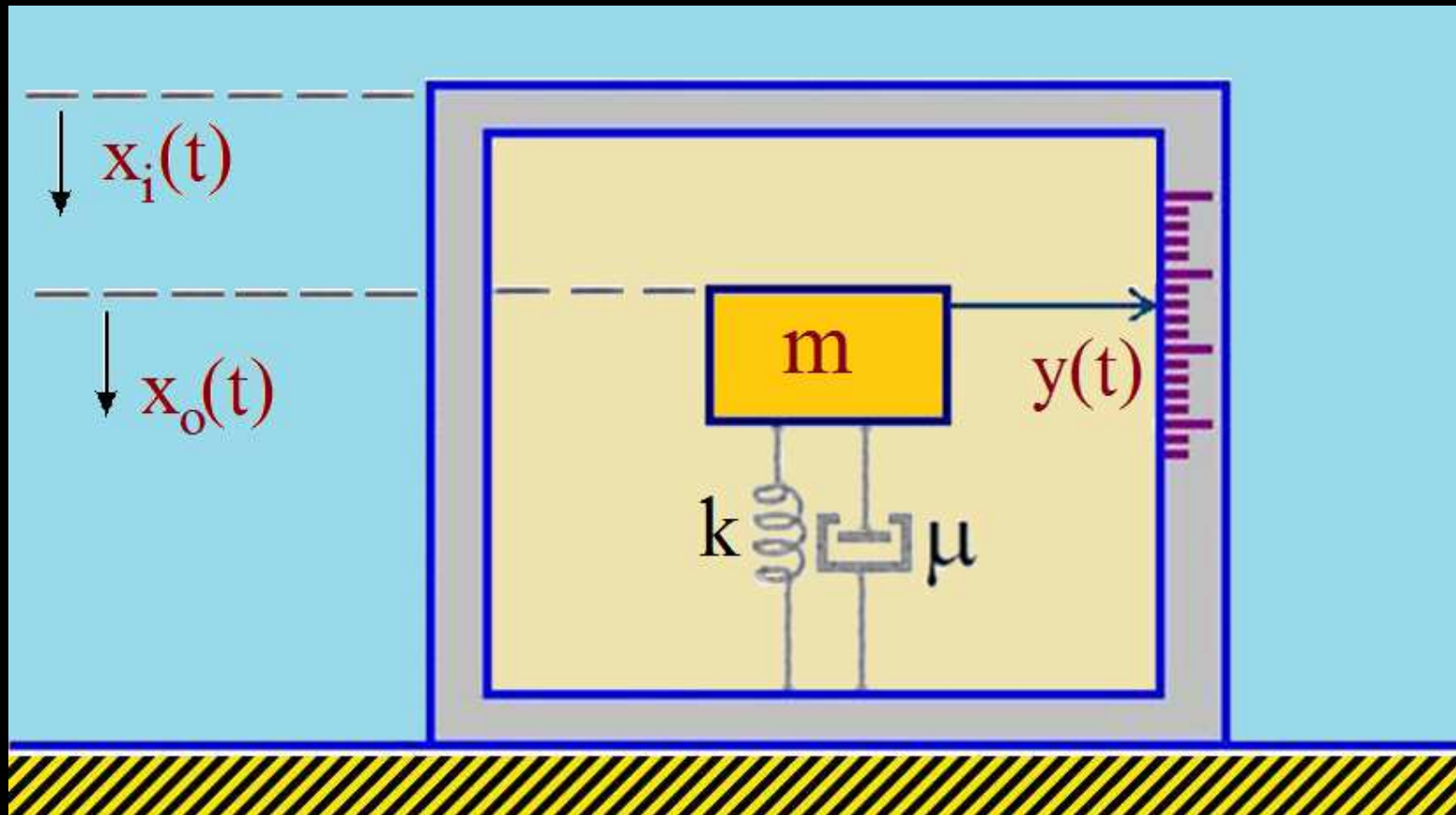
movimento rotacional mecânico



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} + 4\omega = \omega' + 4\omega = 2x, \\ \omega(0) = a \end{array} \right.$$

um sismógrafo

sismógrafo



$x_i(t)$ = deslocamento da *caixa* em relação ao *espaço inercial*;

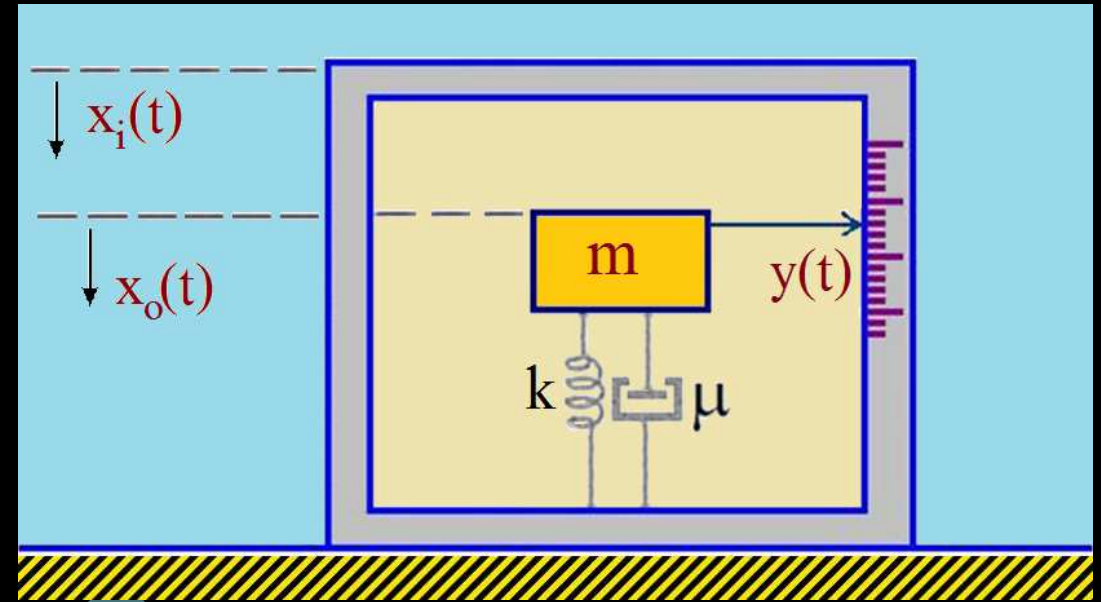
$x_o(t)$ = deslocamento da *massa m* em relação ao *espaço inercial*;

$y(t)$ = deslocamento da *massa m* em relação à *caixa*.

$$y(t) = [x_o(t) - x_i(t)]$$

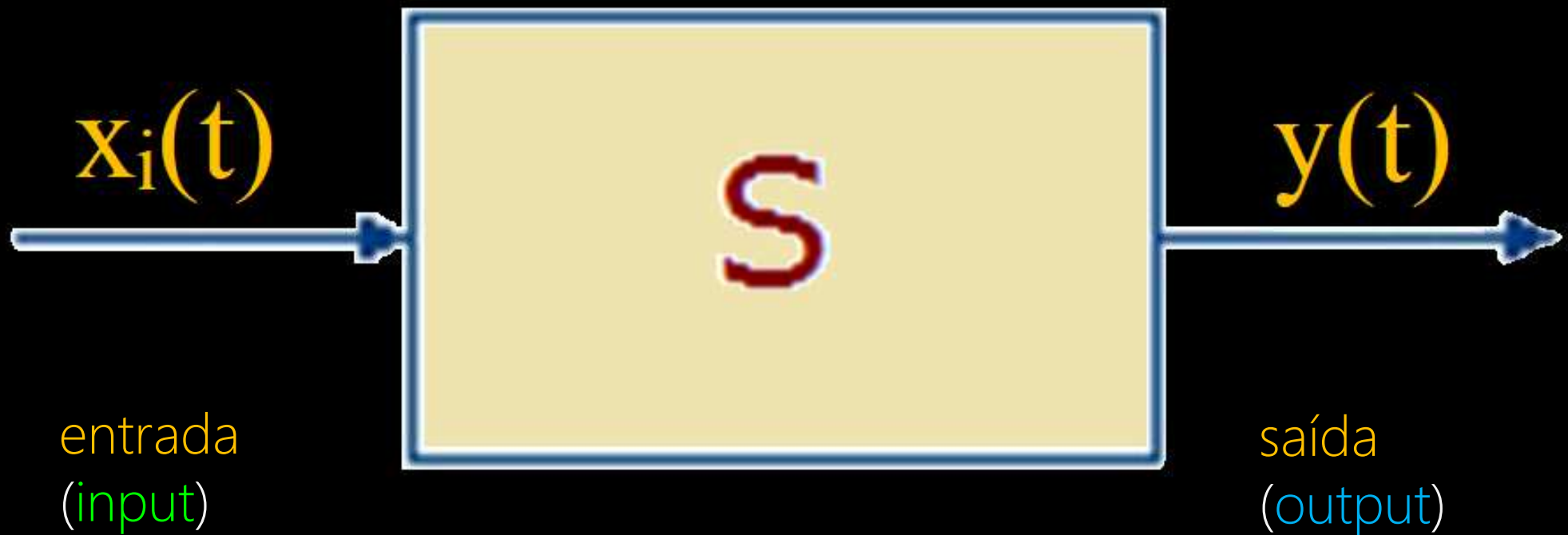
Modelização de Sistemas

sismógrafo

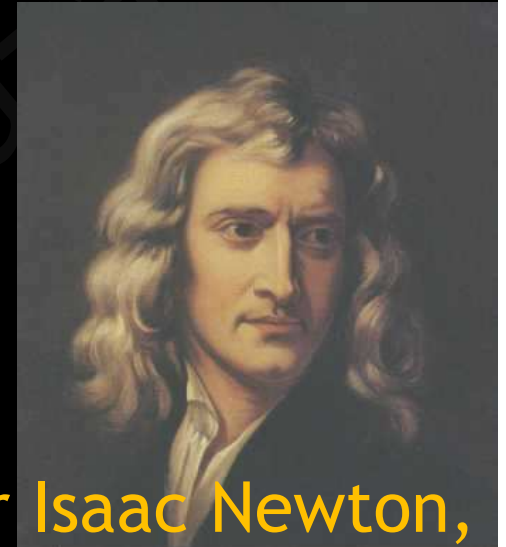
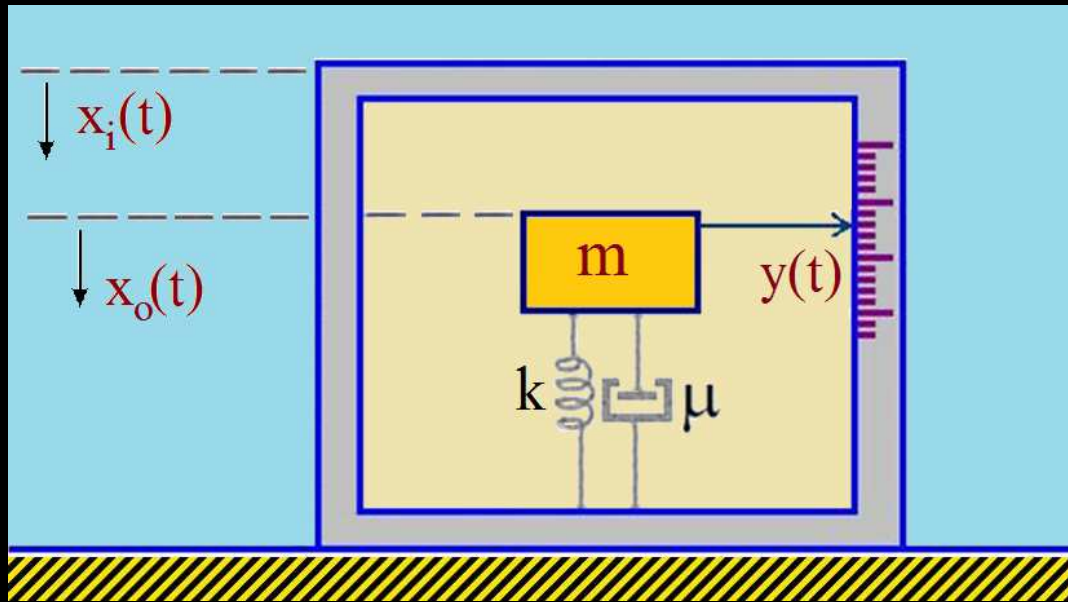


deslocamento
da caixa

deslocamento
da massa m



Novamente, pela 2ª Lei de Newton



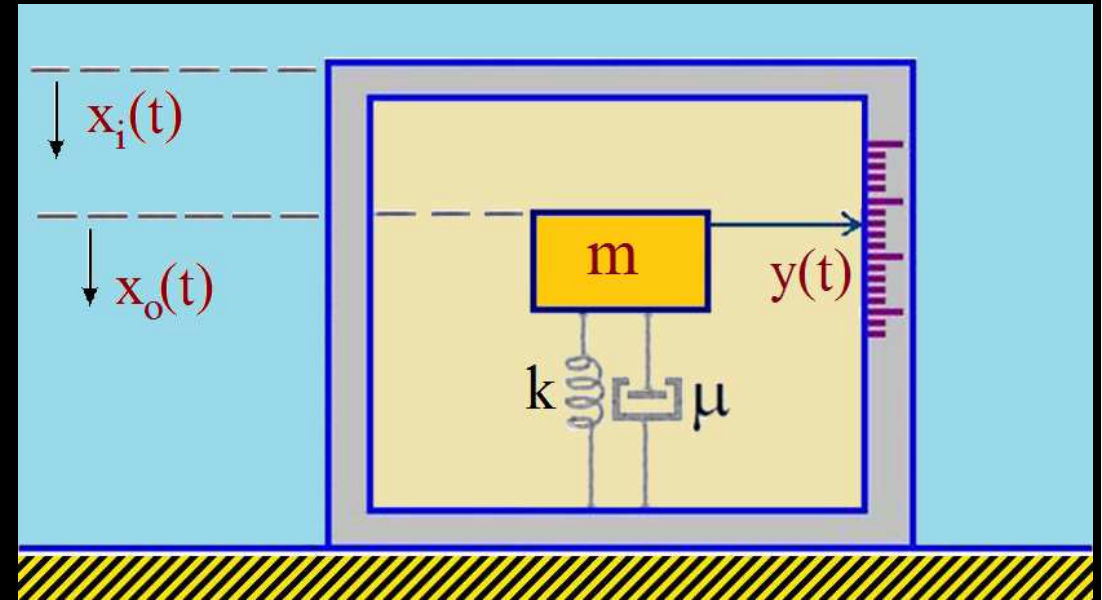
Sir Isaac Newton,
1643-1727

$$m x_o'' = -\mu (x_o' - x_i') - k(x_o - x_i),$$

e portanto,

$$\underbrace{m(x_o'' - x_i'')}_{y''(t)} + \underbrace{\mu(x_o' - x_i')}_{y'(t)} + \underbrace{k(x_o - x_i)}_{y(t)} = -m x_i'',$$

sismógrafo



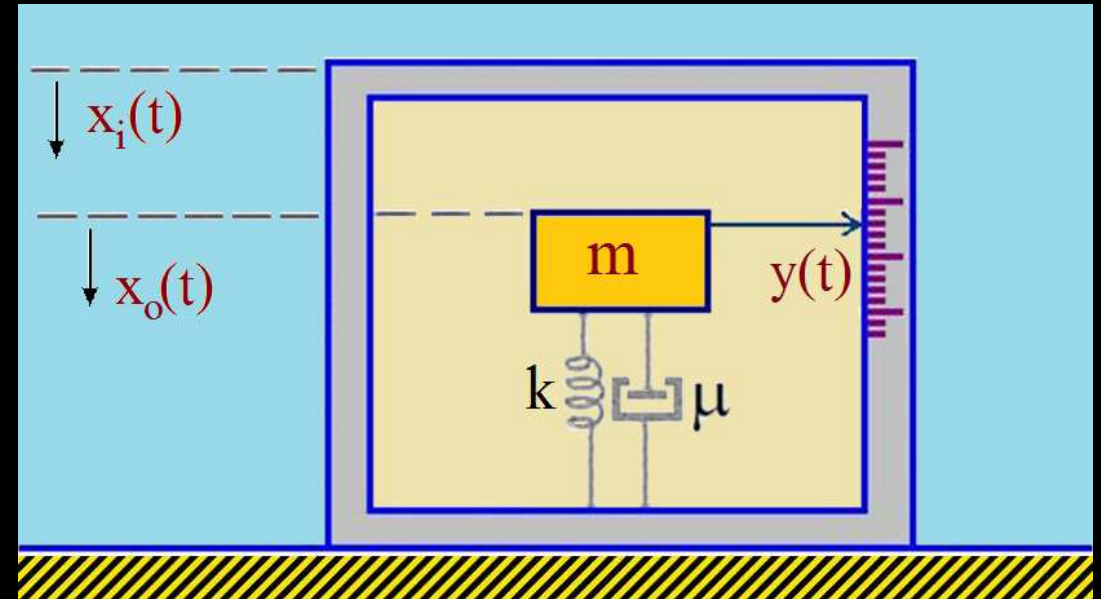
logo,

$$m y'' + \mu y' + k y = -m x_i'',$$

ou,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{dy}{dt} + k y = -m \frac{d^2 x_i}{dt^2},$$

sismógrafo

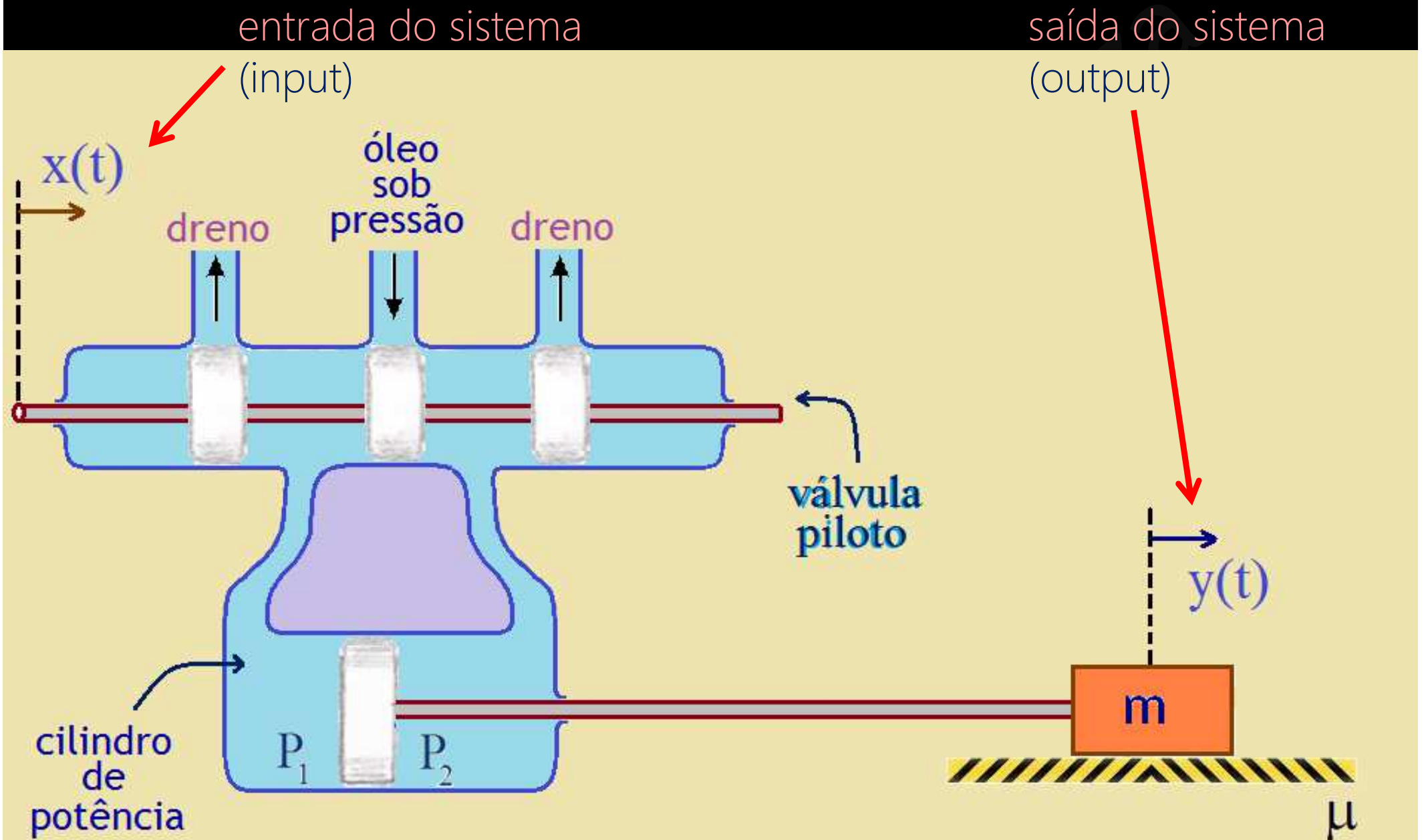


$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{dy}{dt} + ky = \\ = m y'' + \mu y' + k y = -m x_i'' . \\ y(0) = a , \quad y'(0) = b \end{array} \right.$$

um servomotor hidráulico

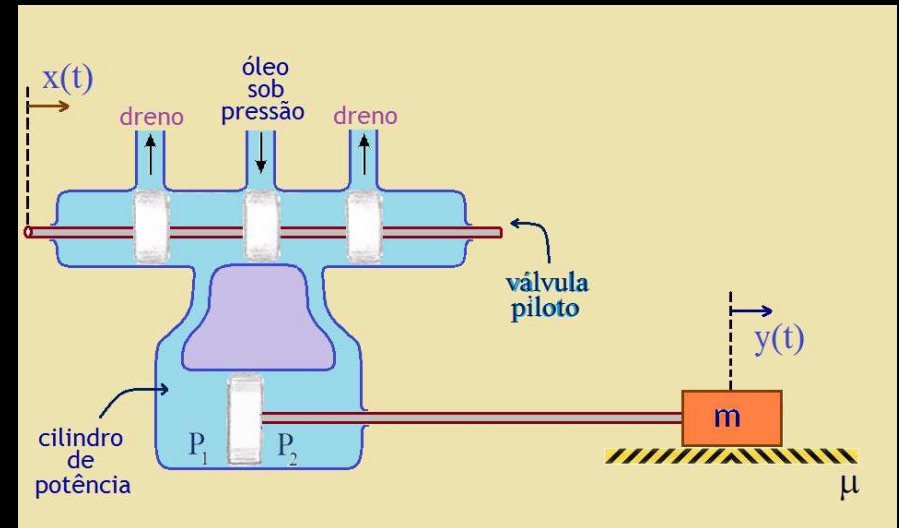
Prof. Felippe de Souza

servomotor hidráulico



servomotor hidráulico

obtém-se,



$$m y''(t) + \left(\mu + \frac{A^2 \rho}{K_2} \right) y'(t) = \frac{AK_1}{K_2} x(t),$$

ou,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\mu + \frac{A^2 \rho}{K_2} \right) \frac{dy}{dt} = \frac{AK_1}{K_2} x(t),$$

servomotor hidráulico

$$m y''(t) + \left(\mu + \frac{A^2 \rho}{K_2} \right) y'(t) = \frac{AK_1}{K_2} x(t),$$

A = área do pistão [m^2];

ρ = densidade do óleo [kg/m^3];

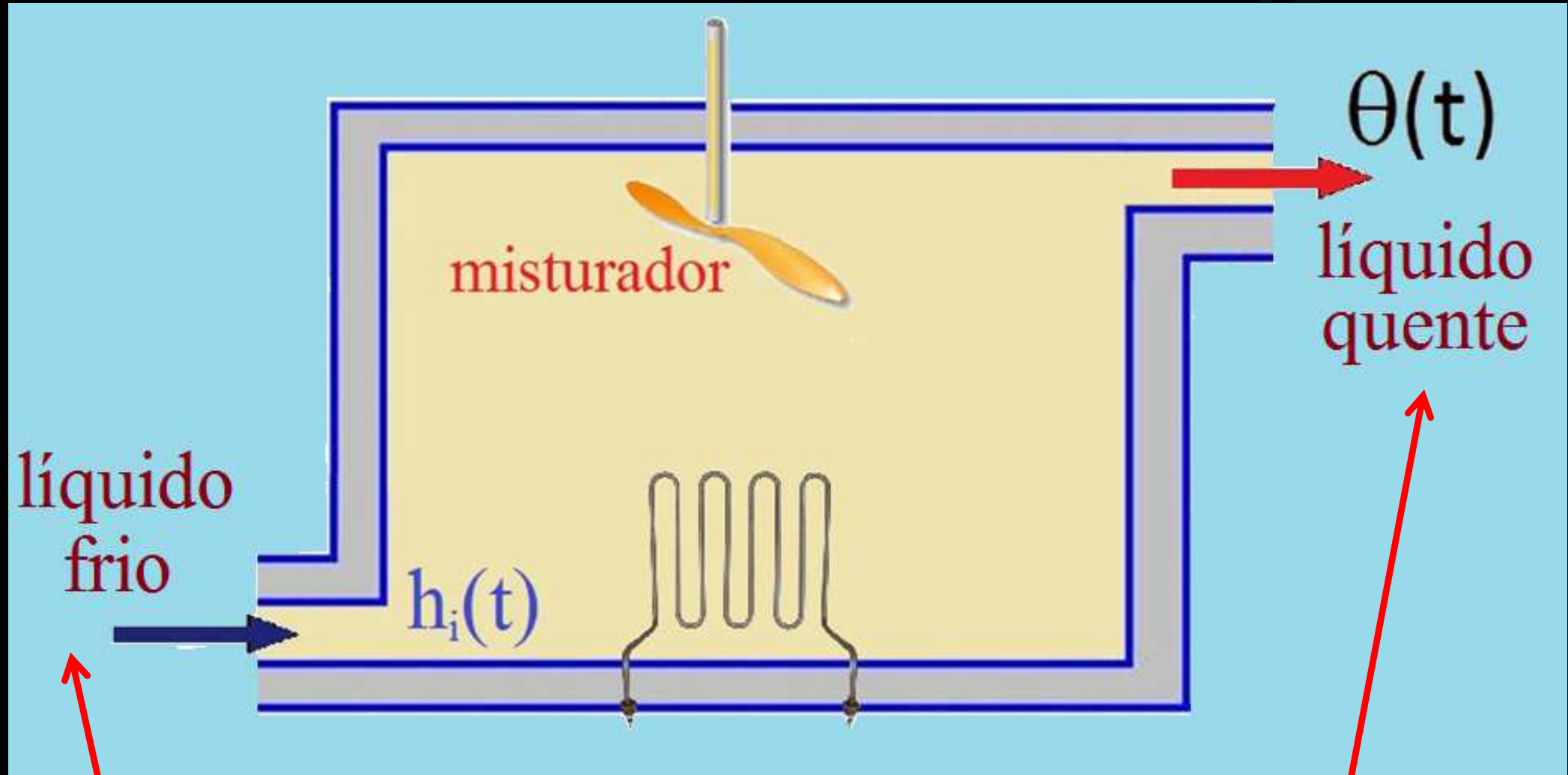
Q = taxa do caudal do óleo que vai para o cilindro de potência (*taxa de fluxo de massa*) [kg/s];

$\Delta P = (P_1 - P_2)$ = diferença de pressão no cilindro de potência (*queda na pressão do óleo*) [N/m^2].

$$Q = K_1 \cdot x - K_2 \cdot \Delta P$$

um sistema térmico

sistema térmico



entrada do sistema
(input)

saída do sistema
(output)

sistema térmico

obtém-se,

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta(t) = R h_i(t),$$

onde,

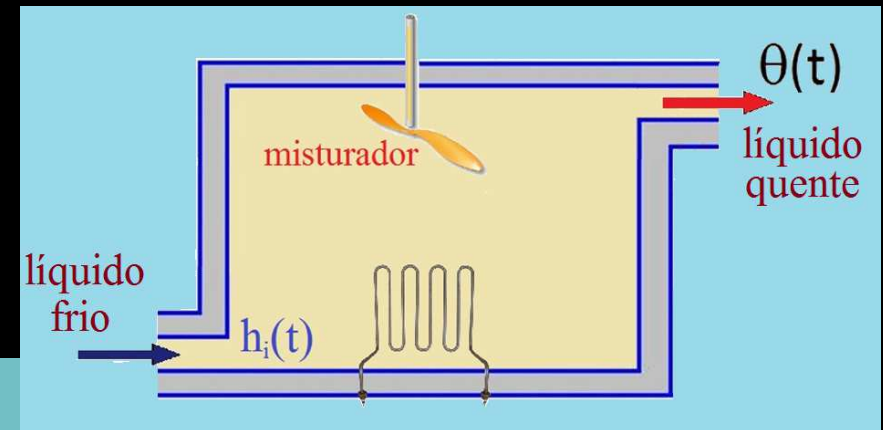
$h_i(t)$ = taxa de entrada de calor [cal/s];

$\theta(t)$ = temperatura do líquido que sai [°C];

R = resistência térmica (*ganho do sistema*) [°C·s/cal];

C = capacitância térmica [cal/°C];

$T = RC$ = constante de tempo do sistema [s].



Estes exemplos acima são simples, mas servem para ilustrar que muitos sistemas físicos podem ser modelizados na forma de equações diferenciais ordinárias.

Portanto, muitas das equações diferenciais que já vimos em exemplos no capítulo anterior podem ser a modelização de um sistema físico original.

outros exemplos

Um sistema descrito por equações diferenciais parciais:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) =$$
$$= k (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

sistema linear
contínuo,
invariante no tempo,
com memória e
causal

este sistema
descreve a
propagação de
uma onda no
espaço

ou, um sistema descrito por equações de diferenças:

$$y[n] = 2(x[n])^2 - 4nx[n]$$

Sistema discreto,
não linear,
variante no tempo,
sem memória
e causal.

Sistemas mais complexos são representados não apenas por uma, mas por várias equações.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{s\theta}{\theta + x_4} + \lambda(x_1, x_2, x_3) x_1 - x_1 [\mu_1 + k_1(m_1) x_4] \\ \dot{x}_2 = \omega k_1(m_1) \cdot x_4 x_1 - x_2 [\mu_2 + k_{20}] \\ \dot{x}_3 = (1 - \omega) k_1(m_1) x_4 x_1 + k_{20} x_2 - \mu_3 x_3 \\ \dot{x}_4 = N(t) \mu_3 x_3 - x_4 [k_1(m_1) \cdot x_1 + \mu_v] \end{cases}$$

este sistema acima descreve a dinâmica da evolução da SIDA (*AIDS*)



Departamento de
Engenharia Eletromecânica

Obrigado!

Felippe de Souza

felippe@ubi.pt